

DOI:10.3969/j.issn.1000-1298.2010.02.043

# 基于构件元的平面连杆机构运动分析自动建模方法\*

王成志<sup>1</sup> 黄凯旋<sup>2</sup> 张全明<sup>1</sup> 方芳<sup>1</sup>

(1. 集美大学机械工程学院, 厦门 361021; 2. 集美大学轮机工程学院, 厦门 361021)

**【摘要】** 分析了封闭环矢量运动分析法, 提出了3个构件元概念: 构件矢量元、雅可比元和雅可比速度元。由于构件元只与构件本身形态有关, 可以非常方便地结合到构件的绘图程序中, 通过引入有效因子, 也可以很方便地组合成整个机构的雅可比矩阵和雅可比速度矩阵, 从而得到了一种运动分析自动建模新方法。讨论了复杂平面机构封闭环的通用分析方法和利用构件元自动建模与运动分析的步骤。编程实验及实际程序测试表明, 本方法具有极强的模块性, 对复杂机构计算机自动求解的编程非常适用。

**关键词:** 平面连杆机构 运动分析 构件元 计算机建模

**中图分类号:** TH113.2<sup>+</sup>2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2010)02-0214-07

## Automated Modeling for Kinematic Analysis of Planar Linkages Based on Link Units

Wang Chengzhi<sup>1</sup> Huang Kaixuan<sup>2</sup> Zhang Quanming<sup>1</sup> Fang Fang<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Jimei University, Xiamen 361021, China

2. Marine Engineering Institute, Jimei University, Xiamen 361021, China)

### Abstract

Through the kinematic analysis approach of mechanism with closed loop vector equations, three kinds of link units, including link vector unit, Jacobian unit and Jacobian differentiation unit, were proposed. Since they are only relative to sizes and shapes of link, these units can be programmed with link drawing subprograms together. Using the effect factors, the units were combined together to build Jacobian matrix and differentiation Jacobian matrix of whole mechanism, and a new automated modeling approach to analyzing planar linkages motion was gotten. This paper also discussed general method analyzing closed loops in complex linkages, as well as algorithm for automated modeling and kinematic analysis. Programming the kinematic analysis and testing with many planar linkages showed that the approach is suitable for automated solving kinematics of complex mechanism due to its modular property.

**Key words** Planar linkages, Kinematic analysis, Link units, Computer modeling

### 引言

由于机械结构的复杂性, 不同机构具有不同运动模型, 不存在通用解析公式。国内外学者研究了许多机构运动分析方法, 如: 杆组法、结构型转化法<sup>[1]</sup>、序单开链分解法<sup>[2]</sup>、D-H 矩阵法<sup>[3-4]</sup>、螺旋理论法<sup>[5-6]</sup>、影响系数法<sup>[7]</sup>、有限元法<sup>[8]</sup>等。较优的

运动分析计算机自动建模方法应该具有以下特点: 理论上适用于任意复杂机构(平面机构或同时适用于平面与空间机构), 按单元的模块性自动建立任意机构运动模型方便且理论清晰, 计算机容易识别组成单元, 建立的方程容易求解等。以上方法中, 传统的杆组法理论简单, 一般只适用于Ⅱ级机构(大于Ⅱ级机构要采用拆杆拆副法等), 且杆组的识

收稿日期: 2009-02-11 修回日期: 2009-10-05

\* 福建省自然科学基金资助项目(A0440006)

作者简介: 王成志, 教授, 主要从事机构学、机械 CAD、科学计算可视化、光学测量研究, E-mail: wcz3@21cn.com

别有一定复杂性,特别是Ⅱ级以上的机构;D-H矩阵为代表的变换矩阵法,在一个封闭环中常量、变量经常交错在一起,使方程的计算机建模、求解以及计算稳定性等具有一定的复杂性。目前CAD及可视化一般要求分析的同时能进行实时仿真,所以还要求建模方法具有强模块性的特点,即绘图和运动分析功能可以按模块性理论被同时组合封装在一个模块单元中。

以封闭矢量法为基础,提出构件元的概念。根据构件模块类建立的构件元,可以非常方便组合成整个机构的雅可比矩阵和雅可比速度矩阵,快速自动完成计算机建模。以该理论为基础,设计可以分析复杂平面连杆机构的通用运动分析系统——MCAD<sup>[9]</sup>。

## 1 基本原理及构件元

### 1.1 机构运动分析基本原理

构件元法以封闭矢量法为基础。设机构有 $L$ 个独立封闭环,则每个封闭环有以下形式的方程

$$\sum L_i = 0$$

矢量 $L_i$ 是构件上从一个运动副指向另一个运动副的连线。因此,对一个具有 $L$ 个独立封闭环的机构,可以建立 $2L$ 个约束方程

$$f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N; q_1, q_2, \dots, q_F) = 0 \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 2L)$$

或  $A = f(\varphi; q) = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{2L}]^T = 0$

其中  $\varphi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_N]^T$   $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_F]^T$

式中  $\varphi$  —— $N$ 个待求位置参数

$q$  —— $F$ 个已知位置参数

$F$  ——机构自由度

应用Taylor公式并只保留各增量的线性项后,则可求得求解机构位置的Newton-Raphson迭代公式

$$J(\varphi^{(i)}; q) \Delta\varphi^{(i)} = -f(\varphi^{(i)}; q) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (2)$$

$$\varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + \Delta\varphi \quad (3)$$

