

基于最小信息损失准则的降阶 LQG 控制器设计

张 索, 章 辉

ZHANG Suo, ZHANG Hui

浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 杭州 310027

State Key Lab of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

E-mail: szhang@iipc.zju.edu.cn

ZHANG Suo, ZHANG Hui. Reduced-order LQG controller design based on principle of minimum information loss. *Computer Engineering and Applications*, 2010, 46(9): 65-70.

Abstract: The issue of designing reduced-order LQG controller is considered from the view of information theory. By exploring the description of the internal state information of the system, two approaches based on cross-Gramian matrix by the principle of minimum information loss are proposed to design LQG reduced-order controller. The performances of the reduced-order LQG closed-loop systems are compared with both the high-order LQG closed-loop and the low-order closed-loop system obtained by the minimum K-L information distance controller reduction method. As the numerical simulation shows the reduced-order closed-loop systems obtained by these two approaches have satisfied performances which prove the efficiency of the controller reduction methods.

Key words: controller reduction; information theory; cross-Gramian; minimum information loss; Loop Quantum Gravity (LQG) optimal control

摘 要: 从信息论的角度出发, 研究了 LQG 控制器降阶问题。在考察系统内部状态信息描述的基础上, 提出了两种基于交叉格莱姆矩阵最小信息损失的 LQG 控制器降阶方法。将由这两种方法得出的降阶 LQG 控制器分别与全阶 LQG 控制器、基于最小 K-L 信息距离的降阶控制器进行仿真对比研究, 比较各闭环系统的控制性能。仿真结果表明, 提出的降阶控制器能较好地逼近全阶控制器实现闭环系统性能。

关键词: 控制器降阶; 信息论; 交叉格莱姆矩阵; 最小信息损失; 圈量子引力 (LQG) 最优控制

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.09.020 文章编号: 1002-8331(2010)09-0065-06 文献标识码: A 中图分类号: TP273.5

1 引言

在过去的几十年中, 控制器降阶的重大影响和用途逐渐受到人们的广泛关注和重视, 主要原因是一些控制方案如线性二次型高斯 (LQG) 方法和 H_2 方法设计得到的控制器阶次大致等同于受控对象阶次^[1]。随着阶次的升高, 控制器在物理上就越难以实现, 控制器降阶是解决这一问题的很好的方案。控制器降阶的目的, 一方面是使低阶闭环系统在能尽量保持高阶闭环系统性能的同时, 降低高阶控制器带来的软硬件及计算复杂度; 另一方面, 对高阶闭环系统降阶的研究还有利于深入了解系统内部的动态结构属性。

控制器降阶有多种方法, 如 LQG 平衡截断方法^[2], Hankel 范数逼近法^[3], q-协方差近似法^[3]。

将采用基于交叉格莱姆矩阵^[4-5]的最小信息损失方法来考察控制器降阶问题。该方法已被运用到动态系统的模型降阶中^[6-7], 它能兼顾对象的能控性信息和能观性信息的损失, 克服了最小信息损失^[8]的不足, 从而减少了模型截断误差。将控制器独立出来看作对象模型, 尝试用该方法对控制器进行降阶。

2 基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失方法

在过去几年中已经提出了一种基于信息论的模型降阶方法, 如最小 KL 信息距离^[8]方法, 最小信息损失 MIL^[9]方法, 改进的最小信息损失 RMIL^[10]方法以及基于交叉格莱姆矩阵 (CGMIL) 的最小信息损失方法^[6-7]。后三者的共同点是基于系统状态的最小信息损失原则达到降阶目的。

基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失方法适用于如下单入单出的线性时不变最小实现的随机系统, 这里以连续系统为例:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $w(t)$ 为零均值的高斯白噪声向量, 且 $w(t)$ 和 $x(0)$ 不相关。系统的降阶模型为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r w(t) \\ y(t) &= C_r x_r(t) \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $x_r(t) \in R^l$, $l < n$, A_r, B_r, C_r 为具有相应维数的矩阵。系统信息由系统状态向量体现。首先定义原模型式 (1) 和降阶模型式

基金项目: 国家自然科学基金 (the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60674028)。

作者简介: 张索 (1985-), 女, 硕士生, 主要研究领域为控制系统的信息论方法; 章辉 (1967-), 男, 副教授, 研究方向为随机系统、鲁棒控制、控制系统的信息论方法等。

收稿日期: 2009-09-21 修回日期: 2009-11-05

(2)的稳态状态信息:

$$H(x) = \frac{n}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \text{Indet} \mathbf{II} \quad (3)$$

$$H(x_r) = \frac{l}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \text{Indet} \mathbf{II}_r \quad (4)$$

