系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(12) (2009, 12), 1672–1678

具高阶 Laplace 算子的非线性脉冲时滞双曲型方程的振动判据*

罗李平 杨柳

(衡阳师范学院数学与计算科学系，衡阳 421008)

摘要 研究一类具高阶 Laplace 算子的非线性脉冲时滞双曲型偏微分方程的振动性，利用特征函数法和一阶脉冲时滞微分不等式，获得了该类方程在两类不同边值条件下所有解振动的若干充分性判据. 所得结论充分反映了脉冲和时滞在振动中的影响作用.

关键词 脉冲，双曲型偏微分方程，振动性，高阶 Laplace 算子.

MR(2000) 主题分类号 34A37, 35L70, 35R12

1 引言

脉冲偏泛函微分方程振动理论由于在物理学、生物学、工程学、控制理论、人口动力学、医学、化学和经济学等学科领域中有着广泛的应用，近年来对其研究日益受到人们的重视，已有许多好的研究工作发表[1–14]. 但对具高阶 Laplace 算子的脉冲偏泛函微分方程的振动性研究，就笔者所知，目前国内外尚未见报道. 本文将讨论如下一类具高阶 Laplace 算子的非线性脉冲时滞双曲型偏微分方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a(t)\varDelta^{2l-1}u + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i(t)\varDelta^{2l-1}u(t-\rho_i,x) - p(t,x)u(t-\sigma,x) \\ \qquad - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j(t,x)f_j[u(t-\delta_j,x)], \quad (t,x)\in R_+\times\varOmega\equiv G,\ t\neq t_k, \\ u(t_k^+,x)-u(t_k^-,x) = b_k u(t_k,x), \quad k=1,2,\cdots, \\ u_t(t_k^+,x)-u_t(t_k^-,x) = c_k u_t(t_k,x), \quad k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{1}$$

解的振动性，其中 $u=u(t,x)$, $R_+=[0,\infty), \varOmega\subset R^M$ 是有界区域，$\partial\varOmega$ 逐片光滑，$\varDelta$ 是 R^M 中的 M 维 Laplace 算子，$l\geq 1$ 是整数，$\varDelta^r u=\varDelta(\varDelta^{r-1}u), r\geq 1$, 当 $r=0$ 时，记 $\varDelta^r u=u$.

考虑如下两类边值条件

$$\frac{\partial\varDelta^r u}{\partial N}+\beta(x)\varDelta^r u=0, \quad (t,x)\in R_+\times\varOmega, \quad t\neq t_k,\ r=0,1,2,\cdots,2l-2, \tag{B$_1$}$$

* 湖南省教育厅科研资助项目 (07C164) 和湖南省自然科学基金资助项目 (06JJ5001).
收稿日期：2007-04-30, 收到修改稿日期：2008-01-02.

$$\Delta^r u = 0, \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega, \quad t \neq t_k, \quad r = 0,1,2,\cdots,2l-2, \tag{B$_2$}$$

其中 N 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量， $\beta(x) \in C(\partial\Omega,(0,\infty))$.

在本文的讨论中，我们总假定下列条件成立

(H_1) $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ 是固定点列且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$;

(H_2) ρ_i,σ,δ_j 是正常数， $i \in I_m = \{1,2,\cdots,m\}$, $j \in I_n$, 且 $b_k, c_k > -1$, $k = 1,2,\cdots$;

(H_3) $a(t) \in PC(R_+,R), a_i(t) \in PC(R_+,R_+)$, $p(t,x), q_j(t,x) \in PC(R_+ \times \overline{\Omega},\ R_+), i \in I_m, j \in I_n$, 这里 PC 表示具有如下性质的分片连续函数类：仅在 $t = t_k$, $k = 1,2,\cdots$ 为第一类间断点，但在 $t = t_k$, $k = 1,2,\cdots$ 左连续； $p(t) = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}}\{p(t,x)\}$, $q_j(t) = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}}\{q_j(t,x)\}$, $j \in I_n$;

(H_4) $f_j(u) \in C(R,R)$, 且当 $u \neq 0$ 时， $uf_j(u) > 0$, $j \in I_n$.

2　预备知识

定义 2.1 函数 $u(t,x)$ 称为边值问题 (1), (B_i)($i = 1,2$) 的解，若 $u(t,x)$ 关于 x 二次连续可微，关于 t 是以 $t = t_k, k = 1,2,\cdots$ 为第一类间断点的分片连续函数， $u(t_k,x) = u(t_k^-,x), u_t(t_k,x) = u_t(t_k^-,x)$, $k = 1,2,\cdots$, 且满足边值问题 (1), (B_i)($i = 1,2$).

