

# 复杂动态网络的有限时间同步<sup>\*</sup>

陈 姚 吕金虎

(中国科学院数学与系统科学研究院系统控制重点实验室, 北京 100190)

**摘要** 复杂网络无处不在, 同步是自然界中广泛存在的一类非常重要的非线性现象. 过去 10 年, 人们对复杂网络的同步开展了系统而深入的研究, 包括恒等同步、广义同步、簇同步以及部分同步等. 上述大部分结果中对同步速度的刻画往往是渐进的, 只有当时间趋于无穷的时候, 网络才能实现同步, 而对于网络能够在多长时间内可以实现同步却知之甚少. 作者以几类典型的非线性耦合的复杂动态网络为例, 深入探讨了复杂动态网络的有限时间同步的规律. 具体而言, 基于上述几类典型的复杂动态网络, 证明了在某些合适的条件下, 网络能够在有限时间内实现精确同步. 此外, 用一个典型的数值仿真实例验证了上述有限时间同步的准则. 有限时间同步有效地避免了网络只有在无穷时刻才能实现同步的问题, 对网络同步的实际工程应用具有基本的现实意义.

**关键词** 复杂网络, 同步, 有限时间, 无向图, 非线性耦合.

**MR(2000) 主题分类号** 90B10, 93C15

## 1 引言

在我们的现实世界中复杂网络无处不在, 如万维网、因特网、基因调控网、细胞神经网络、电网、科学家合作网、人际关系网等<sup>[1–5]</sup>. 1998 年, Watts 和 Strogatz 提出了著名的 WS 小世界网络模型<sup>[1]</sup>; 1999 年, Barabási 和 Albert 提出了著名的 BA 无尺度网络模型<sup>[3]</sup>. 过去 10 多年来, 复杂网络迅速发展成为一个新的十分重要的研究领域, 它涉及到数学、物理学、工程科学、社会科学等多学科的交叉与融合. 毫无疑问, 对复杂网络的深入研究已经并将继续极大地推动相关交叉学科的发展.

同步是自然界中广泛存在的一类非常重要的非线性现象, 它有着非常悠久的历史. 随着复杂网络的兴起, 网络同步近年来引起很多研究人员的普遍关注, 已经发展成为复杂网络研究的一个热点课题. 过去 10 多年里, 许多研究人员从不同的角度深入探讨的网络同步问题, 如恒等同步、广义同步、簇同步、部分同步等<sup>[4–8]</sup>. 大量的事实表明, 复杂网络同步有着非常广阔的应用前景, 如核磁共振、无线传感器网络、多机器人协调等.

值得注意的是, 上述关于网络同步的研究结果大多是基于一个无限时间的渐进过程. 也就是说, 网络同步只有当时间趋于无穷的时候, 复杂网络才能逐渐趋于同步状态, 即理论上网络同步不可能在有限时间内实现. 然而在实际的物理或工程系统中, 复杂网络通常只要有有限的时间就可以达到同步状态, 即有限时间同步. 一方面已有的文献中关于有限时间同步的

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金 (60821091, 60772158) 和 973 项目 (2007CB310805) 资助课题.

收稿日期: 2009-09-03.

研究结果不多;而另一方面有限时间同步却是复杂网络真正走向实际应用的一个十分重要的桥梁.

最近,关于一般控制系统的有限时间稳定或镇定问题,已有一些相关的报道<sup>[9-14]</sup>.基于两类典型的非线性耦合的复杂动态网络,我们深入探讨了复杂动态网络的有限时间同步(见文献[15-20]).具体而言,在某些合适的条件下,我们证明了复杂动态网络能够在有限时间内实现精确同步.紧接着,我们用一个典型的数值仿真实例验证了上述有限时间同步的准则.上述有限时间同步能够有效地避免网络只有在无穷时刻才能实现同步的问题,这些结果对网络同步的实际工程应用具有基本的现实意义<sup>[21-27]</sup>.

本文的基本结构如下:第2部分简要介绍了本文必须的一些图论的基础知识并描述了复杂动态网络的同步问题;第3部分重点给出了复杂动态网络有限时间同步的若干结果;第4部分用一个典型的数值实例验证了上述理论结果;第5部分简要总结并展望了复杂动态网络的相关工作.