对于连续系统来说,原系统稳态状态协方差矩阵 \mathbf{II} 和降阶系统稳态状态协方差矩阵 \mathbf{II}_r 分别是下列 Lyapunov 方程的唯一正定解:

$$\mathbf{A}\mathbf{II} + \mathbf{II}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_r \mathbf{II}_r + \mathbf{II}_r \mathbf{A}_r^T + \mathbf{B}_r \mathbf{B}_r^T = 0 \quad (6)$$

由于

$$x_r(t) = \mathbf{A}x(t) \quad (7)$$

可得:

$$\mathbf{II}_r = \mathbf{A}\mathbf{II}\mathbf{A}^T \quad (8)$$

对于连续系统来说,系统的能控性格莱姆矩阵和能观性格莱姆矩阵分别满足下列 Lyapunov 方程:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0 \quad (10)$$

对照式(5),式(9)和式(6),式(10),系统的稳态状态协方差矩阵 \mathbf{II} 实质上就是系统的能控性矩阵 \mathbf{P} ,而对偶系统的稳态状态协方差矩阵即系统的能观性矩阵 \mathbf{Q} ,于是,可以定义能控性信息 $I(\mathbf{P})$ 和能观性信息 $I(\mathbf{Q})$:

$$I(\mathbf{P}) = H(x) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e) + \frac{n}{2} \text{Indet} \mathbf{P} \quad (11)$$

$$I(\mathbf{Q}) = H(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e) + \frac{n}{2} \text{Indet} \mathbf{Q} \quad (12)$$

为了克服 MIL 方法^[9]和 RMIL 方法^[10]的局限性,基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失方法定义了系统的“交叉格莱姆信息”^[16-17],并改进了最小信息损失模型降阶算法。

对于渐进稳定连续时不变单入单出最小实现系统而言,系统的交叉格莱姆矩阵($\mathbf{G}_{\text{cross}}$)^[14-15]定义为:

$$\mathbf{G}_{\text{cross}} = \int_0^{\infty} (e^{A^T t} b)(e^{A t} c^T)^T dt = \int_0^{\infty} e^{A^T t} b c e^{A t} dt \quad (13)$$

可由 Sylvester 方程(14)求出:

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_{\text{cross}} + \mathbf{G}_{\text{cross}}\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c} = 0 \quad (14)$$

并且,系统的交叉格莱姆矩阵 $\mathbf{G}_{\text{cross}}$ 与系统的能控性矩阵 \mathbf{P} ,能观性矩阵 \mathbf{Q} 满足下列关系:

$$\mathbf{G}_{\text{cross}} = \sqrt{\mathbf{P}\mathbf{Q}} \quad (15)$$

从式(15)可以看出: $\mathbf{G}_{\text{cross}}$ 能够共同表征系统的能控性属性和能观性属性。定义系统的交叉格莱姆信息(记为 $I(\mathbf{G}_{\text{cross}})$)为任一随机变量 $\zeta(t)$ 的稳态信息熵^[6-7]:

$$I(\mathbf{G}_{\text{cross}}) = H(\zeta) = \frac{1}{2} (I(\mathbf{P}) + I(\mathbf{Q})) = \frac{1}{2} (H(x) + H(\tilde{x})) = \frac{n}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \text{Indet} \sqrt{\mathbf{P}\mathbf{Q}} \quad (16)$$

利用线性系统理论知识由式(8)和式(15),可得降阶系统的交叉格莱姆矩阵:

$$\mathbf{G}'_{\text{cross}} = \mathbf{A}\mathbf{G}_{\text{cross}}\mathbf{A}^T \quad (17)$$

模型降阶造成的信息损失 $IL(x, x_r)$ 如式(18):

$$\Delta I(\mathbf{G}_{\text{cross}}) = I(\mathbf{G}_{\text{cross}}) - I(\mathbf{G}'_{\text{cross}}) = \frac{n-l}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} (\text{Indet} \mathbf{G}_{\text{cross}} - \text{Indet} \mathbf{A}\mathbf{G}_{\text{cross}}\mathbf{A}^T) \quad (18)$$

取 $\mathbf{G}_{\text{cross}}$ 的前 l 个最大特征值对应的特征向量构成状态集

聚矩阵 $\mathbf{A} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l]^T$, 生成降阶系统的参数矩阵:

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A}\mathbf{A}^+, \mathbf{B}_r = \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{C}_r = \mathbf{C}\mathbf{A}^+ \quad (19)$$

此时,降阶模型所包含的状态信息是最大的,也就是模型降阶所造成的信息损失最小。

3 基于交叉格莱姆矩阵的 LQG 控制器降阶方法

3.1 控制器降阶的途径:

一般来说,控制器降阶可以简单地分为三种途径^[3]:

(1)直接的方式:先定义控制器的结构,如 PID 控制器,再通过优化或其他方式用参数直接定义低阶控制器;

(2)先用高级控制策略设计高阶控制器,再运用 LQG 平衡截断^[3]等控制器降阶方法,得到低阶控制器;