式中  $J$  ——机构未知参数的雅可比矩阵

将式(1)对时间求导和再求导

$$J\dot{\varphi} = -B\dot{q} \quad (4)$$

$$J\ddot{\varphi} = -B\ddot{q} - \dot{B}\dot{q} - J\dot{\varphi} \quad (5)$$

其中  $J = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_j} \right]$   $B = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \right]$

$$\dot{\varphi} = [\dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2 \ \dots \ \dot{\varphi}_N]^T \quad \dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_F]^T$$

$$J = \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_j} \right] \quad \dot{B} = \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \right]$$

$$\ddot{\varphi} = [\ddot{\varphi}_1 \ \ddot{\varphi}_2 \ \dots \ \ddot{\varphi}_N]^T \quad \ddot{q} = [\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \dots \ \ddot{q}_F]^T$$

式中  $J$  ——机构未知参数的雅可比速度矩阵

$B$ 、 $\dot{B}$  ——机构已知参数的雅可比矩阵和速度矩阵

由此可求出机构的速度 $\dot{\varphi}$ 和加速度 $\ddot{\varphi}$ 。

### 1.2 构件元

#### 1.2.1 构件元定义

规定 $L_i$ 是封闭环经过构件 $i$ 时进入构件点指向离开构件点的矢量。因此,若 $L_i$ 连接的首末点是两回转副,则 $L_i$ 是单一的直线矢量;而若该矢量连接的是回转副和移动副或两移动副,则 $L_i$ 可为多个首尾相连的直线矢量和。例如,由回转副指向表示移动副位移的参考点的矢量加上沿移动导路方向上移动副间的位移矢量。按这样规定后分析上述公式,发现机构中的 $J$ 、 $\dot{J}$ 、 $B$ 、 $\dot{B}$ 是对由各个组成封闭环矢量 $L_i$ 求偏导和对时间求导,并按一定方式组合起来的。设在封闭环中由某个构件组成的矢量为

$$L_i = \{x_i(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ic}), y_i(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ic})\}$$

或写成

$$\nabla A_i = \begin{bmatrix} x_i(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ic}) \\ y_i(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ic}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中  $x_i, y_i$  ——矢量 $L_i$ 在 $x, y$ 坐标上的投影

$\varphi_{ij}$  ——构件 $i$ 由位置角和移动副的位移等运动特性参数组成的拉氏坐标, ( $j = 1, 2, \dots, C$ )

$C$  ——构件 $i$ 含运动特性参数(变量)的个数  
将 $L_i$ 对各 $\varphi_{ij}$ 求偏导,再对时间求导,得

$$\nabla J_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_{i1}} & \dots & \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_{ic}} \\ \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_{i1}} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_{ic}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\nabla \dot{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_{i1}} & \dots & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_{ic}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_{i1}} & \dots & \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_{ic}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

由于 $\nabla J$ 、 $\nabla \dot{J}$ 是构成雅可比矩阵和速度矩阵的最小单元,因此这里将 $\nabla J$ 称作构件的雅可比元或一阶雅可比元,将 $\nabla \dot{J}$ 称为构件的雅可比速度元或二阶雅可比元。为了统一定义,将 $\nabla A$ 称为构件的矢量元,而将 $\nabla A$ 、 $\nabla J$ 、 $\nabla \dot{J}$ 统称为构件元(或称杆元)。它们与描述构件外形的构件图元<sup>[10]</sup>一起组成构件类。

构件元以机构的最基本单元——构件,作为运动方程的分析对象。按构件上含有的运动副(实际是运动副元素,以下简称运动副)类型的字母命名

构件类型: R、P 分别表示回转副、移动副, S 表示有源杆, 后缀 0 表示机架。如: 含有两回转副的构件和两移动副的构件分别命名为 RR 构件和 PP 构件。多于 3 个相同的运动副则加表示个数的前缀, 如 4R 表示该构件上有 4 个回转副。若一个构件上同时混合有回转副和移动副, 则规定表示回转副的字母排在前面, 表示移动副的字母排在后面。例如, RP 构件、RPP 构件等。图 1 为可以绘制或构成绝大多数机构的构件类型, 表 1 列出了其中常见的 3 种构件类型及其构件元。如果同一类型中有不同的图元外形(绘制方法不同或移动副元素的滑块外形或导路外形), 则加后缀数字(非零的数字), 但它们仍属于同一类构件。例如图 1 中的 RP1 的移动副元素是包容型的(滑块型), 而 RP2 移动副元素是被包容型的(导路型)。表 1 中的  $l, l', l'', e, s, \varphi$  是构件本身的形态和方位尺寸, 而  $s, \varphi$  又是代表构件运动特性的拉氏坐标。