## 2 预备知识及问题的提出

一般而言,图 $\mathcal{G}$ 由以下两个基本集合组成: $V$ 为有限顶点集, $\mathcal{E}$ 为边集,其中 $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ .给定 $N$ 个不同的点,记为1到 $N$ ,则顶点集 $V = \{1, 2, \dots, N\}$ .这些顶点之间的边用集合 $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ 表示,如果 $(i, j) \in \mathcal{E}$ ,则我们称存在一条从顶点 $i$ 到 $j$ 的边.那么,图 $\mathcal{G}$ 被定义成 $\mathcal{G} = \{V, \mathcal{E}\}$ .下文中,我们暂不考虑图中所谓的自环,也就是对于任意的 $i \in V$ 都有 $(i, i) \notin \mathcal{G}$ .

如果存在一条从顶点 $i$ 到 $j$ 的连续的边,则称从 $i$ 到 $j$ 存在一条路径,用 $\langle i, j \rangle \in \mathcal{E}$ 表示.为便于准确描述, $\langle i, j \rangle \in \mathcal{E}$ 意味着存在 $k$ 个不同的顶点 $i_0, i_1, \dots, i_k \in V, i_0 = i, i_k = j$ ,它们满足对于每个 $0 \leq s \leq k-1$ 有 $(i_s, i_{s+1}) \in \mathcal{E}$ .

如果不加特别说明的话,下文默认一个图为有向图.另外,如果 $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$ ,则图 $\mathcal{G}$ 被称为无向的.

在 $\mathcal{G}$ 中,如果存在一个顶点 $i$ ,它到图中其它任意的顶点都存在着路径,则图 $\mathcal{G}$ 被称为联通的或包含一棵生成树.同时,这个顶点 $i$ 被定义成包含于图 $\mathcal{G}$ 中的这棵树的根.

任给一个图 $\mathcal{G} = \{V, \mathcal{E}\}$ ,可以构造一个相应的矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 来表示该图的结构: $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow a_{ji} > 0$ ,且 $(i, j) \notin \mathcal{E} \Leftrightarrow a_{ji} = 0$ .其中 $a_{ij}$ 的值可以用来表示边 $(j, i)$ 的权重.由于不考虑自环,那么对于所有的 $i \in V$ 有 $a_{ii} = 0$ .有了图 $\mathcal{G}$ 的相应矩阵 $A$ 的定义,接下来我们可以定义另一类重要的矩阵,即Laplacian矩阵 $L: L(A) = D - A$ ,其中 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 且 $d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ .

同样的,给定一个矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ ,如果 $a_{ij} \geq 0$ 且 $a_{ii} = 0$ ,可以定义一个相应于矩阵 $A$ 的图 $\mathcal{G}(A)$ .

在本文中,我们考虑如下两个典型的复杂动态网络

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + c\gamma_\alpha \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)) \right), \quad \forall i \in V, \quad (1)$$

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \gamma_\alpha(\Gamma(x_j(t) - x_i(t))), \quad \forall i \in V, \quad (2)$$

其中,  $x_i \in \mathbf{R}^n$ ,  $V = \{1, 2, \dots, N\}$  为节点集合,  $\Gamma = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  为内部耦合矩阵且满足  $r_i > 0$ ,  $c$  为耦合强度,  $a_{ij}$  为不同节点间的耦合系数. 此外,  $\gamma_\alpha$  是上述复杂动态网络的状态变量  $x$  的一个函数, 定义为

$$\gamma_\alpha(y) = (\text{sig}(y_1)^\alpha, \text{sig}(y_2)^\alpha, \dots, \text{sig}(y_n)^\alpha)^\text{T},$$

其中,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\text{T}$  且  $\text{sig}(y_i)^\alpha = \text{sgn}(y_i)|y_i|^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

本文主要深入探讨上述复杂动态网络的同步问题: 对于给定的区域  $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^n$ , 初始状态  $x_i(0) \in \mathcal{D}$ , 如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$ , 则我们称网络中的节点在  $\mathcal{D}$  内能够实现渐进同步; 对于给定的区域  $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^n$ , 初始状态  $x_i(0) \in \mathcal{D}$ , 如果存在  $t^*$  满足对任意的  $t \geq t^*$  和任意的  $i, j \in V$  都有  $\|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$ , 则称该网络在  $\mathcal{D}$  内能够实现有限时间同步.