(3)先用平衡截断等模型降阶方法设计低阶系统,再运用高级控制策略,设计低阶控制器。

采用第二、三种方法对控制器进行降阶。

3.2 LQG 线性二次型状态调节器

LQG 问题即线性二次型高斯随机过程控制问题,是用途最广的一类随机最优控制问题。一方面,LQG 方法中的分离原理能够把随机最优控制问题分解成最优状态估计(卡尔曼滤波)和确定性最优控制问题,并得到全局最优的结果。另一方面,利用 LQG 方法设计出的闭环回路(除去极少数情况下)是渐进稳定的^[11]。这两种特性是采用 LQG 问题做控制器降阶的主要原因。

针对 LQG 线性二次型状态调节器问题提出了两种基于交叉格莱姆矩阵的 LQG 控制器降阶方案,如下所示为 LQG 闭环回路:

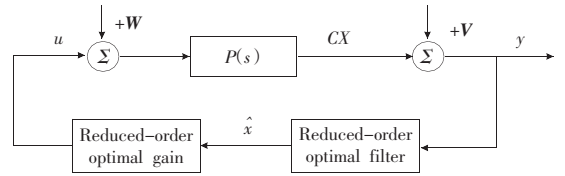


图1 LQG 随机最优输出反馈调节器闭环回路

n 阶 LQG 线性二次型高斯问题描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}(u(t) + w(t)), x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + v(t) \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $x(t) \in \mathbf{R}^n, u(t) \in \mathbf{R}^m$, 无约束; $y(t) \in \mathbf{R}^q, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{q \times n}, w(t), v(t)$ 为零均值的高斯白噪声向量,且 $w(t), v(t)$ 和 $x(t_0)$ 不相关。 \mathbf{W}, \mathbf{V} 为相应的高斯白噪声协方差阵。这里以稳定的连续系统为例。

线性二次型状态调节器最优控制问题的目的在于,当系统受扰偏离原平衡状态时,要求产生一最优控制向量 $u^*(t)$,使系统状态 $x(t)$ 恢复到原零平衡状态附近,并使性能指标式(21)

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \{ x^T(t) \mathbf{Q} x(t) + u^T(t) \mathbf{R} u(t) \} \quad (21)$$

达到最小,其中, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ 为自定义的非负定对称加权矩阵,表示系统状态偏离原平衡状态时的误差度量矩阵, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ 为自定义的正定对称加权矩阵,表示系统在整个控制过程中所消耗的控制能量^[12]。根据分离原则,最优控制器分为最优状态估计器(卡尔曼滤波)和最优反馈增益:

最优状态估计器表示如下:

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}y \quad (22)$$

其中, $A_c=A-BK-LC, B_c=L$ 。

最优状态反馈增益表示如下:

$$u=C_c \hat{x} \tag{23}$$

其中, $C_c=-K$ 。 K, L 分别为最优状态反馈增益和最优预估增益。分别表示为:

$$L=SC^T V^{-1} \tag{24}$$

$$K=R^{-1} B^T P \tag{25}$$

其中 S, P 分别由下列对偶的代数 Riccati 方程得到:

$$AS+SA^T-SC^T V^{-1} CS+W=0 \tag{26}$$

其中, $S \geq 0$ 。 滤波 Riccati 方程如式(27):

$$PA+A^T P-PBR^{-1} B^T P+Q=0 \tag{27}$$

其中, $P(0)=E[x(0)x^T(0)], P \geq 0$ 。

整个闭环系统状态方程描述如下:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ B_c v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ Lv \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$y=[C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + v$$

3.3 降阶控制器设计方案1

先用基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失方法^[6-7]对原全阶对象进行模型降阶,再针对降阶模型设计 LQG 控制器。最后把该降阶 LQG 控制器与原全阶对象连接,形成降阶控制器闭环系统。假设原 n 阶线性时不变随机模型如下所示:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bw(t), x(t_0)=x_0 \tag{29}$$

$$y(t)=Cx(t)+v(t)$$

用基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失降阶方法对该模型降阶,所得 r 阶模型如下所示:

$$\dot{\hat{x}}_r(t)=A_r \hat{x}_r(t)+B_r w(t) \tag{30}$$

$$y_{r1}(t)=C_{r1} \hat{x}_r(t)+v(t)$$

其中, $A_r=\Lambda_c A_c^+, B_r=\Lambda_c B, C_{r1}=C \Lambda_c^+, \Lambda_r=[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r]^T$ 为 G_{cross} 矩阵前 r 个特征值对应的特征向量形成的集聚矩阵。对该 r 阶对象模型设计 r 阶 LQG 控制器 R_{r1} :

r 阶最优滤波器如式(31):