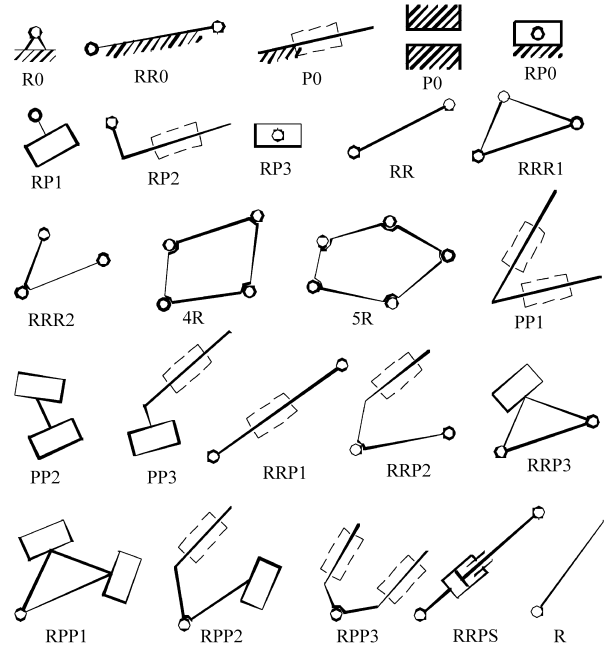


图 1 MCAD 构件类型

Fig. 1 Link types used in MCAD

表 1 常见构件的构件元

Tab. 1 Common link units

构件类型	RRR1 构件	RP1 构件	RP2 构件
$\nabla A$	$\nabla A_{12} = \begin{bmatrix} l \cos \varphi \\ l \sin \varphi \end{bmatrix}$ $\nabla A_{13} = \begin{bmatrix} l' \cos(\varphi + \alpha) \\ l' \sin(\varphi + \alpha) \end{bmatrix}$	$\nabla A_{12} = \begin{bmatrix} -e \sin \varphi \\ e \cos \varphi \end{bmatrix}$	$\nabla A_{12} = \begin{bmatrix} e \cos(\varphi - 90^\circ) + s \cos \varphi \\ e \sin(\varphi - 90^\circ) + s \sin \varphi \end{bmatrix}$
$\nabla J$	$\nabla J_{12} = \begin{bmatrix} -l \sin \varphi \\ l \cos \varphi \end{bmatrix}$ $\nabla J_{13} = \begin{bmatrix} -l' \sin(\varphi + \alpha) \\ l' \cos(\varphi + \alpha) \end{bmatrix}$	$\nabla J_{12} = \begin{bmatrix} -e \cos \varphi \\ -e \sin \varphi \end{bmatrix}$	$\nabla J_{12} = \begin{bmatrix} e \cos \varphi - s \sin \varphi & \cos \varphi \\ e \sin \varphi + s \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix}$
$\nabla \dot{J}$	$\nabla \dot{J}_{12} = \begin{bmatrix} -l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix}$ $\nabla \dot{J}_{13} = \begin{bmatrix} -l' \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) \\ -l' \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha) \end{bmatrix}$	$\nabla \dot{J}_{12} = \begin{bmatrix} e \dot{\varphi} \sin \varphi \\ -e \dot{\varphi} \cos \varphi \end{bmatrix}$	$\nabla \dot{J}_{12} = \begin{bmatrix} -e \dot{\varphi} \sin \varphi - s \dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi & -\dot{\varphi} \sin \varphi \\ e \dot{\varphi} \cos \varphi - s \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \varphi & \dot{\varphi} \cos \varphi \end{bmatrix}$

1.2.2 构件元特点

(1) 构件元与构件本身的形态尺寸相关。

(2) 构件元与矢量经过的路径相关。例如, 对于 RRR 构件, 三条边都可能成为封闭环中的一个矢量, 封闭环经过不同的边, 构件贡献不同的构件元。表 1 中列出了其中两个路径的构件元。另外, 矢量是有方向的, 因而构件元也与方向有关。方向相反

的构件元互为负数, 如  $\nabla J_{12} = -\nabla J_{21}$ 。以下讨论中, 有时在构件元上加注下标表示路径, 加注上标表示构件代号。如:  $\nabla J_{32}^5$  表示构件 5 中路径为 3→2 的雅可比元。但若不指明路径时, 一般用一个字母或数字下标表示构件代号。

(3) 构件元与矢量经过的构件类型相关。如, 由于滑块与导路之间共用同一个位移变量, 所以将

组成移动副的两个移动副元素区分为导路型(被包容元素)和滑块型(包容元素),并规定移动副元素是导路型时定义该移动副元素的位移参数,而对滑块型移动副元素则不定义位移参数。表 1 中的 RP1 构件并没有在构件元中考虑其移动副的位移参数,但 RP2 构件中则考虑了移动副的位移参数  $s$ 。

(4) 雅可比元和雅可比速度元都是 2 行  $C$  列的矩阵,列与代表构件运动特性参数的拉氏坐标(即构件变量)对应。不同类型构件的变量数  $C$  不同,且  $C = r + p_1$ 。 $r$  代表是否旋转,当构件含有旋转运动时, $r = 1$ ,否则  $r = 0$ ;  $p_1$  指封闭环经过构件所含的导路型移动副元素的个数。所以,同样一个构件,在不同封闭环中可能具有不同的  $C$  值。另外,含移动副的构件元与构件运动状态是否可以旋转运动相关。在表 1 中,一旦 RP1 和 RP2 构件移动副元素与机架的移动副元素相连接,则雅可比元和雅可比速度元将不包含旋转项( $r = 0$ ),甚至完全不存在雅可比元和雅可比速度元。

(5) 若两构件只按回转副相连,则两构件的构件元相互独立;若两构件用移动副相连,则这两构件的位置角相等或仅相差一个相位角,而两构件的角速度、角加速度相等,但旋转变量仅可以取一个。因而,按移动副相连的构件(有可能多个构件用移动副串联或并联在一起)必须选取一个构件作父构件,取其旋转参数作为基本参数,而其他按移动副与其相连构件的  $\nabla J_i$ 、 $\nabla \dot{J}_i$  的旋转参数部分对应的列要加入到与父构件的旋转参数部分对应的列。也就是说,将雅可比元与雅可比速度元组合成整个机构的雅可比矩阵及雅可比速度矩阵时,是按变量位置按列相叠加,而不是按构件相叠加。

