系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(8) (2009, 8), 1028–1033

匀称无圈超图的计数*

刘木伙

(华南农业大学应用数学系，广州 510642; 华南师范大学数学科学学院，广州 510631)

柳柏濂

(华南师范大学数学科学学院，广州 510631)

摘要 研究了标号匀称无圈超图的计数，得到了一般的 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 森林和 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 真森林的递推公式，并分别得到了包含和不包含独立点的 n 阶标号森林的计数显式.

关键词 匀称超图，超树，超森林.

MR(2000) 主题分类号 05C88, 05C89

1 引 言

近年来，王建方 [1] 引进了与传统超图观念不同的圈公理，奠定了信息超图的理论基础. 最近的研究表明，信息超图的特款无圈超图在计算机科学的关系数据库设计中有重要的应用 (见文献 [1]). 本文研究的是信息超图，以下简称超图.

设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是有限集， $\varepsilon=\{E_i|i=1,2,\cdots,m\}$ 是 V 的一个子集族. 若 $E_i\neq\emptyset, 1\leq i\leq m$, 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i=V$, 则称二元组 $H=(V,\varepsilon)$ 为一个超图. $|V|=n$ 称为 $H=(V,\varepsilon)$ 的阶， V 中的元称为顶点， ε 中的元称为边. 下文中，如果没有特别说明，用 H 来表示 $H=(V,\varepsilon)$. 若对任意的 $E\in\varepsilon$, 有 $|E|=r$ $(2\leq r\leq n)$, 则称 H 为 r- 匀称超图. 在 [1] 中，超图 H 被称为简单超图，如果它的任意两条边都互不包含. 即对任意的 $E_1,E_2\in\varepsilon$, $E_1\neq E_2$, 都有 $E_1\setminus E_2\neq\emptyset$. 本文所说的超图都是指简单超图.

在超图 H 中，若对任两条不同的边 $E_1,E_2\in\varepsilon$, 都存在 ε 的一边序列 $f_1,f_2,\cdots,f_k$, 使得 $E_1=f_1,E_2=f_k$ 且 $|f_i\cap f_{i+1}|\neq 0$, $1\leq i\leq k-1$, 则称 H 是连通的，否则是不连通的. 若对每一对边 $E_1,E_2\in\varepsilon$, 都有 $|E_1\cap E_2|\leq 1$, 则称超图 H 为线性的.

定义 1.1[2] 一个超图 H 称为 (d)- 连通的，若对任意的 $E_1,E_2\in\varepsilon$, 存在 ε 的边序列 $f_1,f_2,\cdots,f_k$, 使得 $E_1=f_1,E_2=f_k$ 且 $|f_i\cap f_{i+1}|\geq d$, $1\leq i\leq k-1$. 若超图 H 是 (d)- 连通的，且对任意的 $E_1,E_2\in\varepsilon$, $E_1\neq E_2$, 都有 $|E_1\cap E_2|\leq d$, 则称 H 为严格 (d)- 连通的.

---

* 华南农业大学校长基金 (4900-k08225), 国家自然科学基金 (10771080) 和教育部博士点基金 (20070574006) 资助课题.

收稿日期：2008-06-05, 收到修改稿日期：2008-11-19.

定义 1.2 若 H 中有一条边只有一个顶点 v, 则称 v 为 H 的一个独立点. 由于 H 为简单超图, 故若 H 包含独立点, 则该独立点就组成 H 的一个连通分支. 约定, 一个独立点可以作为任何一种类型的超图的一个连通分支. 若 H 的任何一个连通分支都不是一个独立点, 则 H 称为真超图.

在超图 H 中, 一个顶点 v 称为孤立的, 如果它仅仅属于一条边. 一条边 E 称为 H 的一个耳朵, 如果存在 $E' \in \varepsilon \setminus E$, 使得 $E \setminus E'$ 中的每个顶点是孤立的. 若 E 中每个顶点都是孤立的, 则 E 也称为 H 的一个耳朵.

定义 1.3 [3] 设 E 是一个耳朵, 称从 H 中除去 E 为耳朵移除. 重复耳朵移除直到不能再移除为止, 所得的超图称为原超图的 Graham 约化. 一个超图称为无圈的, 如果它的 Graham 约化是空集.

定义 1.4 若超图 H 连通且无圈, 则称 H 为超树. 特别地, 若 H 是一个严格 (d)- 连通的超树, 且对任意的 $E \in \varepsilon$, 都有 $|E| = r$ $(2 \le r \le n)$, 则称 H 为 r- 匀称 (d)- 超树. 依定义, 匀称线性超树就是匀称严格 (1)- 连通的无圈超图.