$$\dot{\hat{x}}_r=A_c \hat{x}_r+B_{c1} y \tag{31}$$

其中, $A_{c1}=A_{c1}-B_{c1} K_{r1}-L_{r1} C_{r1}, B_{c1}=L_{r1}$ 。 r 阶最优状态反馈如式(32):

$$u_{r1}=C_{c1} \hat{x}_r \tag{32}$$

其中, $C_{c1}=-K_{r1}$ 。 r 阶控制器最优预估增益表示为:

$$L_{r1}=S_{r1} C_{r1}^T V^{-1}=S_{r1} (A_r^+)^T C^T V^{-1} \tag{33}$$

r 阶控制器最优反馈增益表示为:

$$K_{r1}=-R^{-1} B_{r1}^T P_{r1}=-R^{-1} A^T B^T P_{r1} \tag{34}$$

S_{r1}, P_{r1} 分别满足下列 Riccati 方程:

$$P_{r1} A_r + A_r^T P_{r1} - P_{r1} B_r R^{-1} B_r^T P_{r1} + Q = 0 \tag{35}$$

$$A_{r1} S_{r1} + S_{r1} A_{r1}^T - S_{r1} C_{r1}^T V^{-1} C_{r1} S_{r1} + W = 0 \tag{36}$$

降阶控制器状态空间表达式如下所示:

$$\dot{\hat{x}}_{r1}=A_{c1} \hat{x}_{r1} + B_{c1} y = (A_{r1} - B_{r1} K_{r1} - L_{r1} C_{r1}) \hat{x}_{r1} + L_{r1} y \tag{37}$$

$$u_{r1}=C_{c1} \hat{x}_{r1} = -K_{r1} \hat{x}_{r1}$$

将降阶后的控制器与原系统连接形成降阶控制器闭环系统 S_{r1} , 表示如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}}_{r1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BC_{c1} \\ B_{c1} C & A_{r1} + B_{r1} C_{c1} - B_{c1} C_{r1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x}_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ L_{r1} v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK_{r1} \\ L_{r1} C & A_{r1} - B_{r1} K_{r1} - L_{r1} C_{r1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x}_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ L_{r1} v \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$y_{r1}=[C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x}_{r1} \end{bmatrix} + v$$

3.4 降阶控制器设计方案 2

对原全阶对象模型设计 LQG 控制器,再把该全阶控制器独立出来看做一个单入单出的对象。用基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失方法^[6-7]降阶全阶控制器,得到 r 阶 LQG 控制器。最后把该降阶 LQG 控制器与原全阶对象连接,形成降阶控制器闭环系统。

对原阶系统 LQG 控制器式(22),式(23)利用交叉格莱姆矩阵最小信息损失^[6-7]降阶方法得到降阶控制器 R_{r2}, r 阶最优估计器如式(38):

$$\dot{\hat{x}}_{r2}=A_{c2} \hat{x}_{r2} + B_{c2} y \tag{39}$$

其中 $A_{c2}=A_c A_c^+ \Lambda_c^+ = A_c (A-BK-LC) \Lambda_c^+ = A_c A_c^+ \Lambda_c^+ - A_c B K \Lambda_c^+ - A_c L C \Lambda_c^+$

$$B_{c2}=L_{r2} = A_c L = A_c S C^T V^{-1}$$

r 阶控制增益如式(39):

$$u_{r2}=C_{c2} \hat{x}_{r2} \tag{40}$$

其中, $C_{c2}=-K_{r2}=-K \Lambda_c^+ = -R^{-1} B^T P \Lambda_c^+$, 其中 Λ_c 是控制器对象中 G_{cross} 矩阵的前 r 个最大特征值对应的特征向量构成状态集聚矩阵。降阶控制器状态空间表达式如下所示:

$$\dot{\hat{x}}_{r2}=A_{c2} \hat{x}_{r2} + B_{c2} y = (A_c A_c^+ \Lambda_c^+ - A_c B K \Lambda_c^+ - A_c L C \Lambda_c^+) \hat{x}_{r2} + A_c L y$$

$$u_{r2}=C_{c2} \hat{x}_{r2} = -K \Lambda_c^+ \hat{x}_{r2}$$

降阶控制器闭环系统 S_{r2} 表示为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}}_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BC_{c2} \\ B_{c2} C & A_c A_c^+ \Lambda_c^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x}_{r2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ B_{c2} v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \Lambda_c^+ \\ A_c L C & A_c (A-BK-LC) \Lambda_c^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x}_{r2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ A_c L v \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$y_{r2}=[C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x}_{r2} \end{bmatrix}$$