对于 (1) 和 (2) 中每个网络节点的动态  $f(\cdot)$ , 我们有

**假设 1** 存在常数  $\lambda > 0$ , 对于任何  $x, y \in \mathbf{R}^n$ , 满足不等式

$$(x - y)^\text{T} \Gamma (f(x, t) - f(y, t)) \leq \lambda (x - y)^\text{T} \Gamma (x - y). \quad (3)$$

令  $x = (x_1^\text{T}, x_2^\text{T}, \dots, x_N^\text{T})^\text{T}$  且  $F(x) = (f(x_1)^\text{T}, f(x_2)^\text{T}, \dots, f(x_N)^\text{T})^\text{T}$ , 那么 (1) 能够被写成

$$\dot{x} = F(x) - c\tilde{\gamma}_\alpha(L \otimes \Gamma x).$$

这里

$$\tilde{\gamma}_\alpha(y) = (\gamma_\alpha(y_1)^\text{T}, \gamma_\alpha(y_2)^\text{T}, \dots, \gamma_\alpha(y_N)^\text{T})^\text{T},$$

$y_i \in \mathbf{R}^n$  且  $y = (y_1^\text{T}, y_2^\text{T}, \dots, y_N^\text{T})^\text{T}$ .

以下的两个引理在分析网络 (1) 和 (2) 时起到关键作用.

**引理 1**<sup>[13]</sup> 考虑如下微分方程

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) - cx(t)^\alpha, \quad (4)$$

其中,  $x(t) \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $c > 0$ . 如果  $0 \leq x_0 < (\frac{c}{\lambda})^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , 那么, (4) 中的  $x(t)$  能够在有限时间内达到 0.

**引理 2** 令  $x_i \in \mathbf{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . 如果  $x_i \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^n x_i \neq 0$ , 那么

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^\alpha \leq \sum_{i=1}^n x_i^\alpha.$$

### 3 复杂网络的有限时间同步

#### 3.1 网络 (1) 在无向图上的同步

**定理 3.1** 对于由 (1) 所描述的网络动力学, 令  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ . 假定假设 1 成立, 由于  $G(A)$  是无向联通的, 给定

$$\mathcal{D}_r = \left\{ x_i(0) : \frac{2\lambda V_0^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(2r_{\min} \lambda_2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \leq r, i \in V \right\},$$

其中,  $V_0 = \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{ij}(x_i(0) - x_j(0))^T \Gamma(x_i(0) - x_j(0))$ ,  $r_{\min}$  为  $\Gamma$  中的最小对角元,  $\lambda_2$  为  $L(A)$  的最小非零特征值. 如果  $c \geq r$ , 那么该网络在  $\mathcal{D}_r$  内能实现有限时间同步.

证 令  $V(t) = \frac{1}{2}x(t)^T(L \otimes \Gamma)x(t)$ , 其中

$$x(t) = (x_1(t)^T, x_2(t)^T, \dots, x_N(t)^T)^T.$$

$V(t)$  沿系统 (1) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= x^T(L \otimes \Gamma)\dot{x} = x^T(L \otimes \Gamma)(F(x) - c\tilde{\gamma}_\alpha(L \otimes \Gamma x)) \\ &= x^T(L \otimes \Gamma)F(x) - c(L \otimes \Gamma x)^T \tilde{\gamma}_\alpha(L \otimes \Gamma x) \\ &\leq x^T(L \otimes \Gamma)F(x) - c(\|L \otimes \Gamma x\|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j)^T \Gamma(f(x_i) - f(x_j)) - c(\|L \otimes \Gamma x\|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j)^T \Gamma(x_i - x_j) - c(\|L \otimes \Gamma x\|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ &= \lambda x^T(L \otimes \Gamma)x - c(\|L \otimes \Gamma x\|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} = 2\lambda V(t) - c(\|L \otimes \Gamma x\|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}, \end{aligned}$$

以上的第一个不等式来自于引理 2.

令  $\lambda_i$  为  $L$  的特征值且满足  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ , 同时  $v_i$  为相应于  $\lambda_i$  的特征向量, 令  $\{v_i\}$  为  $\mathbf{R}^N$  中的一组标准正交基. 注意到  $\Gamma$  是一个对角矩阵, 那么  $r_i$  为  $\Gamma$  的特征值且  $e_i$  为对应于  $r_i$  的特征向量. 这里,  $e_i$  是一个  $n \times 1$  向量满足第  $i$  个分量为 1 且其它的分量为 0. 那么,  $v_i \otimes e_j$  ( $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n$ ) 为  $L \otimes \Gamma$  的特征向量且相应的特征值为  $\lambda_i r_j$ . 进一步,  $\{v_i \otimes e_j\}$  为  $\mathbf{R}^{Nn}$  中的一组标准正交基.