定义 1.5 若 H 的每个连通分支要么是一个 r- 匀称 (d)- 超树要么是一个独立点, 则称 H 为 r- 匀称 (d)- 森林. 特别地, 若 H 为一个 r- 匀称 (d)- 森林且不含独立点 (即每个连通分支都是一个 r- 匀称 (d)- 超树), 则称 H 为 r- 匀称 (d)- 真森林.

$F(n,r,d)$ 表示 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 森林的集合, 令 $f(n,r,d)=|F(n,r,d)|$. $G(n,r,d)$ 表示 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 真森林的集合, 令 $g(n,r,d)=|G(n,r,d)|$. 依定义, $F(n,r,1)$ 和 $G(n,r,1)$ 分别表示包含和不包含独立点的 n 阶标号 r- 匀称线性无圈超图的集合. 令 $f(n,2)$ 和 $g(n,2)$ 分别表示包含和不包含独立点的 n 阶标号森林的个数, 则 $f(n,2)=f(n,2,1)$, $g(n,2)=g(n,2,1)$.

1990 年, Takacs[4] 借助于生成函数和 Hermite 多项式得到了包含独立点的 n 阶标号森林的计数显式 (见推论 2.3). 2001 年, 王建方和李海珠 [2] 得到了包含独立点的 n 阶标号 r- 匀称线性无圈超图的一个递推公式. 本文得到了一般的 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 森林和 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 真森林的递推公式, 并得到了包含独立点的与 [2] 形式不同的 n 阶标号 r- 匀称线性无圈超图的另一个递推公式, 还得到了不包含独立点的 n 阶标号 r- 匀称线性无圈超图的递推公式. 另外, 我们重新得到了包含独立点的 n 阶标号森林的 Takacs 计数公式, 而且还得到了不含独立点的 n 阶标号森林的计数公式.

2 主要结果

为了简洁, 下文中用符号 $\dfrac{1}{k!}\dbinom{n}{a,\cdots,a}$ 代替 $\frac{n!}{k!\cdot(a!)^k\cdot(n-ka)!}$, 其中 a 的数目为 k. 约定, $0! = 1$, $r-1 \ge d \ge 1$, 且当 $n \ge 0$ 时, $\dbinom{n}{0} = 1$.

引理 2.1 [1] H 是一个边数为 m 的 n 阶 r- 匀称 (d)- 超树, 则 $n = d + m(r-d)$.

$T(n,r,d)$ 表示 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 超树的集合, 令 $t(n,r,d) = |T(n,r,d)|$.

引理 2.2 [2] 设 $n \ge r > d \ge 1$, $(r-d)|(n-d)$, 则

$$t(n,r,d) = \frac{1}{m!}\binom{n}{a,a,\cdots,a}\left(m\binom{r}{d} - m + 1\right)^{m-2}, \quad 其中\ a = r-d,\ m = \frac{n-d}{a}.$$

定理 2.1

$$f(n,r,d)=\sum_{m=1}^{\lfloor\frac{n-d}{a}\rfloor}\frac{1}{m!}\binom{n-1}{ma+d-1}\binom{ma+d}{a,\cdots,a}\left(m\binom{r}{d}-m+1\right)^{m-2}f(n-ma-d,r,d)$$
$$+f(n-1,r,d),$$

其中 $a=r-d$, $f(0,r,d)=1$.

证 设 $H\in F(n,r,d)$, 令 v_1 为 H 的一个根，则 $f(n,r,d)$ 个 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 森林恰好对应到 $f(n,r,d)$ 个以 v_1 为根的 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 森林. 下面计算 $f(n,r,d)$, 注意到 v_1 必包含且只能包含在 H 的一个连通分支中. 如果 v_1 是一个独立点，则剩下的 $n-1$ 个顶点组成一个 $n-1$ 阶标号 r- 匀称 (d)- 森林，有 $f(n-1,r,d)$ 种方法. 如果 v_1 不是一个独立点，不妨设包含 v_1 的连通分支有 m 条边. 由引理 2.1 可知， v_1 所在的连通分支恰好有 $ma+d$ 个顶点. 则相当于从剩下的 $n-1$ 个顶点中选出 $ma+d-1$ 个顶点与 v_1 构成一个 $ma+d$ 阶标号 r- 匀称 (d)- 超树，而余下的 $n-ma-d$ 个顶点组成一个 $n-ma-d$ 阶标号 r- 匀称 (d)- 森林，由引理 2.2 可知有 $\frac{1}{m!}\binom{n-1}{ma+d-1}\binom{ma+d}{a,\cdots,a}\left(m\binom{r}{d}-m+1\right)^{m-2}f(n-ma-d,r,d)$ 种方法. 又由引理 2.1 可知 $1\le m\le\lfloor\frac{n-d}{a}\rfloor$, 故结论成立.

在定理 2.1 中令 $d=1$, 便可以得到包含独立点的和 [2] 形式不同的 n 阶标号 r- 匀称线性无圈超图的另一个递推公式.