4 仿真实例

为了进一步研究最小信息损失方法在控制器降阶中的应用,分别从降阶闭环系统输出响应和降阶闭环系统 LQG 性能指标两个方面考察降阶闭环系统性能。为衡量各降阶闭环系统输出性能,定义响应均方误差如式(42)所示:

$$E_a = \frac{\int_0^T y_a^*(t) dt}{T} \tag{42}$$

* 号为 1, 2, 3, 分别表示方案 1、方案 2 及文献[8]所得降阶控制器闭环系统响应误差, T 为仿真长度。

为衡量原全阶闭环系统和降阶控制器闭环系统的近似程度,定义相对误差指标如式(43)所示:

$$E_b = \frac{\int_0^T (y(t) - y_a^*(t))^2 dt}{T} \tag{43}$$

*号意义同上。 $y(t)$ 为原全阶闭环系统响应。

另一方面,也用LQG闭环系统性能指标来考察降阶系统性能。由于平稳随机过程各态历经性,样本平均值可用相应的时间平均值表示。闭环系统的性能指标可由下式表示:

$$J_s = \frac{1}{T} \int_0^T \{x^T(t)Qx(t) + u_s^T(t)Ru_s(t)\} dt \quad (44)$$

加权矩阵 Q, R 参照参考文献,*号意义同上。

4.1 例1

考虑一个线性时不变随机系统^[11]:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + w \quad (45)$$

$$y = [1 \ 1 \ 1 \ 1]x + v$$

加权矩阵如文献[11],设为 $Q=1\ 000 \cdot I, R=1$,高斯白噪声协方差分别为 W 和 V 。最优预估增益和最优控制增益分别为:

$$L = [0.679\ 3 \quad 0.568\ 1 \quad 0.489\ 7 \quad 0.430\ 9]^T$$

$$K = [0.380\ 1 \quad 0.204\ 2 \quad 0.141\ 8 \quad 0.109\ 3]$$

分别用3.3节和3.4节两种控制器降阶方案对该闭环系统设计降阶控制器,并对降阶闭环系统进行了仿真对比。降阶的控制器阶次分别为2阶和1阶。

(1)二阶系统仿真结果

二阶控制器闭环系统的预估增益和控制增益分别为:

方案1

$$L_{r1} = [-1.026\ 7 \quad 0.113\ 1]^T, K_{r1} = [-102.149\ 5 \quad 2.376\ 3]$$

方案2

$$L_{r2} = [-1.072\ 0 \quad 0.114\ 2]^T, K_{r2} = [102.770\ 9 \quad -13.235\ 1]$$

图2(波特图):该图所示为方案1、方案2降阶闭环系统及原全阶闭环系统波特图。方案2所得降阶闭环系统波特图更接

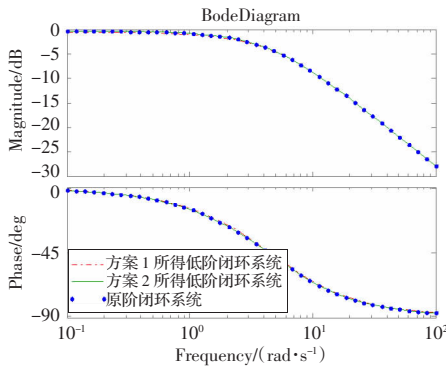


图2 各闭环系统波特图比较图

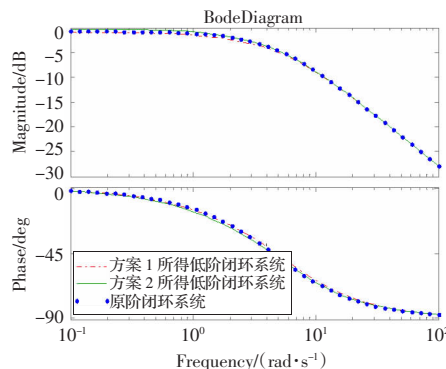


图4 各闭环系统波特图比较图

近原全阶闭环系统波特图。

图3(各闭环系统高斯白噪声响应均方误差比较图):当输入协方差为1的高斯白噪声,仿真时间 $T=1\ 000$ 时,方案1、方案2所得降阶闭环系统高斯白噪声响应均方误差。

由式(42)~(44)分别得二阶控制器闭环系统响应误差和LQG性能指标。具体性能如表1所示。

表1 二阶控制器闭环系统性能表

二阶控制器闭环系统性能	方案1	方案2
高斯白噪声响应均方误差 E_a	0.519 5	0.452 2
高斯白噪声响应相对误差 E_b	0.002 8	4.730 6E-006
性能指标 J	3.358 3	3.077 2

(2)一阶系统仿真结果

一阶控制器闭环系统的预估增益和控制增益分别为:

方案1

$$L_{r1} = -1.154\ 6, K_{r1} = -99.022\ 1$$

方案2

$$L_{r2} = -0.914\ 1, K_{r2} = 100.904\ 9$$

图4(波特图):图示说明如2阶控制器闭环系统。方案1、2所得低阶控制器闭环系统均接近原全阶闭环系统,误差很小。

图5(各闭环系统高斯白噪声响应均方误差比较图):图示说明如二阶控制器闭环系统。方案1所得一阶闭环系统响应误差略大于方案2。

说明同上。一阶控制器闭环系统性能如表2所示。

表2 一阶控制器闭环系统性能表

降阶闭环系统性能	方案1	方案2
高斯白噪声响应均方误差 E_a	0.598 2	0.530 6
高斯白噪声响应相对误差 E_b	0.006 5	0.001 3
高斯白噪声情况下LQG性能指标 J	3.589 0	3.054 2