定义 2.2 边值问题 (1), (B_i)($i = 1,2$) 的解 $u(t,x)$ 称为在 G 内振动的，若对于任意大的 $T > 0$, 存在 $(t_0,x_0) \in [T,\infty) \times \Omega$, 使得等式 $u(t_0,x_0) = 0$ 成立．否则称 $u(t,x)$ 在 G 内是非振动的.

引理 2.1[15] 设 λ_0 是如下 Robin 特征值问题

$$\begin{cases} \Delta\phi(x) + \lambda\phi(x) = 0, \quad x \in \Omega, \lambda \text{ 是常数}, \\ \dfrac{\partial\phi(x)}{\partial N} + \beta(x)\phi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

的第一特征值， $\phi(x)$ 是与 λ_0 对应的特征函数，且 $\beta(x) \in C(\partial\Omega,(0,\infty))$, 则 $\lambda_0 > 0, \phi(x) > 0, x \in \Omega$.

引理 2.2[15] 设 λ_0 是如下 Dirichlet 特征值问题

$$\begin{cases} \Delta\phi(x) + \lambda\phi(x) = 0, \quad x \in \Omega, \lambda \text{ 是常数}, \\ \phi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

的第一特征值， $\phi_1(x)$ 是与 λ_1 对应的特征函数，则 $\lambda_1 > 0, \phi_1(x) > 0, x \in \Omega$.

引理 2.3[16] 设 $y(t) \in C^2([t_0,\infty),R)$ 且 $y(t) > 0, y'(t) > 0, y''(t) < 0, t \geq t_0$, 则对任意的 $\theta \in (0,1)$, 存在 $t_1 \geq t_0$, 使当 $t \geq t_1$ 时，有 $y(t) \geq \theta t y'(t)$.

引理 2.4[17] 设 $a(t), b(t) \in (R_+,R)$ 是局部可积函数且 $b(t) \geq 0; 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty, y(t_k) = y(t_k^-); b_k > -1, k = 1,2,\cdots; \tau$ 为正常数．若

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} b(s)\exp\Big(\int_{s-\tau}^{s} a(r)\mathrm{d}r\Big) \prod_{s-\tau \leq t_k < s} (1+b_k)^{-1}\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{e}},$$

则脉冲时滞微分不等式

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t-\tau) \leq 0, \quad t \geq 0, t \neq t_k, k = 1,2,\cdots, \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) = b_k y(t_k), \quad k = 1,2,\cdots \end{cases}$$

无最终正解 (参见文 [17] 中的定理 2).

3 主要结果及其证明

首先考虑边值问题 (1), (B_1) 解的振动性.

定理 3.1 设条件 (H_1)– 条件 (H_4) 成立. 若对任意的 $0<\delta<1$, 存在 $\theta\in(1-\delta,1)$, 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}\theta p(s)(s-\sigma)\exp\Big(\int_{s-\sigma}^{s}\theta\lambda_0^{2l-1}ra(r)\mathrm{d}r\Big)\prod_{s-\sigma\le t_k<s}(1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad (4)$$

则边值问题 (1),(B_1) 的所有非零解在区域 G 内振动, 其中 λ_0 由问题 (2) 确定.

证 (用反证法) 假设边值问题 (1), (B_1) 有一个非振动解 $u(t,x)$, 不失一般性, 设存在 $T>0$, 使当 $(t,x)\in[T,\infty)\times\Omega$ 时, 有 $u(t,x)>0$. 令 $T_1=T+\max\limits_{i\in I_m,j\in I_n}\{\rho_i,\sigma,\delta_j\}$, 则对任意 $(t,x)\in[T_1,\infty)\times\Omega$, 有

$$u(t-\rho_i,x)>0,\quad u(t-\sigma,x)>0,\quad u(t-\delta_j,x)>0,\quad i\in I_m,\ j\in I_n.$$

当 $t\ne t_k,k=1,2,\cdots$ 时, 注意到条件 (H_3), (H_4), 由方程 (1) 可得

$$u_{tt}\le a(t)\Delta^{2l-1}u+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)\Delta^{2l-1}u(t-\rho_i,x)-p(t)u(t-\sigma,x),\quad t\ge T_1. \qquad (5)$$

(5) 式两边乘以问题 (2) 的第一特征值 λ_0 对应的特征函数 $\phi(x)$, 并关于 x 在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_\Omega u\phi(x)\mathrm{d}x\le{}& a(t)\int_\Omega\Delta^{2l-1}u\phi(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)\int_\Omega\Delta^{2l-1}u(t-\rho_i,x)\phi(x)\mathrm{d}x\\&-p(t)\int_\Omega u(t-\sigma,x)\phi(x)\mathrm{d}x,\quad t\ge T_1. \end{aligned}\qquad (6)$$

