文章编号: 1000-5641(2010)01-0108-03

弱 c-supplement 与一类群系

刘晓蕾

(山西财经大学 应用数学学院, 太原 030006)

摘要: 利用弱 c-supplement 的概念, 研究了一有限群属于一个包含超可解群类的饱和群系的可能性, 证明了: 设 $\mathcal{F}$ 是一个饱和群系, 且包含超可解群类. 再假设 N 是 G 的一个正规子群, 使得 $G/N \in \mathcal{F}$. 如果对每一个 $p \in \pi(N)$, 对 N 的任一个 Sylow p-子群 P, P 的每一个极大子群在 G 中是弱 c-supplement 的, 那么, $G \in \mathcal{F}$. 推广了某些结果.

关键词: 有限群; 弱$c-$supplement; 饱和群系

中图分类号: O152 **文献标识码:** A

On weak c-supplement and formations

LIU Xiao-lei

(*Department of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: By weak c-supplement we investigated the possibility that a finite group is in a saturated formation containing all supersoluble groups. It was showed that for a saturated formation $\mathcal{F}$ containing all supersoluble groups, if there exists a group G such that G contins a normal subgroup N and G/N is supersoluble and if maximal subgroups of Sylow subgroups of N are c-supplemented in G, then $G \in \mathcal{F}$. Some results are extended.

Key words: finite group; weak c-supplement; saturated formation

本文只讨论有限群, 所用符号均是标准的, 可参看文献[1,2]等.

在一篇即将发表的论文中, 我们引入了弱 c-supplement的概念, 并利用此概念给出了有限群的 p-幂零性的一个充分条件. 本文将继续研究弱 c-supplement的应用.为此, 先回顾弱 c-supplement的定义及一些简单事实.

定义 设G是一个有限群, H是G的一个子群. 如果存在G的一个子群K, 使得$G = HK$, 且$H \cap K \leqslant H_{G^*}$, 这里 H_{G^*}表示G的包含在H中的最大的拟正规子群, 那么称K是H在 G中的一个弱c-supplement, 并称H在G中有一个弱c-supplement.

引理 1 设H是G的一个子群, 且在G中有一个弱 c-supplement K. 那么

(1) 如果$H \leqslant M$, 则H在M中有一个弱c-supplement.

收稿日期: 2008-12

基金项目: 山西省高等学校科技研究开发项目(200811015)

作者简介: 刘晓蕾, 男, 副教授, 博士, 从事代数学研究. E-mail: lxlljh@163.com.

(2) 若 N 是 H 的一个子群, 且正规于 G, 则 H/N 在 G/N 中有一个弱 c-supplement.

(3) 设 π 是素数集, N 是 G 的正规子群, 其阶是 π'-数. 若 $|H|$ 是 π-数, 则 HN/N 在 G/N 中有一个弱 c-supplement.

(4) 设 p 是 G 的阶的一个素因子, 且 $(|G|, p-1)=1$, P 是 G 的一个 Sylow p-子群. 如果 P 循环, 那么 G 是 p-幂零的.

证 明 直接验证即可.

引 理 2[3] 有限群 G 的极小正规子群必是 G 的极小拟正规子群.

引 理 3[4,Lemma 2.16] 设 $\mathcal{F}$ 是一个包含超可解群类的饱和群系. 假设 E 是 G 的一个正规子群, 使得 $G/E\in\mathcal{F}$. 如果 E 是循环的, 那么 $G\in\mathcal{F}$.

下面的引理 4 不但是本文的重要引理, 其本身也有独立的意义, 而且可视为文献[5] Theorem 3.1的一个推广.

引 理 4 设 $p\in\pi(G)$ 且 P 是 G 的一个 Sylow p-子群. 如果 P 的每一个极大子群在 G 中是弱 c-supplement 的, 且 $(|G|, p-1)=1$, 那么, G 是 p-幂零的.

证 明 假设定理不真, 取 G 是一个极小反例. 我们断言:

(1) $O_{p'}(G)=1$. 假设 $O_{p'}(G)\neq 1$. 取 N 是 G 的一个包含在 $O_{p'}(G)$ 中的极小正规子群. 考虑商群 G/N. 显然, $(|G/N|, p-1)=1$. 设 PN/N 是 G/N 的一个 Sylow p-子群. 对于 PN/N 的任意极大子群 L/N, 易知存在 P 的极大子群 P_1 使得 $L=P_1N$. 根据引理 1(3), L/N 在 G/N 中有弱 c-supplement.因而, G/N 满足定理条件. 由 G 的极小性, G/N 是 p-幂零的, 进而 G 本身是 p-幂零的, 矛盾.