推论 2.1 $f(n,r,1)=\sum\limits_{m=0}^{\lfloor\frac{n-1}{a}\rfloor}\frac{1}{m!}\binom{n-1}{ma}\binom{ma+1}{a,\cdots,a}(ma+1)^{m-2}f(n-ma-1,r,1)$, 其中 $a=r-1$, $f(0,r,1)=1$.

在定理 2.1 中令 $d=1$, $r=2$, 还可以得到包含独立点的 n 阶标号森林的一个递推公式.

推论 2.2 $f(n,2)=\sum\limits_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(m+1)^{m-1}f(n-1-m,2)$, $f(0,2)=1$.

由推论 2.2 可以推导出 Takacs 公式，由此可见我们得到的 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 森林的递推公式的科学性.

推论 2.3 [4]

$$f(n,2)=H_n(n+1)-nH_{n-1}(n+1)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{(2j+1)\cdot n!}{2^j\cdot j!\cdot(n-2j)!}(n+1)^{n-1-2j},$$

其中 $H_n(x)$ 为 Hermite 多项式，定义如下

$$H_n(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^j\cdot n!}{2^j\cdot j!\cdot(n-2j)!}x^{n-2j}.\tag{1}$$

为了证明推论 2.3, 我们引进下列引理.

引理 2.3 [5] (Abel 恒等式) 对所有的 x,y,z, 有

$$(x+y)^s=\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}x(x-mz)^{m-1}(y+mz)^{s-m}.\tag{2}$$

引理 2.4　1)　$H_{n-1}(n+1)=\sum\limits_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(m+1)^{m-1}H_{n-1-m}(n-m)$;

2)　$H_{n-2}(n+1)=\sum\limits_{m=0}^{n-2}\binom{n-2}{m}(m+1)^{m-1}H_{n-2-m}(n-m)$.

证 此处只证 1), 同理可证 2). 在引理 2.3, 即 (2) 式中令 $x=1$, $y=n$, $z=-1$, $s=n-1-2j$ 可得

$$(n+1)^{n-1-2j}=\sum_{m=0}^{n-1-2j}\binom{n-1-2j}{m}(m+1)^{m-1}(n-m)^{n-1-2j-m}. \tag{3}$$

由 (1) 式和 (3) 式有

$$\begin{aligned}
&H_{n-1}(n+1)\\
&=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^j\frac{(n-1)!}{2^j\cdot j!\cdot(n-1-2j)!}(n+1)^{n-1-2j}\\
&=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\frac{(-1)^j\cdot(n-1)!}{2^j\cdot j!\cdot(n-1-2j)!}\left(\sum_{m=0}^{n-1-2j}\binom{n-1-2j}{m}(m+1)^{m-1}(n-m)^{n-1-m-2j}\right)\\
&=\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(m+1)^{m-1}\left(\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1-m}{2}\rfloor}\frac{(-1)^j\cdot(n-1-m)!}{2^j\cdot j!\cdot(n-1-m-2j)!}(n-m)^{n-1-m-2j}\right)\\
&=\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(m+1)^{m-1}H_{n-1-m}(n-m).
\end{aligned}$$

推论 2.3 的证明　对 n 用数学归纳法证明 $f(n,2)=H_n(n+1)-nH_{n-1}(n+1)$. 由 (1) 式可知 $H_0(x)=1$ 且 $H_1(x)=x$. 当 $n=0$, $f(0,2)=1=H_0(1)$ 成立. 当 $n=1$, $f(1,2)=1=H_1(2)-H_0(2)$ 也成立. 假设 $0\le n\le k-1$ 时结论成立，当 $n=k$ 时，由推论 2.2 和数学归纳前提有

$$\begin{aligned}
f(k,2)&=\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}(m+1)^{m-1}f(k-1-m,2)\\
&=\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}(m+1)^{m-1}(H_{k-1-m}(k-m)-(k-1-m)H_{k-2-m}(k-m))\\
&=\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}(m+1)^{m-1}H_{k-1-m}(k-m)-(k-1)\\
&\quad\cdot\sum_{m=0}^{k-2}\binom{k-2}{m}(m+1)^{m-1}H_{k-2-m}(k-m)\\
&=H_{k-1}(k+1)-(k-1)H_{k-2}(k+1)\ (\text{引理 } 2.4),
\end{aligned}$$

由 (1) 式可知 $H_n(x)=xH_{n-1}(x)-(n-1)H_{n-2}(x)$, 故

$$\begin{aligned}
f(k,2)&=H_{k-1}(k+1)-(k-1)H_{k-2}(k+1)\\
&=(k+1)H_{k-1}(k+1)-(k-1)H_{k-2}(k+1)-kH_{k-1}(k+1)\\
&=H_k(k+1)-kH_{k-1}(k+1).
\end{aligned}$$

从而当 $n=k$ 时结论也成立，证毕.