由 Green 公式及边值条件 (B_1), 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\Delta^{2l-1}u\phi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\partial\Omega}\Big[\frac{\partial\Delta^{2l-2}u}{\partial N}\phi(x)-\Delta^{2l-2}u\frac{\partial\phi(x)}{\partial N}\Big]\mathrm{d}S+\int_\Omega\Delta^{2l-2}u\Delta\phi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\Delta^{2l-2}u\Delta\phi(x)\mathrm{d}x=-\lambda_0\int_\Omega\Delta^{2l-2}u\phi(x)\mathrm{d}x\\&=\cdots=-\lambda_0^{2l-1}\int_\Omega u\phi(x)\mathrm{d}x,\quad t\ge T_1,\end{aligned}\qquad (7)$$

$$\int_\Omega\Delta^{2l-1}u(t-\rho_i,x)\phi(x)\mathrm{d}x=-\lambda_0^{2l-1}\int_\Omega u(t-\rho_i,x)\phi(x)\mathrm{d}x,\quad t\ge T_1,\ i\in I_m, \qquad (8)$$

其中 $\mathrm{d}S$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素.

令

$$V(t)=\int_{\Omega}u(t,x)\phi(x)\mathrm{d}x,\quad t\geq T_1,$$

则

$$V(t)>0,\quad t\geq T_1.$$

于是由 (6)–(8) 式可得

$$V''(t)+\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)+\lambda_0^{2l-1}\sum_{i=1}^{m}a_i(t)V(t-\rho_i)+p(t)V(t-\sigma)\leq 0,\quad t\geq T_1. \tag{9}$$

由 (9) 式易知， $V''(t)<0,t\geq T_1$, 于是可证得 $V'(t)>0,t\geq T_1$. 事实上，倘若不然，则存在 $T_2>T_1$, 使得 $V'(T_2)\leq 0$, 从而当 $t\geq T_2$ 时，有 $V'(t)\leq V'(T_2)$. 对 t 从 T_2 到 t 积分，有 $V(t)\leq V(T_2)+V'(T_2)(t-T_2)$. 当 $t\to\infty$ 时，有 $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)=\infty$, 而这与 $V(t)>0,t\geq T_1$ 矛盾.

由 (9) 式有

$$V''(t)+\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)+p(t)V(t-\sigma)\leq 0,\quad t\geq T_1. \tag{10}$$

因此，对定理所给条件中的 θ, 由引理 2.3 知，存在 $T_2\geq T_1$, 有 $V(t)\geq\theta tV'(t),t\geq T_2$. 令 $Z(t)=V'(t)$, 则由 (10) 有

$$Z'(t)+\theta\lambda_0^{2l-1}ta(t)Z(t)+\theta p(t)(t-\sigma)Z(t-\sigma)\leq 0,\quad t\geq T_2. \tag{11}$$

当 $t=t_k,k=1,2,\cdots$ 时，由方程 (1) 中的脉冲条件及定义 2.1 中的条件可知

$$\int_{\Omega}u_t(t_k^+,x)\phi(x)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}u_t(t_k^-,x)\phi(x)\mathrm{d}x=c_k\int_{\Omega}u_t(t_k,x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

于是

$$Z(t_k^+)-Z(t_k^-)=c_kZ(t_k). \tag{12}$$

因此可知 $Z(t)$ 是微分不等式 (11), (12) 的一个最终正解. 但据条件 (4) 及引理 2.4 知，(11), (12) 无最终正解，矛盾. 定理 3.1 证毕.

由微分不等式 (9) 有

$$V''(t)+\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)+\lambda_0^{2l-1}\sum_{i=1}^{m}a_i(t)V(t-\rho_i)\leq 0,\quad t\geq T_1,\ t\neq t_k.$$

类似地，可以得到如下结果.

定理 3.2　设条件 (H$_1$)– 条件 (H$_4$) 成立. 若存在 $i_0\in I_m$, 对任意的 $0<\delta<1$, 存在 $\theta\in(1-\delta,1)$, 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\rho_{i_0}}^{t}\theta\lambda_0^{2l-1}a_{i_0}(s)(s-\rho_{i_0})\exp\Big(\int_{s-\rho_{i_0}}^{s}\theta\lambda_0^{2l-1}ra(r)\mathrm{d}r\Big)\prod_{s-\rho_{j_0}\leq t_k<s}(1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}},$$

则边值问题 (1), (B_1) 的所有非零解在区域 G 内振动，其中 λ_0 由问题 (2) 确定.