### 1.2.3 构件有效因子矩阵

对于一个给定的机构,为了用构件元组合成唯一的  $J$ 、 $\dot{J}$ 、 $B$ 、 $\dot{B}$ ,必须先规定整个机构的已知和未知变量的顺序,将各构件元的各列按其变量对应的位置(也就是有效位置)加入到  $J$ 、 $\dot{J}$ 、 $B$ 、 $\dot{B}$  相应列中。为了便于矩阵计算,引入构件未知变量有效因子矩阵  $U_i$  和已知变量有效因子矩阵  $K_i$

$$U_i = [u_{km}]_{C \times TU} \quad (k = 1, 2, \dots, C; m = 1, 2, \dots, TU) \quad (9)$$

$$K_i = [k_{jf}]_{C \times TK} \quad (j = 1, 2, \dots, C; f = 1, 2, \dots, TK) \quad (10)$$

式中  $TU$  —— 整个机构的未知变量数

$TK$  —— 整个机构的已知变量数

式中,当封闭环经过构件  $i$  且构件的第  $k$  个变量对应机构未知变量顺序的第  $m$  个变量时, $u_{km} = 1$ ,

其余时  $u_{km} = 0$ ; 当封闭环经过构件  $i$  且构件的第  $j$  个变量对应机构已知变量顺序的第  $f$  个变量时, $k_{jf} = 1$ ,其余时  $k_{jf} = 0$ 。

按上述定义, $U_i$  和  $K_i$  中的每一行只有一个元素为 1,其余元素都为零。而且, $U_i$ 、 $K_i$  与封闭环相关,如果某个封闭环不经过构件  $i$ ,则  $U_i$  和  $K_i$  不存在,或说  $U_i$  和  $K_i$  两矩阵中的所有元素为零。

### 1.2.4 机构雅可比矩阵与雅可比速度矩阵

可按以下公式求机构某个封闭环  $l$  的雅可比子阵和雅可比速度子阵

$$\begin{cases} J_l = \sum_{i=1}^n \nabla J_i U_i \\ B_l = \sum_{i=1}^n \nabla J_i K_i \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \dot{J}_l = \sum_{i=1}^n \nabla \dot{J}_i U_i \\ \dot{B}_l = \sum_{i=1}^n \nabla \dot{J}_i K_i \end{cases} \quad (12)$$

式中  $n$  —— 机构总构件数

而整个机构的雅可比矩阵和雅可比速度矩阵为

$$\begin{cases} J = [J_1 \ J_2 \ \dots \ J_L]^T \\ B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_L]^T \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \dot{J} = [\dot{J}_1 \ \dot{J}_2 \ \dots \ \dot{J}_L]^T \\ \dot{B} = [\dot{B}_1 \ \dot{B}_2 \ \dots \ \dot{B}_L]^T \end{cases} \quad (14)$$

同样,式(1)可以写成

$$A = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_L]^T = [f_1 \ \dots \ f_i \ \dots \ f_{2L}]^T = 0 \quad (15)$$

其中

$$A_l = \sum_{i=1}^n \nabla A_i$$

式中  $A_l$  —— 封闭环  $l$  的矢量和矩阵

### 1.2.5 求解示例

用构件元求图 2 所示六杆机构的  $J$ 、 $\dot{J}$ 、 $B$ 、 $\dot{B}$ 。

选取该机构的独立回路为:( $a, b, c, d$ )和( $d, e, f, g$ )。假设构件 1 是主动件,因而, $TU = 4$ , $TK = 1$ ,所有构件的  $C = 1$ 。 $q = [\varphi_1]$ , $\varphi = [\varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_5 \ s]^T$ , $\varphi$ 、 $q$  中各变量的顺序构成了整个构件已知和未知变量的顺序,利用有效因子  $U$ 、 $K$ (下面省略  $U = 0$ 、 $K = 0$  的情况)就可以将各构件元按这个顺序加入到  $J$ 、 $\dot{J}$ 、 $B$ 、 $\dot{B}$  对应的列中。

$$\nabla J_{ab}^1 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \varphi_1 \\ l_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \quad \nabla \dot{J}_{ab}^1 = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla J_{bc}^2 = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \varphi_2 \\ l_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad \nabla \dot{J}_{bc}^2 = \begin{bmatrix} -l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \\ -l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix}$$