令  $x = \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij}(v_i \otimes e_j)$ , 可得

$$(L \otimes \Gamma)x = \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij} \lambda_i r_j (v_i \otimes e_j).$$

进一步有

$$x^T(L \otimes \Gamma)x = \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij}^2 \lambda_i r_j, \quad \|(L \otimes \Gamma)x\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij}^2 \lambda_i^2 r_j^2.$$

那么

$$\|(L \otimes \Gamma)x\|^2 \geq r_{\min} \lambda_2 \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij}^2 \lambda_i r_j = r_{\min} \lambda_2 x^T(L \otimes \Gamma)x = 2r_{\min} \lambda_2 V(t).$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq 2\lambda V(t) - c(\|L \otimes \Gamma x\|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} \leq 2\lambda V(t) - c(2r_{\min} \lambda_2 V(t))^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ &= 2\lambda V(t) - c(2r_{\min} \lambda_2)^{\frac{\alpha+1}{2}} \cdot V(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}. \end{aligned}$$

根据引理 1, 当

$$c \geq \frac{2V(0)^{\frac{1-\alpha}{2}} \lambda}{(2r_{\min} \lambda_2)^{\frac{\alpha+1}{2}}},$$

则  $V(t)$  能在有限时间内达到 0, 于是网络 (1) 在  $\mathcal{D}_r$  能实现有限时间同步.

注 1 定理 3.1 中的结论很容易推广到网络拓扑为时变的情形, 仅需要对拓扑结构矩阵  $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$  施加如下的条件.

**假设 2**  $a_{ij}(t)$  连续可微且恒为零或恒大于零; 存在  $M > m > 0$  使得当  $a_{ij}(t) \neq 0$  时,  $a_{ij}(t) \in [m, M]$ ; 存在  $l > 0$ , 当  $a_{ij}(t) > 0$  时,  $|\dot{a}_{ij}(t)| \leq l$ .

**定理 3.2** 对于如下网络动力学方程,

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + c\gamma_\alpha \left( \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \cdot \Gamma(x_j(t) - x_i(t)) \right), \quad \forall i \in V.$$

令  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^N$ . 假定假设 1 和假设 2 成立,  $\mathcal{G}(A(t))$  是无向联通的, 那么对于任何给定的有界区域  $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^n$ , 当耦合强度  $c$  充分大时, 该网络在区域  $\mathcal{D}$  内能够实现有限时间同步.

由于定理 3.2 的证明与定理 3.1 的证明方法和过程几乎完全相同, 只是细节上有稍微的区别, 因此在此略去.

### 3.2 网络 (2) 在无向图上的同步

**定理 3.3** 对于由 (2) 所描述的网络动力学方程. 如果  $\mathcal{G}(A)$  是无向联通的且假设 1 成立, 那么对于任何给定的有界区域  $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^n$ , 当耦合强度  $c$  充分大时, 该网络在区域  $\mathcal{D}$  内能够实现有限时间同步.

证 考虑图  $\mathcal{G}(A)$  的对称性, 注意到  $\sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^N f(x_i(t), t)$ , 令  $s(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$ , 那么

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i(t), t).$$

令  $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ ,  $g(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i(t), t)$ . 考虑如下的 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \Gamma e_i(t).$$

$V(t)$  沿着 (2) 的导数是

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \Gamma \dot{e}_i(t) = \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \Gamma (\dot{x}_i(t) - \dot{s}(t)) \\ &= \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \Gamma (f(x_i(t), t) - g(t)) + c \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \Gamma \sum_{j=1}^N a_{ij} \gamma_\alpha (\Gamma(x_j(t) - x_i(t))) \\ &= \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \Gamma (f(x_i(t), t) - g(t)) + c \sum_{i,j=1}^N a_{ij} e_i(t)^T \Gamma \gamma_\alpha (\Gamma(e_j(t) - e_i(t))). \end{aligned}$$

结合

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^N a_{ij} e_i(t)^T \Gamma \gamma_\alpha (\Gamma(e_j(t) - e_i(t))) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (e_j - e_i)^T \Gamma \gamma_\alpha (\Gamma(e_j - e_i)) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \phi_{\alpha+1}(\Gamma(e_j - e_i)). \end{aligned}$$

这里,  $\phi_{\alpha+1}(y) = (|y_1|^{\alpha+1}, |y_2|^{\alpha+1}, \dots, |y_n|^{\alpha+1})^T$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n$ .  
令

$$W_1(e) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \phi_{\alpha+1}(\Gamma(e_j - e_i)), \quad W_2(e) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T \Gamma e_i, \quad W(e) = \frac{W_1(e)}{(W_2(e))^{\frac{\alpha+1}{2}}},$$

其中  $e = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T)^T$ ,  $e_i$  为  $n \times 1$  的向量.