(2) 如果 $K\leqslant G$, 且 K 的 Sylow p-子群 K_p 是一个循环群, 那么 K 是 p-幂零的. 事实上, 这正是引理 1(4).

(3) $O_p(G)\neq 1$. 假设 $O_p(G)=1$. 根据文献[5] Theorem 2.2, G 不是一个非交换单群, 且满足 $E_{p'}$. 取 N 是 G 的一个极小正规子群. 那么, $N<G$, 且由于假设 $O_p(G)=1$, 故 N 既不是 p-群, 也不是 p'-群. 因满足 $E_{p'}$, 可以取到 N 的 Hall p'-子群 $N_{p'}$ 和 N 的 Sylow p-子群 N_p. 如果 $P=N_p$, 易知 N 满足定理条件, 进而知 N 是 p-幂零的.显然, N 的正规 p-补就是 G 的正规 p-补, 矛盾. 另一方面, 如果 $N_{p'}$ 不是 G 的 Hall p'-子群的话, $PN<G$. PN 显然也满足定理的条件, 故由 G 的极小性, PN 是 p-幂零的, 进而 N 是 p-幂零的. 于是 $O_{p'}(G)\neq 1$, 矛盾. 由此可见, $N_p<P$, 且 $N_{p'}$ 是 G 的一个 Hall p'-子群. 如果 p 是一个奇素数, 那么, 由于 $(|G|, p-1)=1$, 故 G 是一个奇阶群, 进而由奇阶定理知 G 是可解的. 如果 $p=2$, 那么, 由于 G 满足 $E_{p'}$, 故 G 和 N 均满足 $C_{p'}$[6]. 根据Frattini论断, $G=N_pN_G(N_{p'})$. 设 P^* 是 $N_G(N_{p'})$ 的一个 Sylow p-子群, 使得 $P^*\leqslant P$. 注意, $N_G(N_{p'})<G$. 因而 $P^*<P$, 且存在 P 的一个极大子群 P_1, 使得 $P^*\leqslant P_1$. 由设, 存在 G 的一个子群 K, 使得 $G=P_1K$, 且 $P_1\cap K\leqslant (P_1)_{G^*}$. 但 $(P_1)_{G^*}\leqslant O_p(G)=1$. 故 $P_1\cap K=1$. 根据(2), K 是 p-幂零的. 设 H 是 K 的正规 p-补. 显然 H 是 G 的 Hall p'-子群. 于是, 存在 G 中元素 g, 使得 $H^g=N_{p'}$. 由于 $G=P_1K$, 且 H 是 K 的正规子群, 可取 $g\in P_1$. 由于 K^g 也正规化 $H^g=N_{p'}$, 因而 $K^g\leqslant N_G(N_{p'})$. 这样, $G=(P_1K)^g=P_1N_G(N_{p'})$. 进而 $P=P\cap G=P_1(P\cap N_G(N_{p'}))=P_1P^*=P_1<P$, 矛盾.

(4) $\Phi(O_p(G))=1$. 假设 $\Phi(O_p(G))>1$.考虑商群 $G/\Phi(O_p(G))$. 根据引理1(2), $G/\Phi(O_p(G))$ 满足定理条件, 因而由 G 的取法, $G/\Phi(O_p(G))$ 是 p-幂零的. 显然 $\Phi(O_p(G))\leqslant\Phi(G)$, 故 $G/\Phi(G)$ 是 p-幂零的, 因而 G 本身是 p-幂零的, 矛盾. 于是 $O_p(G)$ 是一个初等交换群.

(5) $O_p(G)$ 是 G 的一个极小正规子群. 设 N 是 G 的一个包含在 $O_p(G)$ 中的极小正规子群, 那么, 易验证商群 G/N 满足定理的条件, 进而由 G 的极小性知 G/N 是 p-幂零的. 如果 $O_p(G)$ 包含 G 的另一个极小正规子群 N_1, 那么, 同理可证 G/N_1 也是 p-幂零的. 于是 $G \cong G/N \cap N_1$ 是 p-幂零的, 矛盾. 故 N 是 G 的包含在 $O_p(G)$ 中的唯一的极小正规子群. 设 T/N 是 G/N 的正规 p-补. 由 Schur-Zassenhaus 定理, 存在 T 的一个 Hall p'-子群 H 使得 $T = NH$. 由 Frattini 论断, $G = NN_G(H)$. 显然 $N_G(H) < G$. 如果 $N < O_p(G)$, 那么, $N \nleqslant O_p(G) \cap N_G(H) \neq 1$. 但是, $O_p(G) \cap N_G(H)$ 在 G 中是正规的, 矛盾. 故 $O_p(G)$ 是 G 的一个极小正规子群.