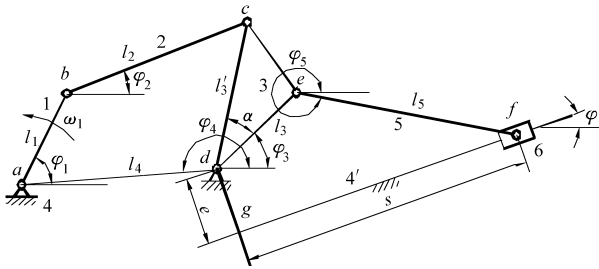


图2 六杆机构

Fig. 2 Six-bar linkage

$$\nabla \mathbf{J}_{cd}^3 = \begin{bmatrix} l'_3 \sin(\varphi_3 + \alpha) \\ -l'_3 \cos(\varphi_3 + \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \dot{\mathbf{J}}_{cd}^3 = \begin{bmatrix} l'_3 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 + \alpha) \\ l'_3 \dot{\varphi}_3 \sin(\varphi_3 + \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \mathbf{J}_{de}^3 = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \varphi_3 \\ l_3 \cos \varphi_3 \end{bmatrix} \quad \nabla \dot{\mathbf{J}}_{de}^3 = \begin{bmatrix} -l_3 \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 \\ -l_3 \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \mathbf{J}_{ef}^5 = \begin{bmatrix} -l_5 \sin \varphi_5 \\ l_5 \cos \varphi_5 \end{bmatrix} \quad \nabla \dot{\mathbf{J}}_{ef}^5 = \begin{bmatrix} -l_5 \dot{\varphi}_5 \cos \varphi_5 \\ -l_5 \dot{\varphi}_5 \sin \varphi_5 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \mathbf{J}_{f-g-d}^{4'} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad \nabla \dot{\mathbf{J}}_{f-g-d}^{4'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{U}_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{U}_5 = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad \mathbf{U}_{4'} = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad \mathbf{K}_1 = [1]$$

所以,由式(13)、(14),可以组成整个机构的

$\mathbf{J}$ 、 $\dot{\mathbf{J}}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\dot{\mathbf{B}}$ 为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \varphi_2 & l'_3 \sin(\varphi_3 + \alpha) & 0 & 0 \\ l_2 \cos \varphi_2 & -l'_3 \cos(\varphi_3 + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -l_3 \sin \varphi_3 & -l_5 \sin \varphi_5 & -\cos \varphi \\ 0 & l_3 \cos \varphi_3 & l_5 \cos \varphi_5 & -\sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} -l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 & l'_3 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 + \alpha) & 0 & 0 \\ -l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 & l'_3 \dot{\varphi}_3 \sin(\varphi_3 + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -l_3 \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 & -l_5 \dot{\varphi}_5 \cos \varphi_5 & 0 \\ 0 & -l_3 \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 & -l_5 \dot{\varphi}_5 \sin \varphi_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \varphi_1 \\ l_1 \cos \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可见,构件元是组成运动分析方程的基本单元,且与构件一一对应,可直接列出雅可比矩阵。同时,它们与表示构件外形的构件图元一起,容易编写出计算机构件类,即具有强模块性。所以,用本方法进行运动分析,理论清晰、模块性强、通用性好。

## 2 计算机化处理

### 2.1 机构类

机构类由构件类、运动类、节点类和环类组成。

#### 2.1.1 构件类

构件类记录构件特征信息、绘制构件图元,并提供根据封闭环矢量路径自动生成构件元  $\nabla \mathbf{A}$ 、 $\nabla \mathbf{J}$ 、 $\nabla \dot{\mathbf{J}}$ 等功能。构件类可以按构件类型进一步细分成构件子类(外形见图1),由这些构件子类基本可绘制和分析大部分实际应用的机构。

用构件实例链表表示机构中各构件类的实例集

$$\mathbf{B}_L = \{ \text{Bar}_i \} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

式中  $\text{Bar}_i$ ——构件类实例

$N$ ——绘制的构件实例总数,一般不等于机构构件数  $n$

一个构件在构件实例链表中的顺序就可以计算出这个构件的变量在整个机构的已知和未知变量中的顺序,从而计算出构件有效因子矩阵  $\mathbf{U}_i$  和  $\mathbf{K}_i$ 。

#### 2.1.2 运动类

运动类记录运动的定义,包括运动所作用的构件、运动类型(旋转运动、直线运动)、运动规律(等速、加速度正弦、加速度余弦、3-4-5多项式运动或文件输入等)、运动作用点、运动作用时间、运动范围和分隔点数等信息。由作用的运动类实例组成了运动实例集  $\mathbf{M}_L$ 。

#### 2.1.3 节点类

即组成机构的各种运动副类型,含回转副类、移动副类。包含了运动副代号、与运动副相连的所有构件实例代号链表、是否与机架相连等信息。

用运动副链表表示机构中的运动副集

$$\mathbf{J}_L = \{ \mathbf{J}_i \} \quad (i = 1, 2, \dots, p')$$

式中  $\mathbf{J}_i$ ——节点实例  $p'$ ——节点数

#### 2.1.4 环类

用环类记录封闭环信息。一个封闭环  $\text{Loop}_l$  类主要包含了该封闭环中的矢量组成信息

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{V}_1 \ \dots \ \mathbf{V}_i \ \dots \ \mathbf{V}_k \}$$

式中  $\mathbf{V}_i$ ——封闭环第  $i$  个矢量的矢量路径信息

$\mathbf{V}_i$  记录了从一个节点代号指向另一个节点代号的矢量信息。机构的封闭环表  $\mathbf{L}_L$  表示机构的独立封闭环集

$$\mathbf{L}_L = \{ \text{Loop}_l \} \quad (l = 1, 2, \dots, L)$$

式中  $\text{Loop}_l$ ——第  $l$  个封闭环信息实例

### 2.2 完全关联矩阵

用完全关联矩阵表示机构中构件与运动副的关系,形式为

$$\mathbf{M} = [m_{ij}]_{n \times p}$$

式中  $p$ ——运动副数

当第  $i$  构件与第  $i$  副有关联时  $m_{ij} = \pm 1$ , 其余时  $m_{ij} = 0$ ; 当回路从第  $j$  个副进入第  $i$  构件时  $m_{ij}$  取正, 若从第  $j$  个副离开第  $i$  构件时  $m_{ij}$  取负。