定理 3.3 设条件 (H_1)– 条件 (H_4) 成立，且存在 $j_0\in I_n$ 及常数 $C_{j_0}>0$, 使当 $u\neq 0$ 时，有

$$|f_{j_0}(u)|\geq C_{j_0}|u|. \tag{13}$$

若对任意的 $0<\delta<1$, 存在 $\theta\in(1-\delta,1)$, 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\delta_{j_0}}^{t}\theta C_{j_0}q_{j_0}(s)(s-\delta_{j_0})\exp\Big(\int_{s-\delta_{j_0}}^{s}\theta\lambda_0^{2l-1}ra(r)\mathrm{d}r\Big)\prod_{s-\delta_{j_0}\leq t_k<s}(1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}},$$

则边值问题 (1), (B_1) 的所有非零解在区域 G 内振动，其中 λ_0 由问题 (2) 确定.

证 (用反证法) 假设边值问题 (1), (B_1) 有一个非振动解 $u(t,x)$, 不失一般性，类似于定理 3.1 的证明，设存在 $T_1>0$, 使当 $(t,x)\in[T_1,\infty)\times\Omega$ 时，有

$$u(t-\rho_i,x)>0,\quad u(t-\sigma,x)>0,\quad u(t-\delta_j,x)>0,\quad i\in I_m,\ j\in I_n.$$

当 $t\neq t_k,k=1,2,\cdots$ 时，注意到条件 (H_3), 由方程 (1) 可得

$$u_{tt}\leq a(t)\Delta^{2l-1}u+q_{j_0}(t)f_{j_0}(u(t-\delta_{j_0},x)),\quad t\geq T_1.$$

注意到条件 (13), 由上式可得

$$u_{tt}\leq a(t)\Delta^{2l-1}u+C_{j_0}q_{j_0}(t)u(t-\delta_{j_0},x),\quad t\geq T_1.$$

上式两边乘以问题 (2) 的第一特征值 λ_0 对应的特征函数 $\phi(x)$, 并关于 x 在 Ω 上积分，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_\Omega u\phi(x)\mathrm{d}x\leq{}& a(t)\int_\Omega\Delta^{2l-1}u\phi(x)\mathrm{d}x\\&-C_{j_0}q_{j_0}(t)\int_\Omega u(t-\delta_{j_0},x)\phi(x)\mathrm{d}x,\quad t\geq T_1.\end{aligned}\tag{14}$$

令

$$V(t)=\int_\Omega u(t,x)\phi(x)\mathrm{d}x,\quad t\geq T_1,$$

则

$$V(t)>0,\quad t\geq T_1.$$

于是由 (14) 及 (7) 式可得

$$V''(t)+\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)+C_{j_0}q_{j_0}(t)V(t-\delta_{j_0})\leq 0,\quad t\geq T_1.$$

余下的证明完全类似于定理 3.1 后半部分的证明，详证在此略去. 定理 3.3 证毕.

下面考虑边值问题 (1), (B_2) 解的振动性.

借助于引理 2.2 和类似于上面的方法，我们可得以下定理，具体证明将省略.

定理 3.4 设条件 (H_1)– 条件 (H_4) 成立. 若对任意的 $0<\delta<1$, 存在 $\theta\in(1-\delta,1)$, 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}\theta p(s)(s-\sigma)\exp\Big(\int_{s-\sigma}^{s}\theta\lambda_1^{2l-1}ra(r)\mathrm{d}r\Big)\prod_{s-\sigma\leq t_k<s}(1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}},$$

则边值问题 (1), (B_2) 的所有非零解在区域 G 内振动，其中 λ_1 由问题 (3) 确定.

定理 3.5　设条件 (H_1)– 条件 (H_4) 成立. 若存在 $i_0 \in I_m$, 对任意的 $0<\delta<1$, 存在 $\theta \in (1-\delta, 1)$, 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\rho_{i_0}}^{t}\theta\lambda_1^{2l-1}a_{i_0}(s)(s-\rho_{i_0})\exp\Big(\int_{s-\rho_{i_0}}^{s}\theta\lambda_1^{2l-1}ra(r)\mathrm{d}r\Big)\prod_{s-\rho_{j_0}\le t_k<s}(1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}},$$

则边值问题 (1), (B_2) 的所有非零解在区域 G 内振动，其中 λ_1 由问题 (3) 确定.