给定任何  $\theta \in \mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}$  和  $\theta \neq 0$ , 显然有  $W(\theta e) = W(e)$ . 令

$$\lambda^* = \min_{\|e\|=1, e^T \mathbf{1}_{Nn}=0} W(e),$$

这里,  $\mathbf{1}_{Nn}$  是一个所有分量为 1 的  $Nn \times 1$  向量.

由于  $W_2(e) \geq 0$  且  $W_1(e) \geq 0$ , 则  $W_2(e) = 0$  当且仅当  $e = 0$ . 因此,  $\lambda^* \geq 0$ .

如果  $\lambda^* = 0$ , 那么存在某个  $e^*$  满足  $W_1(e^*) = 0$ . 然而, 由于  $\mathcal{G}(A)$  的联通性,  $W_1(e^*) = 0$  当且仅当  $e^* = \theta' \mathbf{1}_{Nn}$ , 这里  $\theta'$  为一个标量常数. 结合  $(e^*)^T \mathbf{1}_{Nn} = 0$ , 那么一定成立  $e^* = 0$ , 这将与  $\|e^*\| = 1$  矛盾. 综上,  $\lambda^* > 0$ .

另外,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \Gamma (f(x_i(t), t) - g(t)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \Gamma \sum_{j=1}^N (f(x_i, t) - f(x_j, t)) = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N (x_i(t) - x_j(t))^T \Gamma (f(x_i, t) - f(x_j, t)) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N (x_i - x_j)^T \Gamma (f(x_i, t) - f(x_j, t)) \leq \frac{1}{2N} \lambda \sum_{i,j=1}^N (x_i - x_j)^T \Gamma (x_i - x_j) \\ &= \frac{1}{2N} \lambda \sum_{i,j=1}^N (e_i - e_j)^T \Gamma (e_i - e_j). \end{aligned}$$

令

$$W_3(e) = \frac{1}{2N} \lambda \sum_{i,j=1}^N (e_i - e_j)^T \Gamma (e_i - e_j), \quad W'(e) = \frac{W_3(e)}{W_2(e)},$$

显然,  $W'(\theta e) = W'(e)$  对任何  $\theta \in \mathbf{R}$  和  $\theta \neq 0$  成立.

定义

$$\mu^* = \max_{\|e\|=1} W'(e).$$

由于当  $\|e\| = 1$  时  $W'(e) > 0$ , 那么  $\mu^* > 0$ .

综合以上推理, 于是有

$$\dot{V}(t) \leq \mu^* V(t) - c\lambda^* V(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}.$$

根据引理 1, 当耦合强度

$$c \geq \frac{\mu^*}{\lambda^*} V(0)^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

其中,  $V(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i(0)^T \Gamma e_i(0)$ ,  $V(t)$  能在有限时间内达到零. 对于任何给定的有界区域  $\mathcal{D}$ , 选取

$$c^* = \sup_{x_i(0) \in \mathcal{D}, i \in V} \left\{ \frac{\mu^*}{\lambda^*} V(0)^{\frac{1-\alpha}{2}} \right\}.$$

显然, 当  $c \geq c^*$  时, 网络 (2) 能够实现有限时间同步.

注 2 定理 3.3 中的结论也可推广到网络拓扑为时变的情形, 只需对耦合权重施加如下假设.

**假设 3**  $a_{ij}(t)$  连续且恒为零或恒大于零; 存在  $M > m > 0$  使得当  $a_{ij}(t) \neq 0$  时,  $a_{ij}(t) \in [m, M]$ .

**定理 3.4** 对于如下网络动力学方程,

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \cdot \gamma_\alpha(\Gamma(x_j(t) - x_i(t))), \quad \forall i \in V,$$

令  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^N$ . 假定假设 1 和假设 3 成立,  $\mathcal{G}(A(t))$  是无向联通的, 那么对于任何给定的有界区域  $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^n$ , 当耦合强度  $c$  充分大时, 该网络在区域  $\mathcal{D}$  内能够实现有限时间同步.

由于定理 3.4 的证明与定理 3.3 的证明方法和过程几乎完全相同, 只是细节上有稍微的区别, 因此在此略去.

### 3.3 复杂网络的有限时间牵制同步

在假设 1 成立的前提下, 对于网络动力学方程 (2), 如果存在一个节点其动态不被其它节点影响, 我们称之为驱动节点<sup>[6]</sup>. 这个节点将驱动其它的节点使其动力学方程同步到自身的动态上来. 在这种情形下,  $\mathcal{G}(A)$  不再是一个无向图.