(6) 最终的矛盾. 设 $T/O_p(G)$ 是 $G/O_p(G)$ 的正规 p-补. 由 Schur-Zassenhaus 定理, 存在 T 的一个 Hall p'-子群 H 使得 $T = O_p(G)H$. 由于 G 是 p-可解的, 故根据 Frattini 论断, $G = O_p(G)N_G(H)$. 设 P_2 是 $N_G(H)$ 的一个 Sylow p-子群. 当然有 $N_G(H) < G$. 显然可以假设 $P_2 < P$. 取 P_1 是 P 的一个极大子群, 使得 $P_2 \leqslant P_1$. 由于 $O_p(G)$ 是 G 的一个极小正规子群, 且 $O_p(G) \leqslant P_1$, 故 $(P_1)_G = 1$. 由设, 存在 G 的一个子群 K_1, 使得 $G = P_1K_1$, 且 $P_1 \cap K_1 \leqslant (P_1)_{G^*}$. 另一方面, 显然 $(P_1)_{G^*} \leqslant O_p(G)$. 如果 $(P_1)_{G^*} > 1$, 那么, 根据引理 2, $O_p(G) = (P_1)_{G^*} \leqslant P_1$, 矛盾. 故 $(P_1)_{G^*} = 1$, 进而 $P_1 \cap K_1 = 1$. 于是, K_1 的 Sylow p-子群是 p 阶的, 因而由(2)知 K_1 有正规 p-补 H_1. 这样, 存在一个元 $g \in O_p(G)P_2$, 使得 $(H_1)^g = H$. 由于 P_1 在 $O_p(G)P_2$ 中正规, 故 $G = P_1K_1 = (P_1K_1)^g = P_1(K_1)^g$, 因而 $P_1 \cap (K_1)^g = 1$. 由于 $(K_1)^g \cong K_1$, 故 $(K_1)^g$ 有正规 p-补, 且 $H = (H_1)^g \leqslant (K_1)^g$, 于是 $(K_1)^g \leqslant N_G(H)$, 进而 $G = P_1(K_1)^g = P_1N_G(H)$. 因此, $O_p(G)P_2 = (O_p(G)P_2) \cap G = (Op(G)P_2) \cap (P_1N_G(H)) = P_1((O_p(G)P_2) \cap N_G(H)) = P_1P_2 = P_1$, 与 $O_p(G)P_2$ 是 G 的 Sylow p-子群矛盾.

由引理 4, 不难用归纳法证明下述推论.

推　论　如果 G 的每一个 Sylow 子群的极大子群在 G 中均有弱 c-supplement, 那么, G 有 Sylow 塔.

定　理　设 $\mathcal{F}$ 是一个饱和群系, 且包含超可解群类. 再假设 N 是 G 的一个正规子群, 使得 $G/N \in \mathcal{F}$. 如果对每一个 $p \in \pi(N)$, 对 N 的任一个 Sylow p-子群 P, P 的每一个极大子群在 G 中是弱 c-supplement 的, 那么 $G \in \mathcal{F}$.

证　明　假设定理不真, 取 G 为一个极小反例. 那么由推论知, N 有 Sylow 塔. 因而, 如果取 $p = \max\ \pi(N)$, 且 $P \in Syl_p(N)$, 那么 P 是 G 的一个正规子群. 取 M 是 G 的一个包含在 P 中的极小正规子群, 那么 M 是一个初等交换 p 群. 易验证 $(G/M)/(N/M)$ 满足定理假设, 由 G 的极小性知, $G/M \in \mathcal{F}$. 如果 $P \cap \Phi(G) > 1$, 那么, 由于 M 是 G 的一个极小正规子群, 故 $M \leqslant P \cap \Phi(G) \leqslant \Phi(G)$. 注意到 $\mathcal{F}$ 是一个饱和群系, 故知 $G \in \mathcal{F}$, 矛盾. 因而 $P \cap \Phi(G) = 1$. 根据文献[7], Lemma 2.6, $M = F(P) = P$.

取 P_1 是 P 的一个极大子群. 由题设, 存在 G 的一个子群 K, 使得 $G = P_1K$, 且 $P_1 \cap K \leqslant (P_1)_{G^*} \leqslant P_1 < P$. 根据引理 2, $(P_1)_{G^*} = 1$, 进而 $P_1 \cap K = 1$. 因而 $P = P_1(P \cap K)$. 由于 P 是交换群, 故 $P \cap K$ 在 K 中正规, 且被 P_1 正规化. 因而 $P \cap K$ 是 G 的一个正规子群. 因此 $P \cap K = P$, 进而 P 是 p 阶循环群. 根据引理 3, $G \in \mathcal{F}$, 矛盾.

(下转第 141 页)