根据运动副链表  $J_L$ 、构件实例链表  $B_L$  可创建关联矩阵  $M$ 。 $M$  的列对应运动副, 行代表构件, 机架位于  $M$  的最后一行。

当存在复合铰链时,  $p' \neq p$ 。另外, 采用“运动副零错位”法<sup>[11]</sup>可以方便地自动识别含复合铰链的回路。它将由  $m$  个构件汇成的复合铰链点拆成相互距离为零的  $m - 1$  个回转副, 这样使一个运动副只连接两个构件。衍生出来的运动副代号用增加小数点位数表示。如图 3a 所示的运动副 3 是复合铰链点, 可以将其看成是图 3b 的 3 个运动副 (标号为 3、3.001、3.002) 相互距离等于零的特例。这样处理后,  $M$  的列对应的运动副代号与运动副链表  $J_L$  不是直接对应的。所以, 新增一个记录运动副代号的向量矩阵

$$J_N = [n_i]_{1 \times p} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

式中  $n_i$ ——运动副代号

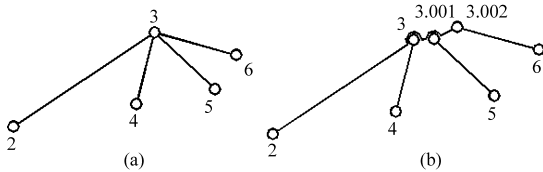


图 3 复合铰链零错位

Fig. 3 Offsetting representation of the multiple joint

(a) 复合铰链点 (b) 相互零距离的 3 个运动副

### 3 计算机自动运动建模与分析

开环分析比较简单, 本文方法的关键是识别出机构的独立封闭环, 根据封闭环的矢量构成进行运动学建模。

#### 3.1 自动识别机构独立封闭环

当在屏幕上以可视化的方式绘制构件实例时, 就自动建立相应的构件子类的实例  $Bar_i$  以及构件实例链表  $B_L$ 。可以根据各构件实例的相互连接位置和运动副类型, 自动检查各运动副是否正确相连, 并建立各个运动副实例  $Jt_i$  和运动副链表  $J_L$ , 然后找出机构的  $L = p - n + 1$  个独立封闭环。

利用运动副零错位的计算机自动识别机构独立封闭环及选出最优独立回路的步骤见文献[11]。

根据  $J_N$  将运动副代号整数部分相同的运动副 (被错开的复合铰链点) 重新合并, 建立封闭环实例  $Loop_i$ , 并建立机构的封闭环表  $L_L$ 。

#### 3.2 机构自动运动分析

运动分析前先将已知构件运动按时间和分隔点

数离散化, 然后根据图 4 的流程完成对时间  $t$  的运动分析。建立封闭环雅可比子阵  $J_i$ 、 $B_i$  和雅可比速度子阵  $\dot{J}_i$ 、 $\dot{B}_i$  的方法是: 根据  $Loop_i$  中的各矢量的路径信息  $V_i$  所对应的构件, 调用相应的构件类就可生成构件元  $\nabla A_i$ 、 $\nabla J_i$ 、 $\nabla \dot{J}_i$ 。根据运动实例集  $M_L$  以及矢量中的构件  $i$  在实例链表  $B_L$  中的顺序就可以计算出这个构件的变量在整个机构的已知和未知变量中的顺序, 从而决定出式(9)、(10)的构件有效因子矩阵  $U_i$  和  $K_i$ , 再由式(11)、(12)建立封闭环  $Loop_i$  的  $J_i$ 、 $\dot{J}_i$ 、 $B_i$ 、 $\dot{B}_i$ 。

改变时间, 就可求出指定时间范围的全部解, 或因无解、奇异位置退出。将保存的机构位置参数按时间顺序赋值到各相应构件, 再根据构件的相互连接关系求出并调整构件的基点坐标, 则可实现运动