不失一般性, 假设  $N = m + 1$ , 节点  $N$  被选作驱动节点. 此时网络的动力学方程将有如下的形式

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + c \sum_{j=1}^m a_{ij} \gamma_\alpha(\Gamma(x_j - x_i)) + c \cdot a_{iN} \gamma_\alpha(\Gamma(x_N - x_i)), \quad (5)$$

$$\dot{x}_N(t) = f(x_N(t), t). \quad (6)$$

这里, 耦合矩阵  $A$  拥有如下的形式

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

**定理 3.5** 对于由 (5) 和 (6) 描述的网络动力学方程, 如果假设 1 满足, 从节点 1 到  $m = N - 1$  耦合关系子图是无向联通的, 并且至少存在某个  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  使得  $a_{iN} \neq 0$ , 那么对于任何给定的有界区域  $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^n$ , 当耦合强度  $c$  充分大时, 该网络能实现有限时间同步.

证 对于  $N \times N$  的耦合矩阵 (7), 根据定理的条件,  $A_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}$  是对称的,  $b \in \mathbf{R}^{m \times 1}$  且  $b \neq 0$ .

令  $e_i(t) = x_i(t) - x_N(t)$  对于  $1 \leq i \leq m = N - 1$ . 构造如下的 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_i(t)^T \Gamma e_i(t).$$

$V(t)$  沿着系统 (5) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^m e_i(t)^T \Gamma \dot{e}_i(t) = \sum_{i=1}^m e_i(t)^T \Gamma (\dot{x}_i(t) - \dot{x}_N(t)) \\ &= \sum_{i=1}^m e_i(t)^T \Gamma (f(x_i, t) - f(x_N, t)) + c \cdot \sum_{i=1}^m e_i(t)^T \Gamma \sum_{j=1}^m a_{ij} \gamma_\alpha(\Gamma(x_j - x_i)) \\ &\quad + c \cdot \sum_{i=1}^m e_i(t)^T \Gamma a_{iN} \gamma_\alpha(\Gamma(x_N - x_i)). \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m e_i(t)^T \Gamma \sum_{j=1}^m a_{ij} \gamma_\alpha(\Gamma(x_j - x_i)) + \sum_{i=1}^m e_i(t)^T \Gamma a_{iN} \gamma_\alpha(\Gamma(x_N - x_i)) \\ &= \sum_{i,j=1}^m a_{ij} e_i(t)^T \Gamma \gamma_\alpha(\Gamma(e_j - e_i)) - \sum_{i=1}^m a_{iN} e_i(t)^T \Gamma \gamma_\alpha(\Gamma e_i) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} (e_j - e_i)^T \Gamma \gamma_\alpha(\Gamma(e_j - e_i)) - \sum_{i=1}^m a_{iN} e_i^T \Gamma \gamma_\alpha(\Gamma e_i) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \phi_{\alpha+1}(\Gamma(e_j - e_i)) - \sum_{i=1}^m a_{iN} \phi_{\alpha+1}(\Gamma e_i). \end{aligned}$$

于是令

$$\begin{aligned} W_4(e) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \phi_{\alpha+1}(\Gamma(e_j - e_i)) + \sum_{i=1}^m a_{iN} \phi_{\alpha+1}(\Gamma e_i), \\ W_5(e) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_i^T \Gamma e_i, \quad W''(e) = \frac{W_4(e)}{W_5(e)^{\frac{\alpha+1}{2}}}. \end{aligned}$$

在  $W_4(e)$  和  $W_5(e)$  的定义中,  $e = (e_1^T, e_1^T, \dots, e_1^T)^T$  且  $e_i \in \mathbf{R}^n$ .

结合耦合矩阵 (7) 以及定理的条件, 可知  $\mathcal{G}(A_1)$  是无向联通的且  $b \neq 0$ . 进一步,  $W_4(e) = 0$  当且仅当  $e = 0$ ; 对于任意的  $\theta \in \mathbf{R}$  和  $\theta \neq 0$ ,  $W''(\theta e) = W''(e)$ ;  $W_5(e) = 0$  当且仅当  $e = 0$ .



定义  $\kappa^* = \min_{e^T \mathbf{1}_{mn}, \|e\|=1} W''(e)$ , 则  $\kappa^* > 0$ . 这是因为: 如果  $\kappa^* = 0$ , 必定存在  $e^*$  使得  $W_4(e^*) = 0$ , 这将导致  $e^* = 0$ , 从而与  $\|e^*\| = 1$  矛盾.