注意到 $F(n,r,d)$ 与 $G(n,r,d)$ 的差别在于包不包含独立点，类似定理 2.1 可得下面的定理.

定理 2.2 $g(n,r,d)=\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n-d}{a}\rfloor}\frac{1}{m!}\binom{n-1}{ma+d-1}\binom{ma+d}{a,\cdots,a}\left(m\binom{r}{d}-m+1\right)^{m-2}g(n-ma-d,r,d)$, 其中 $a=r-d$, $g(0,r,d)=1$.

推论 2.4 1) $g(n,r,1)=\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n-1}{a}\rfloor}\frac{1}{m!}\binom{n-1}{ma}\binom{ma+1}{a,\cdots,a}(ma+1)^{m-2}g(n-ma-1,r,1)$, 其中 $a=r-1$, $g(0,r,1)=1$;

2) $g(n,2)=\sum\limits_{m=1}^{n-1}\binom{n-1}{m}(m+1)^{m-1}g(n-m-1,2), g(0,2)=1$.

引理 2.5[5] 如果 $f_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_k$, 则 $g_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_k$.

由定理 2.2 和推论 2.3, 可以得到不包含独立点的 n 阶标号森林的计数公式.

定理 2.3 记

$$\binom{n}{n-k,k-2j}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(k-2j)!\cdot(2j)!},\quad (2j+1)!!=(2j+1)(2j-1)\cdots1,$$

则

$$g(n,2)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^{n+k+j}\binom{n}{n-k,k-2j}(2j+1)!!\cdot(k+1)^{k-1-2j}.$$

证 设 $H\in F(n,2)$, 则 H 可能含有 j $(0\le j\le n)$ 个独立点，在 H 中去掉这 j 个独立点可得唯一的一个 $H'\in G(n-j,2)$. 反之，对于任意的一个 $H'\in G(n-j,2)$, 添上 j 个独立点可得唯一的一个 $H\in F(n,2)$. 于是

$$f(n,2)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g(n-j,2)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g(k,2).$$

由引理 2.5 和推论 2.3 可得

$$\begin{aligned}
g(n,2)&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k,2)\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^{j}\frac{(2j+1)\cdot k!}{2^j\cdot j!\cdot(k-2j)!}(k+1)^{k-1-2j}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^{n+k+j}\frac{n!\cdot(2j+1)!}{(n-k)!\cdot(k-2j)!\cdot(2j)!\cdot j!\cdot 2^j}(k+1)^{k-1-2j}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^{n+k+j}\binom{n}{n-k,k-2j}(2j+1)!!\cdot(k+1)^{k-1-2j}.
\end{aligned}$$

例 2.1 由定理 2.1–2.3 和推论 2.3 可得表 1.

表 1

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$f(n,2)$	1	2	7	38	291	2932	$\cdots$
$g(n,2)$	0	1	3	19	155	1641	$\cdots$
$f(n,3,2)$	1	1	2	11	111	1756	$\cdots$
$g(n,3,2)$	0	0	1	6	70	1225	$\cdots$

3　一些新问题

迄今为止，所有标号超图的计数结果都局限在无圈的范畴 [1−6], 而一般的标号超图的计数问题还远没有解决.

问题 1　如何解决含有圈结构 (定义见 [1]) 的 n 阶标号超图的计数问题.

问题 2　一般的 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 森林和 n 阶标号 r- 匀称 (d)- 真森林的计数显式是怎样的？

参　考　文　献

[1] Wang J F. The Theory Foundation of Hypergraphs. Beijing: Higher Education Press, 2006.

[2] Wang J F, Li H Z. Counting acylic hypergraphs. *Science in China* (Series A), 2001, **44**(2): 220–224.

[3] Wang J F, Lee T T. An invariant for hypergraphs. *Acta Math. Appl. Sinica*, 1996, **12**(3): 113–120.

[4] Takacs L. On the number of distinct forests. *SIAM J. Disc. Math.*, 1990, **3**(4): 574–581.

[5] Louis Comtet. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. Boston, Springer Press, 1974.

[6] Liu M H, Liu B L. Counting strict (d)-connected acyclic hypergraphs. *Acta Math. Sinica*, 2007, **50**(6): 1305–1310.

THE COUNTING OF UNIFORM ACYCLIC HYPERGRAPHS

LIU Muhuo

(*Department of Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou* 510642;
School of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631)

LIU Bolian

(*School of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou* 510631)

Abstract　In this paper, the recursion formulas for r-uniform (d)-hyperforests and r-uniform (d)-real hyperforests with n labeled vertices are presented, and the explicit formulas are obtained for forests with n labeled vertices having isolated vertices or none.

Key words　Uniform hypergraph, hypertree, hyperforests.