从一、二阶控制器闭环系统性能来看,方案1和方案2所

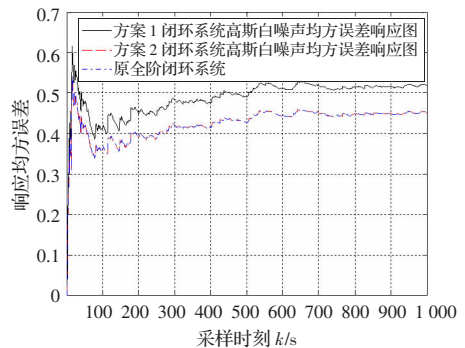


图3 各闭环系统高斯白噪声响应均方误差比较图

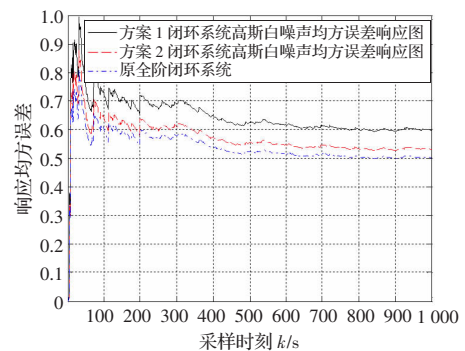


图5 一阶闭环系统高斯白噪声响应均方误差比较图

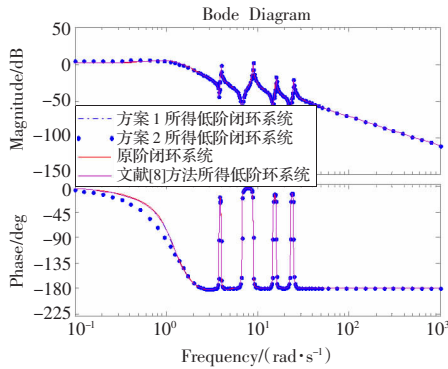


图6 闭环系统波特图比较图

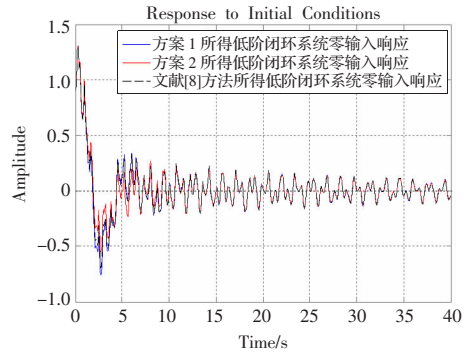


图7 二阶闭环系统零输入响应比较图

得降阶闭环系统性能和全阶闭环系统性能非常接近,差别可忽略。

4.2 例 2

考虑一个 10 阶轻阻尼横梁系统^[8],加入控制器的目的是在有高斯白噪声干扰的情况下,最小化横梁偏离点的有效值。状态空间方程如式(1)所示,参数如下:

$$A=diag\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$$

$$B^*=[B_1^*, B_2^*, B_3^*, B_4^*, B_5^*]$$

$$C=[C_1, C_2, C_3, C_4, C_5]$$

其中, $A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_j^2 & -2\xi_j\omega_j \end{bmatrix}$, $B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ b_j \end{bmatrix}$, $C_j = [b_j, 0]$, $\omega_j = j^2$, $j=1, 2, \dots, 5$,

$\xi=0.005$, $[b_1, b_2, \dots, b_5]=[0.9877, 0.3090, -0.8910, -0.5878, 0.7071]$

加权矩阵 $Q=C^T * C$, $R=1$ 输入噪声协方差 $V=1$, 观测噪声协方差 $W=0.1$ 如文献[8]所设。全阶闭环系统的预估增益和控制增益为:

$$L=[2.0843 \quad 2.2962 \quad 0.1416 \quad 0.1774 \quad -0.2229 \quad -0.4139 \quad -0.0239 \quad -0.0142 \quad 0.0112 \quad -0.0026]^T$$

$$K=[0.4143 \quad 0.8866 \quad 0.0054 \quad 0.0216 \quad -0.0309 \quad -0.0403 \quad 0.0016 \quad -0.0025 \quad -0.0016 \quad 0.0011]$$

文献[8]方法 1 是基于最小 $K-L$ 信息距离的控制器降阶方法,采用类似于该文方案 1 的做法。分别用方案 1 和方案 2,及文献[8]方法 1 得到二阶控制器闭环系统。 L_{r3} , K_{r3} 分别表示文献[8]所得降阶闭环系统的预估增益和控制增益。降阶闭环系统的预估增益和控制增益分别为:

方案 1

$$L_{r1}=[-3.0996 \quad -0.0904]^T, K_{r1}=[-0.9141 \quad -0.3492]$$

方案 2

$$L_{r2}=[0.4731 \quad 0.9706]^T, K_{r2}=[0.4646 \quad -0.9785]$$

文献[9]方法

$$L_{r3}=[2.1564 \quad 2.2826]^T, K_{r3}=[0.3916 \quad 0.8752]$$

仿真结果:

图 6(波特图):该图所示为方案 1、方案 2、文献[8]所得降阶闭环系统及原全阶闭环系统波特图。从图上可以看出:方案 1 和文献[8]所得降阶闭环系统波特图更接近原全阶闭环系统波特图。

当闭环系统为零输入时,闭环系统性能如下所示:

当系统输入噪声和观测噪声为 0,系统初始状态如文献[8]设为 $x_i(0)=1/i, i=1, 2, \dots, 10$ 。

图 7(二阶闭环系统零输入响应比较图):如图所示为方案 1、方案 2、文献[8]所得降阶闭环系统零输入响应图。

当闭环系统输入为高斯白噪声时,闭环系统性能如下所示:

图 8(二阶闭环系统高斯白噪声响应均方误差比较图):如图所示,当系统输入协方差为 1 的高斯白噪声,仿真时间 $T=1000$,方案 1、方案 2、文献[8]所得降阶闭环系统高斯白噪声响应均方误差。方案 1 与文献[8]所得降阶闭环系统响应均方误差更小。

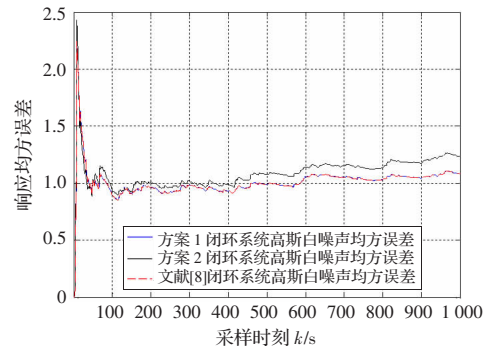


图8 二阶闭环系统高斯白噪声响应均方误差比较图

分别从零输入响应误差、高斯白噪声响应误差和 LQG 性能指标三方面考察二阶闭环系统性能。

表 3 二阶闭环系统性能表

二阶闭环系统性能	方案 1	方案 2	文献[8]
零输入响应均方误差 E_n	0.4139	0.3694	0.3963
零输入响应相对误差 E_{r0}	0.0011	0.0008	9.69E-05
高斯白噪声响应均方误差 E_n	1.0867	1.2382	1.0693
高斯白噪声响应相对误差 E_{rn}	7.7550E-004	0.1367	6.88E-04
零输入情况下降阶闭环系统	0.0111	0.0162	0.0102
LQG 性能指标 J			
高斯白噪声情况下降阶闭环系统 LQG 性能指标 J	12.5005	16.1723	12.5749

从仿真结果和闭环系统性能来看,由于方案 1 和文献[8]方法类似,因此两者所得降阶闭环系统性能非常接近。方案 2 在零输入响应均方误差优于方案 1 和文献[8]。总体来说,方案 1、方案 2 和文献[8]所得降阶闭环系统性能非常接近。

5 分析总结

从以上仿真结果看出:

(1)提出了两种新的基于信息论的 LQG 控制器降阶方法,即基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失控制器降阶方法。从以上两例仿真结果看出,两种方法所得降阶闭环系统能够较好地实现原全阶闭环系统性能。

(2)从例2仿真结果看来,从零输入响应均方误差分析,方案2优于文献[8]方法,而从闭环系统响应误差分析,文献[8]方法优于方案1和方案2。但三种方案所得降阶闭环系统性能非常接近,与原闭环系统性能也非常接近。

(3)方案1和方案2运用于不同的例子,所得降阶闭环系统性能差别很小。因此可以针对不同的例子,选取不同的控制器降阶方法设计降阶控制器。

参考文献:

- [1] Madievski A C, Anderson B D O. Sampled data controller reduction procedure[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(1).
- [2] Jonckheere E A, Silverman L M. A new set of invariants for linear systems—application to reduced order—compensator design[C]//Int Symp Theory Networks & Syst, Santa Monica, CA, 1981.
- [3] Anderson B D O, Liu Yi. Controller reduction: Concepts and approaches[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34(8).
- [4] Fernando K V, Nicholson H. On the structure of balanced and other principal representations of SISO systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1983, AC-28(2): 228–231.
- [5] Fernando K V, Nicholson H. Minimality of SISO linear systems[J]. Proc IEEE, 1982, 70(10): 1241–1242.
- [6] Fu Jin-bao, Zhang Hui. Minimum information loss method based on

cross-Gramian matrix for model reduction (CGMIL)[C]//Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, Chongqing, China, 2008: 25–27.