综合以上推理有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^m e_i(t)^T \Gamma (f(x_i, t) - f(x_N, t)) - c\kappa^* \cdot V(t)^{\frac{\alpha+1}{2}} \leq \lambda \sum_{i=1}^m e_i^T \Gamma e_i - c\kappa^* \cdot V(t)^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ &= 2\lambda V(t) - c\kappa^* \cdot V(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}. \end{aligned}$$

因此, 根据引理 1 及定理 3.3 最后的证明, 对于任何有界区域  $D \subseteq \mathbf{R}^n$ , 必存在  $c^*$ , 当  $c \geq c^*$  时, 网络 (5) 和 (6) 在区域  $D$  内能实现有限时间同步.

### 4 一个典型的实例

考虑如下一个简单的统一系统<sup>[18]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\beta + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\beta)x - xz + (29\beta - 1)y, \\ \dot{z} = xy - \frac{\beta + 8}{3}z, \end{cases} \quad (8)$$

这里  $\beta \in [0, 1]$ . 为方便起见, 下面仿真中选取  $\beta = 0.5$ .

考虑复杂动态网络 (1) 和 (2), 其中每个节点的动力学方程为上述统一系统. 令  $N = 5$ ,  $\alpha = 0.8$ ,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

然后, 选取  $c = 5$ , 这 5 个振子的初始值均从  $[-5, 5]$  中随机选取.

对于复杂动态网络 (1), 它的 5 个振子的  $x$  分量的演化轨迹如图 1 所示. 此外,  $y, z$  分量的图可以类似画出.

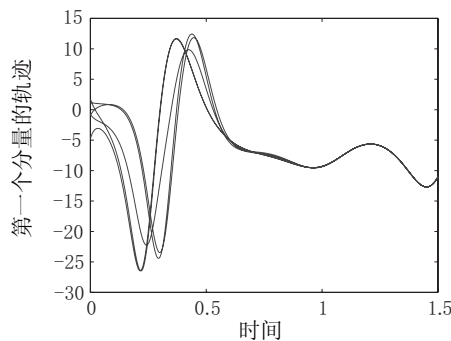


图 1 网络 (1) 中 5 个耦合统一系统的第一个分量的轨迹

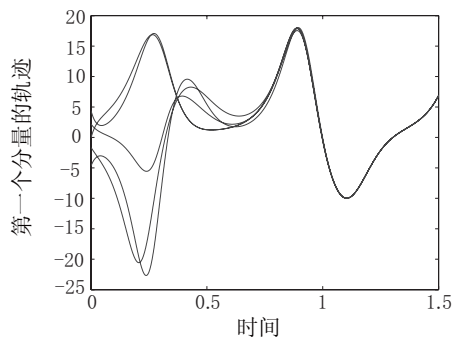


图 2 网络 (2) 中 5 个耦合统一系统的第一个分量的轨迹

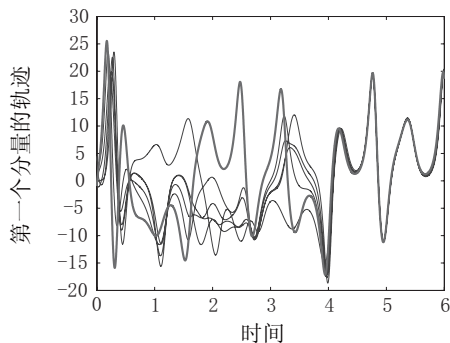


图 3 网络 (5) 和 (6) 中 6 个耦合统一系统的第一个分量的轨迹

类似的, 对于网络 (2), 它的 5 个振子的  $x$  分量的演化轨迹如图 2 所示. 此外,  $y, z$  分量的图也可以类似画出.

对于网络 (5) 和 (6), 选取每个节点为一个统一系统. 令  $N = 6$  且节点 6 为驱动节点,  $c = 5, \alpha = 0.8$ ,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这 6 个振子的初始值从  $[-5, 5]$  中随机选取. 每个节点的  $x$  分量轨迹如图 3 所示, 其中驱动节点的轨迹为红色. 类似的,  $y, z$  分量的图也可以画出.

## 5 总结

本文深入探讨了两类典型的非线性耦合的复杂动态网络的有限时间同步的问题. 在某些合适的假设条件下, 我们证明了上述复杂动态网络能够在有限时间内实现精确同步. 提出

的有限时间同步准则能够有效地避免复杂动态网络只能在无穷时刻实现同步的问题. 上述结果对于复杂网络同步的实际工程应用具有基本的重要性.

此外, 在复杂网络中还存在着其它形式的同步, 如簇同步和部分同步等. 同样的, 以往的结果对这些同步的研究也仅限于节点动态的渐进行为. 事实上, 可以考虑在复杂网络的耦合连接中引入一些简单的非线性来改善这些不同种类同步的特性. 当然, 这种特性的改善并不仅仅限于让同步行为能够在有限时间内完成. 网络的其它特性是否也可以通过在耦合连接中引入适当的非线性来加以改善是一个值得深入研究的课题.