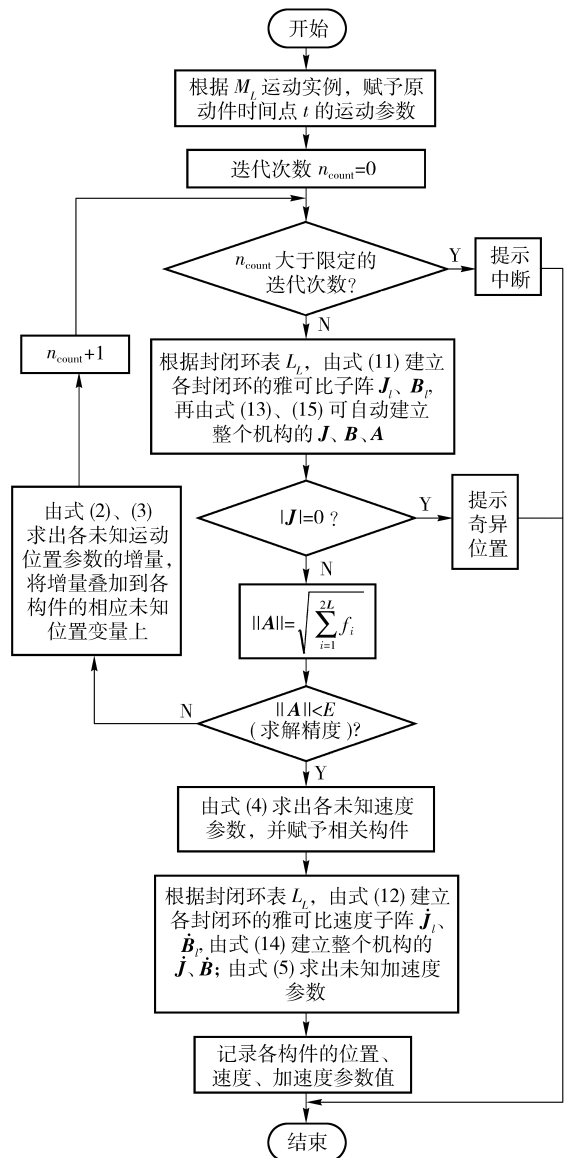


图 4 机构自动运动分析流程图

Fig. 4 Flow diagram for the automatic kinematic analysis of mechanisms

仿真。

## 4 应用实例

根据上述理论,设计了一个通用的平面连杆机构运动分析程序——MCAD<sup>[9]</sup>,系统界面如图5所示。

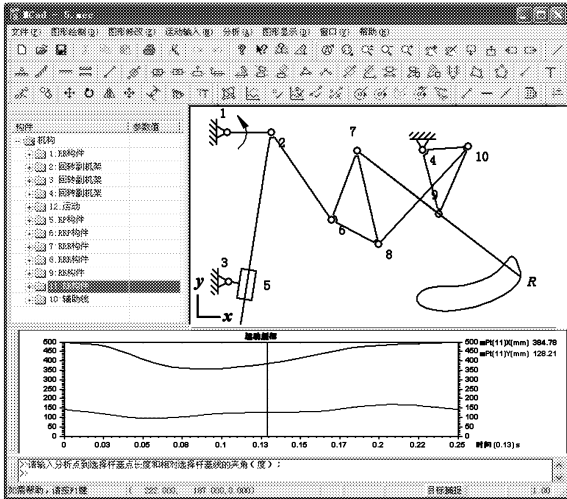


图5 八杆机构简图及其R点轨迹

Fig.5 Kinematic diagram of an eight-bar mechanism and the path of the analyzed point R on it

以文献[12]中的八杆机构(IV级机构)为例,用MCAD程序进行运动分析。直接在系统提供的界面中绘制该机构图,如图5中的绘图区所示。系统分析出该机构具有3个独立的封闭环,分别是:1-2-5-3;1-2-6-7-9-4;1-2-6-8-10-4。图5中显示了分析点R的轨迹,图6是R点的x、y方向速度线图与加速度线图。分析结果与文献[12]相同。

经对图1的构件类型绘制的机构进行大量的结构分析与运动分析测试表明,本方法通用性非常好。另外,通过细分步长,可以确定出机构的奇异位置。

## 参考文献

- 曹惟庆. 连杆机构的分析与综合[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2002.
- 沈惠平, 杨延力. 任意平面连杆机构运动分析通用程序 KAPL(SOC)的研制及其应用[J]. 机械科学与技术, 1995(2): 59~64.  
Shen Huiping, Yang Tingli. Development and application of general program KAPL(SOC) for kinematic analysis of arbitrary planar linkages[J]. Mechanical Science and Technology, 1995(2): 59~64. (in Chinese)
- Denavit J, Hartenberg R S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices[J]. Journal of Applied Mechanics, 1955, 22(2): 215~221.
- Sheth Pn, Uicker Jr Jj. Generalized symbolic notation for mechanisms[J]. ASME Journal of Engineering for Industry, Series B, 1971, 93(1): 102~112.
- Hiller M, Woernle C. Unified representation of spatial displacements[J]. Mechanism and Machine Theory, 1984, 19(6): 477~486.

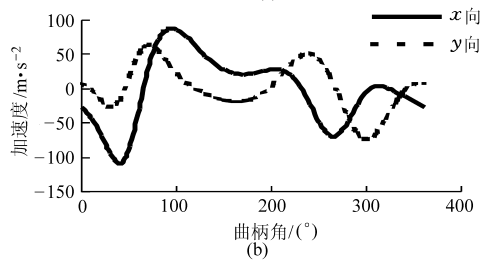
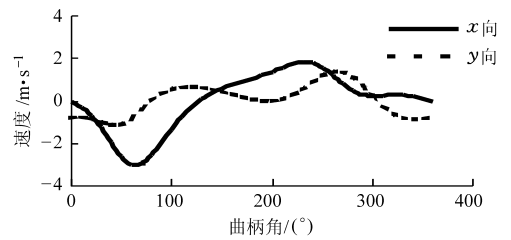


图6 R点的x、y向速度和加速度值

Fig.6 Velocity and acceleration about analyzed point R  
(a) 速度 (b) 加速度

## 5 结论

(1)提出了以机构的最基本单元——构件,作为运动方程建模单元的构件元法。用该法建模的模块与实际实体构件对应,符合习惯,模块性强且概念清晰,而且利用计算机进行单元识别方便简单。

(2)这些构件元可以非常方便地结合到构件的绘图程序中;通过引入有效因子,这些构件元也可以很方便地组合成整个机构的雅可比矩阵和雅可比速度矩阵。

(3)对含2、3个回转副或移动副(任意组合)的全部构件、含4个和5个回转副的构件、有源杆(含汽缸-活塞移动副)、末杆(含一个回转副的机械手)等机构进行程序设计及测试表明,本方法可以随意在屏幕上绘制机构并分析,通用性、可视化等都非常好,适用于含有或不含有复合铰链、含有闭环或开环的单一自由度或多自由度复杂机构。