- [7] 付金宝, 章辉, 孙优贤. 基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失模型降阶方法[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2009, 43(5).
- [8] Leland R. Reduced-order models and controllers for continuous time stochastic systems: An information theory approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(9): 1714–1719.
- [9] Zhang Hui, Sun You-xian. Information theoretic methods for stochastic model reduction based on state projection[C]//2005 American Control Conference, Portland, or, USA, 2005: 2496–2601.
- [10] 曹清, 章辉, 孙优贤. 改进的用于模型降阶的最小信息损失方法[J]. 信息与控制, 2005, 23(4).
- [11] Halevi Y, Bernstein D S, Haddad W M. On stable full-order and reduced-order LQG controllers[J]. Optimal Control Applications and Methods, 1991, 12: 163–172.
- [12] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 4版. 北京: 科学出版社, 2001.
- [13] Cover T M, Thomas J A. Elements of information theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.
- [14] Obinata G, Anderson B D O. Model reduction for control system design[M]. [S.l.]: Springer, 2000.
- [15] 章辉. 控制系统中的信息描述与方法[D]. 杭州: 浙江大学信息科学与工程学院, 2003.

(上接 15 页)

参考文献:

- [1] 柯炜. 无线传感器网络关键技术及其研究难点[J]. 电信科学, 2005(6).
- [2] 吴光斌. 无线传感器网络能量有效性研究[J]. 传感器技术, 2004, 23(7).
- [3] 杨伟丰. 传感器网络中一种基于层次的节能路由算法[J]. 计算机工程与应用, 2004, 40(32).
- [4] Yu Wei, Yuan Jun. Joint source coding, routing and resource allocation for wireless sensor networks[J]. Communication, 2005, 2: 737–741.

- [5] Liu Chun-Hung, Asada H H. A source coding and modulation method for power saving and interference reduction in DS-CDMA sensor network systems[C]//Proceedings of the American Control Conference Anchorage, 2002.
- [6] Erin C, Asada H H. Energy optimal codes for wireless communications[C]//Proc of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999, 5: 4446–4453.
- [7] Erin C, Asacla H H, Siu K Y. Minimum energy coding for RF transmission[C]//IEEE WCNC, 1999, 2: 621–625.

(上接 18 页)

6 结论

详细阐述了一种适合于变速箱振动信号和转速信号进行同步数据采集的技术。提出了以转速信号为主控的实现按变速箱输入轴指定旋转周期为单位的等角度同步采集。程序用 VB 语言实现, 经过多次工业现场应用, 证明可以有效准确地采集数据, 为变速箱故障诊断系统的精确故障定位和诊断提供了保障。今后的工作将围绕故障箱特征提取以及大样本的知识发现展开进一步研究。

参考文献:

- [1] 王奉涛, 马孝江. 汽车变速箱性能检测与故障诊断系统设计[J]. 仪器仪表学报, 2006(S1): 382–384.
- [2] 万德安, 孙东继, 赵永杰. 汽车变速箱故障诊断中的时域同步阶次分析法的分析研究[J]. 计算机测量与控制, 2006, 14(3): 299–300.
- [3] 杨通强, 郑海起, 唐力伟, 等. 基于角域平均和倒阶次谱分析的齿轮

箱故障诊断[J]. 机械科学与技术, 2006, 25(4): 452–454.

- [4] 朱元佳, 万德安. 变速箱故障诊断数据采集系统的设计[J]. 机电一体化, 2007, 13(1): 67–70.
- [5] 祁立君, 李录平. 基于 VB 的振动信号采集与分析系统的研究[J]. 微计算机信息, 2007, 23(25): 118–120.
- [6] 简献忠, 张会林, 王朝立, 等. 等角度与等时间采样控制技术在扫描成像系统中的应用研究[J]. 量子电子学报, 2005, 22(3): 468–472.
- [7] 刘攀. SAGW 汽车变速箱故障诊断仪及其数据处理技术的研究[D]. 上海: 同济大学, 2007.
- [8] NI dynamic signal acquisition user manual[EB/OL]. (2008). ftp.ni.com/support/manuals/371235g.pdf.
- [9] NI 660x user manual[EB/OL]. (2006). http://www.ni.com/pdf/manuals/372119a.pdf.
- [10] NI-DAQmx software[EB/OL]. (2009). http://www.ni.com/dataacquisition/nidaqmx.htm.
- [11] How to synchronize a DSA device with other NI hardware[EB/OL]. (2008-02-12). http://digital.ni.com/public.nsf/websearch/AE63551CD4C4B24886256BE4004F4242?OpenDocument.