### 参 考 文 献

- [1] Watts D J and Strogatz S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 1998, **393**(6): 440–442.
- [2] Albert R and Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 2002, **74**: 47–97.
- [3] Barabási A L and Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, **286**: 509–512.
- [4] Wu C W. Synchronization in Coupled Chaotic Circuits and Systems. Singapore: World Scientific, 2002.
- [5] Lü J and Chen G. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2005, **50**(6): 841–846.
- [6] Chen T, Liu X and Lu W. Pinning complex networks by a single controller. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2007, **54**(6): 1317–1326.
- [7] Lü J, Yu X, Chen G and Cheng D. Characterizing the synchronizability of small-world dynamical networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2004, **51**(4): 787–796.
- [8] Yu W, Chen G and Lü J. On pinning synchronization of complex dynamical networks. *Automatica*, 2009, **45**(2): 429–435.
- [9] Hong Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Sys. Contr. Lett.*, 2002, **46**(4): 231–236.
- [10] Hui Q, Haddad W M and Bhat S P. Finite-time semistability and consensus for nonlinear dynamical networks. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2008, **53**(8): 1887–1900.
- [11] Shen Y and Xia X. Semi-global finite-time observers for nonlinear systems. *Automatica*, 2008, **44**(12): 3152–3156.
- [12] Huang X, Lin W and Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2005, **41**(5): 881–888.
- [13] Pecora L M and Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(8): 821–824.
- [14] Wu C W and Chua L O. Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 1995, **42**(8): 430–447.
- [15] Lü J, Yu X and Chen G. Chaos synchronization of general complex dynamical networks. *Physica A*, 2004, **334**(1–2): 281–302.
- [16] Li X, Wang X and Chen G. Pinning a complex dynamical network to its equilibrium. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2004, **51**(10): 2074–2087.

- [17] Lü J, Liu J, Couzin I D and Levin S A. Emerging collective behaviors of animal groups. Proc. the 7th World Congr. Contr. Automation, Chongqing, China, 2008, 1060–1065.
- [18] Lü J, Chen G, Cheng D and Celikovsky S. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2002, **12**(12): 2917–2926.
- [19] Li Z and Chen G. Global synchronization and asymptotic stability of complex dynamical networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2006, **53**(1): 28–33.
- [20] Liang X, Zhang J and Xia X. Adaptive synchronization for generalized Lorenz systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2008, **53**(7): 1740–1746.
- [21] Zhou J, Lu J and Lü J. Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical networks. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2006, **51**(4): 652–656.
- [22] Wang L and Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. ArXiv: math/0701724.
- [23] Xiao F and Wang L. State agreement in finite time. ArXiv: math/0612675.
- [24] Bhat S P and Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM J. Contr. Optimization*, 2000, **38**(3): 751–766.
- [25] Li S and Tian Y. Finite time synchronization of chaotic systems. *Chaos Solitons and Fractals.*, 2003, **15**(1): 303–310.
- [26] Haimo V T. Finite time controllers. *SIAM J. Contr. Optimization*, 1986, **24**(4): 760–770.
- [27] Khalil H K. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.

## FINITE TIME SYNCHRONIZATION OF COMPLEX DYNAMICAL NETWORKS

CHEN Yao      LÜ Jinhua

*(Key Laboratory of Systems and Control, Academy of Mathematics  
and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)*

**Abstract** Complex networks are everywhere. Synchronization is a very important nonlinear phenomenon which universally exists in nature. Over the last decade, many researchers have further investigated the synchronization of complex dynamical networks, including identical synchronization, clustering synchronization, partial synchronization, and so on. The characterization of synchronous speed of complex dynamical networks in most known results is asymptotic. That is, complex networks can realize synchronization only when the time  $t$  tends to infinity. However, there are few results reported on how long complex networks can reach synchronization. Based on two kinds of typical complex dynamical networks with nonlinear coupling, this paper will further explore the finite-time synchronization of complex dynamical networks. In detail, under some suitable conditions, it is proved that the above complex dynamical networks can realize accurate synchronization within finite-time. Moreover, a typical numerical simulation is then given to validate the effectiveness of the proposed criteria for finite-time synchronization. It should be especially pointed out that the finite-time synchronization successfully overcomes the difficulty of infinite synchronous time. The above results have some important practical meaning for the real-world engineering application.

**Key words** Complex networks, synchronization, finite time, undirected graph, nonlinear coupling.