系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(11) (2009, 11), 1434–1436

Hermite 多项式的乘积运算

丁 夏 畦

(中国科学院数学与系统科学研究院应用数学所，北京 100190)

王 振

(中国科学院武汉物理与数学研究所，武汉 430071)

摘要 推导出多个 Hermite 多项式的乘积公式.

关键词 Hermite 多项式，乘积公式，生成函数.

MR(2000) 主题分类号 42C05, 33C45

在理论和应用上均为重要的 Hermite 多项式 $H_n(x)$ 定义为

$$Hn(x) = n! \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

它们满足基本生成关系式 [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n = \exp(2xz - z^2)\ . \tag{2}$$

在应用中常常会遇着 Hermite 多项式相乘，所以在本文中我们要证明如下公式.

定理 1 我们有

$$\begin{aligned} &H_{m_1}(x) H_{m_2}(x) \cdots H_{m_k}(x) \\ = &\sum_{p_{ij}} 2^{\sum\limits_{i<j} p_{ij}} \prod_{i<j} p_{ij}! \binom{m_1}{p_{12}, p_{13}, \cdots, p_{1k}} \\ &\cdots \binom{m_k}{p_{k1}, p_{k2}, \cdots, p_{kk-1}} H_{m_1+m_2+\cdots+m_k} - 2 \sum_{i<j} pij(x), \end{aligned} \tag{3}$$

其中 p_{ji} 定义为 p_{ij} 当 $i < j$,

$$\binom{m}{p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}} = \begin{cases} \dfrac{m!}{p_1! p_2! \cdots p_{k-1}! (m - p_1 - p_2 - \cdots - p_{k-1})!}, & \text{当 } p_1 + p_2 + \cdots p_{k-1} \le m, \\ 0, \quad \text{当 } p_1 + p_2 + \cdots p_{k-1} > m. \end{cases}$$

收稿日期：2009-07-16.

证 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_1,m_2,\cdots,m_k}\frac{H_{m_1}(x)}{m_1!}z_1^{m_1}\frac{H_{m_2}(x)}{m_2!}z_2^{m_2}\cdots\frac{H_{m_k}(x)}{m_k!}z_k^{m_k}\\
&=\exp\left\{2(z_1+z_2+\cdots+z_k)x-(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_k^2)\right\}\\
&=\exp\left\{2(z_1+z_2+\cdots+z_k)x-(z_1+z_2+\cdots+z_k)^2\right\}\exp\left\{2\sum_{1\le i<j\le k}z_iz_j\right\}\\
&=\sum_{\lambda,p_{ij}}\frac{H_\lambda(x)}{\lambda!}(z_1+z_2+\cdots+z_k)^\lambda\prod_{1\le i<j\le k}\frac{(2z_iz_j)^{p_{ij}}}{p_{ij}!}\\
&=\sum_{\lambda,p_{ij}}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=\lambda}\frac{2^{\sum\limits_{i<j}p_{ij}}}{\lambda!}H_\lambda(x)\binom{\lambda}{n_1,n_2,\cdots,n_{k-1}}z_1^{n_1}z_2^{n_2}\cdots z_k^{n_k}\prod_{1\le i<j\le k}\frac{(z_iz_j)^{p_{ij}}}{p_{ij}!}\\
&=\sum_{\lambda,p_{ij}}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=\lambda}\frac{2^{\sum\limits_{i<j}p_{ij}}}{n_1!n_2!\cdots n_k!\prod\limits_{i<j}p_{ij}!}z_1^{\left(n_1+\sum\limits_{j\ne 1}p_{1j}\right)}\cdots z_k^{\left(n_k+\sum\limits_{j\ne k}p_{kj}\right)}H_\lambda(x).
\end{aligned}\tag{4}$$

令

$$\begin{aligned}
n_1+p_{12}+\cdots+p_{1k}&=m_1,\\
n_2+p_{21}+p_{23}+\cdots+p_{2k}&=m_2,\\
&\cdots\\
n_k+p_{k1}+\cdots+p_{k\,k-1}&=m_k,
\end{aligned}$$

则

$$\lambda=m_1+m_2+\cdots+m_k-2\sum_{i<j}p_{ij},$$

故

$$\begin{aligned}
&H_{m_1}(x)H_{m_2}(x)\cdots H_{m_k}(x)\\
&=\sum_{p_{ij}}\frac{2^{\sum\limits_{i<j}p_{ij}}m_1!m_2!\cdots m_k!}{n_1!n_2!\cdots n_k!\prod\limits_{i<j}p_{ij}!}H_{m_1+m_2+\cdots+m_k}-2\sum_{i<j}pij(x)\\
&=\sum_{p_{ij}}2^{\sum\limits_{i<j}p_{ij}}\prod_{i<j}p_{ij}!\binom{m_1}{p_{12},p_{13},\cdots,p_{1k}}\\
&\quad\cdots\binom{m_k}{p_{k1},p_{k2},\cdots,p_{kk-1}}H_{m_1+m_2+\cdots+m_k}-2\sum_{i<j}pij(x).
\end{aligned}\tag{5}$$

定理 1 证毕.

推论 1[2] 当 $k=2$ 时，令 $m_1=m,\ m_2=n,\ p_{12}=k$, 则有

$$H_m(x)H_n(x)=\sum_{k=0}^{\min(m,n)}2^kk!\binom{m}{k}\binom{n}{k}H_{m+n-2k}(x).\tag{6}$$

推论 2 当 $k=3$ 时，令 $m_1=l,\ m_2=m,\ m_3=n,\ p_{12}=p,\ p_{23}=q,\ p_{13}=r$, 则有

$$H_l(x)H_m(x)H_n(x)=\sum_{p,q,r}2^{p+q+r}p!q!r!\binom{l}{p,r}\binom{m}{p,q}\binom{n}{q,r}H_{l+m+n-2(p+q+r)}(x).\tag{7}$$

参 考 文 献

[1] 丁夏畦，丁毅． Hermite 展开与广义函数．武汉：华中师范大学出版社， 2006.
[2] Bateman H. Transcendantal Functions, Vol II. New York, McGraw-Hill, 1953.

PRODUCT FORMULA FOR HERMITE POLYNOMIALS

DING Xiaqi

(*Institute of Applied Mathematics, Academy of Mathematics and Systems Science, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

WANG Zhen

(*Wuhan Institute of Physics and Mathematics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan* 430071)

Abstract In this paper, a product formula for Hermite polynomials is obtained.

Key words Hermite polynomials, product formula, generating function.