## 参 考 文 献

- 1 王震生. 硅片表面磨削技术的应用研究[J]. 中国电子科学研究院学报, 2008, 3(2): 212 ~ 215.  
Wang Zhensheng. Study on the application in surface grinding technology of silicon wafers[J]. Journal of China Academy of Electronics and Information Technology, 2008, 3(2): 212 ~ 215. (in Chinese)
- 2 郭东明, 康仁科, 苏建修, 等. 超大规模集成电路制造中硅片平坦化技术的未来发展[J]. 机械工程学报, 2003, 39(10): 100 ~ 105.  
Guo Dongming, Kang Renke, Su Jianxiu, et al. Future development on wafer planarization technology in ULSI fabrication [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(10): 100 ~ 105. (in Chinese)
- 3 Chen J M, Fang Y C. Hydrodynamic characteristics of the thin fluid film in chemical- mechanical polishing [J]. IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing, 2002, 15(1): 39 ~ 44
- 4 陈杨, 陈建清, 陈志刚. 超光滑表面抛光技术[J]. 江苏大学学报: 自然科学版, 2003, 24(5): 55 ~ 59  
Chen Yang, Chen Jianqing, Chen Zhigang. Ultra-smooth surface polishing techniques[J]. Journal of Jiangsu University: Natural Science Edition, 2003, 24(5): 55 ~ 59. (in Chinese)
- 5 Thoe T B, Aspinwall D K, Wise M L H. Review on ultrasonic machining[J]. International Journal of Machine Tools Manufacture, 1998, 38(4): 239 ~ 255.
- 6 Kim J D, Choi I H. Micro surface phenomenon of ductile cutting in the ultrasonic vibration cutting of optical plastics[J]. Journal of Materials Processing Technology, 1997, 68(1): 89 ~ 98.
- 7 曹凤国, 张勤俭. 超声加工技术[M]. 北京: 化学工业出版社, 2004.
- 8 Hocheng H, Kuo K L. Fundamental study of ultrasonic polishing of mold steel[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2002, 42(1): 7 ~ 13.
- 9 马春翔, 胡德金. 超声波椭圆振动切削技术[J]. 机械工程学报, 2003, 39(12): 67 ~ 70.  
Ma Chunxiang, Hu Dejin. Ultrasonic elliptical vibration cutting[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(12): 67 ~ 70. (in Chinese)
- 10 Brinksmeier E, Gläbe R. Elliptical vibration cutting of steel with diamond tools[C] // Proc. of 14th Annual ASPE Meeting, Monterey, USA, 1999: 163 ~ 166.
- 11 Yang W P, Wu Y B, Kato M S. A new approach to silicon wafer edge treatment by ultrasonically assisted polishing(UAP) [J]. International Journal of Materials and Product Technology, 2008, 31(2 ~ 4): 159 ~ 175.
- 12 谢会东, 王晓青, 沈光球. 晶体的超精密抛光[J]. 人工晶体学报, 2004, 33(6): 1 035 ~ 1 040.  
Xie Huidong, Wang Xiaoqing, Shen Guangqiu. Superpolishing of crystals [J]. Journal of Synthetic Crystals, 2004, 33(6): 1 035 ~ 1 040. (in Chinese)
- 13 見城尚志, 指田年生. 超音波モータ入門[M]. 東京: 総合電子出版社, 1991.  
Kejo T, Sashida T. Primer of ultrasonic motor[M]. Tokyo: Sougoudenshi Publication, 1991. (in Japanese)

~~~~~

(上接第 220 页)

- 6 Martinez J R, Duffy J. Orthogonal space and screw system[J]. Mechanism and Machine Theory, 1992, 27 (4): 451 ~ 458.
- 7 Benedict C E, Tesar D. Model formulation of complex mechanisms with multiple inputs: part I—geometry[J]. ASME Trans. Journal of Mechanical Design, 1978, 100(4): 747 ~ 754.
- 8 Aviles R, Goizalde Ajuria M B, Victoria H M, et al. Procedure based on finite elements for the solution of nonlinear problems in the kinematic analysis of mechanisms[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1996, 22(4): 305 ~ 327.
- 9 集美大学. 机构可视化运动分析系统[简称 MCAD] V2.0, 计算机软件著作权登记证书, 编号: 软著登字第 125408 号, 登记号: 2008SR38229, [CP]. 中华人民共和国国家版权局, 2008-12-29.
- 10 王成志, 黄凯旋, 陈飞燕. 机构运动简图绘图系统的基于面向对象技术的图元类设计[J]. 机械设计, 2003, 20(4): 43 ~ 46.  
Wang Chengzhi, Huang Kaixuan, Chen Feiyan. Graphic element category design based on object-oriented technique in a plotting system of mechanism's motion diagram[J]. Journal of Machine Design, 2003, 20(4): 43 ~ 46. (in Chinese)
- 11 王成志. 含复铰连杆机构的拓扑表示与其回路自动分析[J]. 农业机械学报, 2009, 40(2): 199 ~ 203.  
Wang Chengzhi. Topological representation and automatic kinematic loop analysis for linkages with multiple joints[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(2): 199 ~ 203. (in Chinese)
- 12 梁崇高, 阮平生. 连杆机构的计算机辅助设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1986.