Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences
Tome 35, No 7, 1982

SUR LE THÉORÈME DE F. SCHUR POUR UNE VARIÉTÉ PRESQUE HERMITIENNE

MATHÉMATIQUES
Géometrie différentielle

O. T. Kassabov

(Présentée par B. Petkanchin, membre de l'Académie, le 23 mars 1982)

1. Introduction. Soit M une variété riemannienne de tenseur métrique g et tenseur de la courbure R. On definit la courbure sectionnelle $K(\alpha)$ d'un 2-plan α par

$$K(\alpha) = R(x, y, y, x) \ ,$$

où $\{x, y\}$ est une base orthonormée de α. Le théorème de Schur suivant est bien connu:

Soit M une variété riemannienne de dimension $m > 2$, telle que pour chaque point $p \in M$ la courbure d'un 2-plan arbitraire α dans $T_p(M)$ ne dépend pas de α: $K(\alpha) = c(p)$. Alors $c(p)$ ne dépend pas de p, c'est-à dire M est à courbure sectionnelle constante.

Soit M une variété presque hermitienne de tenseur métrique g, structure presque complexe J et tenseur de la courbure R. Soit α un 2-plan dans $T_p(M)$. L'angle $\sphericalangle(\alpha, J\alpha) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entre α et $J\alpha$ est donné par

$$\cos \sphericalangle(\alpha, J\alpha) = |g(x, Jy)| \ ,$$

où $\{x, y\}$ est une base orthonormée de α. Un 2-plan α est dit θ-holomorphe, si $\sphericalangle(\alpha, J\alpha) = \theta$. Un 0-holomorphe (resp. $\frac{\pi}{2}$)-holomorphe) 2-plan est dit aussi holomorphe (resp. anti-holomorphe).

On dit que M est à courbure sectionnelle θ-holomorphe constante par points, si pour chaque point $p \in M$ la courbure d'un 2-plan arbitraire θ-holomorphe $\alpha \subset T_p(M)$ ne dépend pas de α: $K(\alpha) = c(p)$. Particulièrement, si $c(p)$ ne dépend pas de p, M est dite variété à courbure sectionnelle θ-holomorphe constante.

Une variété presque hermitienne M est dite RK-variété, si

$$R(x, y, z, u) = R(Jx, Jy, Jz, Ju)$$

pour tous x, y, z, $u \in T_p(M)$, $p \in M$. Soit ∇ la connection riemannienne de M. Si $\nabla J = 0$, M est dite variété kählerienne.

En liaison avec le théorème de Schur on peux faire la conjecture suivante:

Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et soit M une variété presque hermitienne à courbure sectionnelle θ-holomorphe constante par points. Alors M est à courbure sectionnelle θ-holomorphe constante.

Dans [3] on a prouvé, que c'est vrai pour certains variétés presque hermitiennes en cas où $\theta = 0$. Dans section 2 nous allons examiner le cas $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ et dans section 3 - le cas $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour une RK-variété.

2. Le cas $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Théorème 1. Soit M une variété presque hermitienne de dimension $2m \geq 6$ et soit $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Si M est à courbure sectionnelle θ-holomorphe constante par points, M est à courbure sectionnelle constante ou bien M est une variété kählerienne à courbure sectionnelle φ-holomorphe constante pour chaque $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Preuve. Si $p \in M$ et x, y sont des vecteurs uniques dans $T_p(M)$ avec $g(x, y) = g(x, Jy) = 0$, le plan avec la base $\{Jx, x\cos\theta + y\sin\theta\}$ est θ-holomorphe et alors

$$R(Jx, x\cos\theta + y\sin\theta, x\cos\theta + y\sin\theta, Jx) = c(p) \tag{1}$$

où $c(p)$ ne dépend pas de x, y. On déduit de (1) et $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$R(x, Jx, Jx, y) = 0\ , \tag{2}$$

$$R(x, Jx, Jx, x)\cos^2\theta + R(Jx, y, y, Jx)\sin^2\theta = c(p)\ . \tag{3}$$

D'après (2) et [4] M est une variété à courbure sectionnelle holomorphe constante par point μ:

$$R(x, Jx, Jx, x) = \mu(p)\ . \tag{4}$$

Il résulte de (3) et (4) que M est à courbure sectionnelle antiholomorphe constante par points ν. Donc le tenseur de la courbure a la forme [1]

$$R = \nu\pi_1 + \frac{\mu - \nu}{3}\pi_2 \tag{5}$$

avec

$$\pi_1(x, y, z, u) = g(x, u)g(y, z) - g(x, z)g(y, u)\ ,$$

$$\pi_2(x, y, z, u) = g(x, Ju)g(y, Jz) - g(x, Jz)g(y, Ju) - 2g(x, Jy)g(z, Ju)\ .$$

D'après [5] si R a la forme (5), M est à courbure sectionnelle constante ν ou bien M est une variété kählerienne à courbure sectionnelle holomorphe constante.

3. RK-variétés à courbure sectionnelle antiholomorphe constante par points.

Théorème 2. Soit M une RK-variété de dimension $2m \geq 6$ à courbure sectionnelle antiholomorphe constante par points. Alors M est à courbure sectionnelle antiholomorphe constante.

Preuve. Nous avons prouvé dans [2], que si M est une RK-variété à courbure sectionnelle antiholomorphe constante par poits ν, alors

$$R = \frac{1}{6}\psi(S) + \nu\pi_1 - \frac{2m-1}{3}\nu\pi_2 \ , \tag{6}$$

avec

$$\begin{aligned}\psi(S)(x,y,z,u) = {} & g(x,Ju)S(y,Jz) - g(x,Jz)S(y,Ju) - 2g(x,Jy)S(z,Ju) \\ & + g(y,Jz)S(x,Ju) - g(y,Ju)S(x,Jz) - 2g(z,Ju)S(x,Jy) \ .\end{aligned}$$

Ici S est le tenseur de Ricci pour M.

Pour un point $p \in M$ soit α un 3-plan antiholomorphe dans $T_p(M)$ avec une base orthonormée $\{x,y,z\}$. D'après la seconde identité de Bianchi

$$(\nabla_x R)(y,z,z,y) + (\nabla_y R)(z,x,z,y) + (\nabla_z R)(x,y,z,y) = 0 \ . \tag{7}$$

On déduit de (6) et (7)

$$\begin{aligned}& 2g(y,(\nabla_x J)z)S(y,Jz) + g(z,(\nabla_y J)y)S(x,Jz) + g(x,(\nabla_y J)z)S(z,Jy) \\ & + g(x,(\nabla_z J)y)S(y,Jz) + g(y,(\nabla_z J)z)S(x,Jy) + 3x(\nu) = 0 \ .\end{aligned} \tag{8}$$

Soit $\{e_i, \ Je_i; \ i=1,\ldots,m\}$ une base orthonormée de $T_p(M)$, telle que $S(e_i) = \lambda_i e_i$, $i=1,\ldots,m$. Il suite de (8) pour $x=e_i$, $y=e_j$, $z=e_k$ $(i \neq j \neq k \neq i)$

$$e_i(\nu) = 0 \ . \tag{9}$$

On déduit de (9) que ν ne dépend pas du point p.

Institute de Mathématiques
Académie bulgare des Sciences
Sofia, Bulgaria

References

[1] G. Ganchev. Almost Hermitian manifolds similar to the complex space forms. *Compt. Rend. Acad. bulg. Sci.,* **32**, 1979, 1179-1182.

[2] G. Ganchev, O.Kassabov. Nearly Kähler manifolds of constant antiholomorphic sectional curvature. *Compt. Rend. Acad. bulg. Sci.,* **35**, 1982, 145-147.

[3] Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature. *Časopis pro pěstováni matematiky,* **104**, 1979, 170-179.

[4] O. Kassabov. On the axiom of planes and the axiom of spheres in the almost Hermitian geometry. *Serdica,* **8**, 1982, 109-114.

[5] F. Tricerri, L. Vanhecke. Curvature tensors on almost Hermitian manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **267**, 1981, 365-398.