定理 3.6　设条件 (H_1)– 条件 (H_4) 成立，且存在 $j_0 \in I_n$ 及常数 $C_{j_0}>0$, 使当 $u \neq 0$ 时，有

$$|f_{j_0}(u)| \ge C_{j_0}|u|.$$

若对任意的 $0<\delta<1$, 存在 $\theta \in (1-\delta, 1)$, 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\delta_{j_0}}^{t}\theta C_{j_0}q_{j_0}(s)(s-\delta_{j_0})\exp\Big(\int_{s-\delta_{j_0}}^{s}\theta\lambda_1^{2l-1}ra(r)\mathrm{d}r\Big)\prod_{s-\delta_{j_0}\le t_k<s}(1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}},$$

则边值问题 (1), (B_2) 的所有非零解在区域 G 内振动，其中 λ_1 由问题 (3) 确定.

注　若用下面的条件

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}b(s)\exp\Big(\int_{s-\tau}^{s}a(r)\mathrm{d}r\Big)\prod_{s-\tau\le t_k<s}(1+b_k)^{-1}\mathrm{d}s>1$$

代替引理 2.4 中的极限条件 (参见文 [17] 中的定理 3), 则还可以得到分别平行于本文定理 3.1– 定理 3.3 和定理 3.4– 定理 3.6 的关于边值问题 (1), (B_1) 和 (1), (B_2) 解振动的新结果.

参　考　文　献

[1] Bainov D, Minchev E. Oscillation of the solutions of impulsive parabolic equations. *Appl. Math. Comput.*, 1996, **69**(2): 207–214.

[2] Fu X L, Liu X Z. Oscillation criteria for impulsive hyperbolic systems. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 1997, **3**(2): 225–244.

[3] Bainov D, Minchev E. Forced oscillation of solutions of impulsive nonlinear parabolic differential-difference equations. *J. Korean Math. Soc.*, 1998, **35**(4): 881–890.

[4] 张立琴. 具有不依赖于状态脉冲的双曲型偏微分方程的振动准则. 数学学报， 2000, **43**(1): 17–26.

[5] 邓立虎，葛渭高. 脉冲时滞抛物型方程的振动准则. 数学学报， 2001, **44**(3): 501–506.

[6] Luo J W. Oscillation of hyperbolic partial differential equations with impulses. *Appl. Math. Comput.*, 2002, **133**(2–3): 309–318.

[7] Fu X L, Liu X Z, Sivaloganathan S. Oscillation criteria for impulsive parabolic equations with delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **268**(2): 647–664.

[8] Cui B T, Liu Y Q, Deng F Q. Some oscillations problems for impulsive hyperbolic differential systems with several delays. *Appl. Math. Comput.*, 2003, **146**(2–3): 667–679.

[9] 燕居让. 脉冲时滞抛物型方程解的振动性. 数学学报, 2004, **47**(3): 579–586.

[10] Liu A P, Xiao L, Liu T.Oscillation of nonlinear impulsive hyperbolic equations with several delays. *Electronic Journal of Differential Equation*, 2004, **24**: 1–6.

[11] Cui C P, Zou M, Liu A P. Oscillation of nonlinear impulsive hyperbolic equations with several delays. *Ann. of Diff. Eqs.*, 2005, **21**(1): 1–7.

[12] 罗李平, 谭琼华, 欧阳自根. 一类非线性脉冲时滞抛物型方程的强迫振动性. 武汉理工大学学报, 2006, **28**(8): 138–142.

[13] 罗李平, 欧阳自根. 非线性脉冲中立型时滞抛物偏微分方程的振动性. 吉林大学学报 (理学版), 2007, **45**(1): 23–28.

[14] 罗李平. 非线性脉冲时滞抛物型偏微分方程的强迫振动性. 应用数学, 2007, **20**(2): 357–360.

[15] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Equations of Second Order. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[16] Philos C G. A new criterion for oscillatory and asymptofic behavior of delay differential equations. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 1981, **29**: 367–370.

[17] Yan J R, Kou C H. Oscillation of solutions of impulsive delay differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **254**(2): 358–370.

OSCILLATION CRITERIA FOR NONLINEAR IMPULSIVE DELAY HYPERBOLIC EQUATIONS WITH HIGHER ORDER LAPLACE OPERATOR

LUO Liping YANG Liu

(*Department of Mathematics and Computational Science, Hengyang Normal University, Hengyang* 421008)

Abstract Oscillatioy properties of a class of nonlinear impulsive delay hyperbolic partial differential equations with higher order Laplace opertor is studied. By using the eigenvalue function method and first order impulsive delay differential inequalities, some sufficient criteria for the oscillation of all solutions of the equations are obtained under two kinds of different boundary conditions. The results fully reflect the influence of impulse and delay in oscillation.

Key words Impulse, hyperbolic partial differential equation, oscillation, higher order Laplace operator.