系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(8) (2009, 8), 1094–1101

非线性算子方程的变号解及其应用*

崔玉军 邹玉梅 李红玉

(山东科技大学信息科学与工程学院，青岛 266510)

摘要 利用锥理论讨论了非线性算子方程变号解的存在性，所得结果在理论上推广了相关文献的结论. 作为应用，考虑了二阶三点边值问题，得到了新的结论.

关键词 不动点指数，变号解，锥，三点边值问题.

MR(2000) 主题分类号 47H10

1 引 言

非线性算子方程存在变号解的问题在理论和应用上都是有趣的，对这一问题的研究在理论上已有一些理想的结果 [1], 在应用上也有若干很好的结论. 最近文 [1] 在假设算子 K 一致正 (存在 $u^* \in \overset{o}{P}$ 及常数 β, 使得 $Kx \geq \beta\|Kx\|u^*$, $\forall\ x \in P\backslash\{\theta\}$) 的条件下，获得了一类非线性算子方程变号解的存在性. 但算子的一致正性是一种较强的增性条件且要求锥 P 是体锥. 本文减弱了对算子 K(不要求锥 P 是体锥) 的这一限制，研究了一类非线性算子方程，得到了变号解的存在性定理. 作为应用，我们考虑了一类二阶三点边值问题，证明了二阶三点边值问题至少存在一个变号解，本质上推广了 [2] 中的结论.

在本文中我们假设 E 是 Banach 空间， P 是 E 中的正规锥. 序关系 "$\leq$" 是由锥 P 导出的. 对 $u^* > \theta$, 令 $E_{u^*} = \{x\ |x \in E$ 存在 $\lambda > 0$, 使 $-\lambda u^* \leq x \leq \lambda u^*\}$, 则 E_{u^*} 是 E 的线性子空间. 对 $x \in E_{u^*}$, 令 $\|x\|_{u^*} = \inf\{\lambda \mid \lambda > 0, -\lambda u^* \leq x \leq \lambda u^*\}$, 则 E_{u^*} 依此范数成为 Banach 空间且 $P_{u^*} = P \cap E_{u^*}$ 是 E_{u^*} 的正规体锥.

若 $x \in E\backslash(P \cup (-P))$ 满足算子方程

$$x = Ax, \tag{1.1}$$

则 x 称为算子方程 (1.1) 的变号解.

若 $x_0 \in E$, 满足 $x_0 \neq \theta$, $\lambda Ax_0 = x_0$, λ 是某实数，则称 λ 是 A 的特征值， x_0 是 A 的属于特征值 λ 的特征函数.

定义 1[3] 设 $D \subset E$, $A : D \to E$, $u^* > \theta$. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in D$, $\|x - x_0\| \leq \delta$ 时，有 $-\varepsilon u^* \leq Ax - Ax_0 \leq \varepsilon u^*$, 则称算子 A 在 D 上 u^*- 连续. 若算子 A 在 D 上的每一点处都 u^*- 连续，就称 A 在 D 上 u^*- 连续.

* 国家自然科学基金 (10671167) 资助项目.
收稿日期：2007-11-19, 收到修改稿日期：2008-09-18.

为方便起见，列出本文将用到的假设条件

(H1) $K:E\to E$ 为严格增的线性算子，对任意的 $x\in P$, 存在 $u^*>\theta$ 和常数 $\delta>0$, $\beta=\beta(x)>0$, 使得

$$\delta\|Kx\|u^*\leq Kx\leq \beta u^*,\quad \forall\, x\in P. \tag{1.2}$$

(H2) $\boldsymbol{f}:E\to E$ 为严格增算子且满足 $\boldsymbol{f}(\theta)=\theta$.

(H3) $A=K\boldsymbol{f}:E\to E_{u^*}$ 为 u^*- 连续的全连续算子． A'_θ 存在， 1 不是 A'_θ 的特征值，且 A'_θ 的小于 1 的全部特征值的代数重数之和为偶数．当 A 限制在 E_{u^*} 上时， A'_θ 强正， $r(A'_\theta)>1$, h 为 A'_θ 的属于第一特征值的正特征函数，且存在 $\alpha_0>0$, 使得 $\alpha_0u^*\leq h$.

(H4) 存在 $u_1\in -P\backslash\{\theta\}$, 使得 $u_1<Au_1$.

注 1 在条件 (H1) 中要求 $u^*>\theta$ 而不是文 [1] 中的 $u^*\in\overset{o}{P}$, 同时也没有要求锥 P 是体锥．尽管这时 P_{u^*} 是体锥且 $u^*\in\overset{o}{P}_{u^*}$, 但式子 $Kx\geq\delta\|Kx\|u^*$ 中的范数是 E 中的范数而不是 E_{u^*} 中的范数.

注 2 由于 E_{u^*} 可以连续嵌入到 E, 所以 $A:E_{u^*}\to E_{u^*}$, $A:E\to E$ 都是全连续算子.

注 3 因为 h 是 A'_θ 的属于第一特征值的正特征函数，即 $h\in P_{u^*}$, 故由 P_{u^*} 的定义知，存在常数 $\alpha_0,\ \beta_0>0$, 使得 $\alpha_0u^*\leq h\leq\beta_0u^*$.

2 主要结果

定理 1 若条件 (H1)–(H4) 成立，则算子方程 (1.1) 至少有一个变号解.

证 由于算子 K 和 $\boldsymbol{f}$ 是严格增的，故算子 A 也是严格增的．令 $u'_1=Au_1$, 由条件 (H1) 知，存在常数 $\beta_1=\beta(u_1)>0$ 满足

$$-u'_1=K(-\boldsymbol{f}(u_1))\geq\delta\|K(-\boldsymbol{f}(u_1))\|u^*=\delta\|Au_1\|u^*,$$

$$-u'_1=K(-\boldsymbol{f}(u_1))\leq\beta_1u^*,$$

和

$$Au'_1-u'_1=K(\boldsymbol{f}(Au_1)-\boldsymbol{f}(u_1))\geq\delta\|K(\boldsymbol{f}(Au_1)-\boldsymbol{f}(u_1))\|u^*=\delta\|Au'_1-u'_1\|u^*,$$

即

$$-\beta_1u^*\leq u'_1\leq-\delta\|Au_1\|u^*, \tag{2.1}$$

$$Au'_1\geq\delta\|Au'_1-u'_1\|u^*+u'_1. \tag{2.2}$$

由条件 (H3) 和 [1] 中引理 1.1, 存在 $h\in\overset{o}{P}_{u^*}$ 和 $\tau_0>0$, 使得对所有的 $\tau\in(0,\tau_0]$ 有

$$A(-\tau h)<-\tau h,\quad \tau h<A(\tau h). \tag{2.3}$$

不妨取

$$\tau_0<\frac{\delta\|Au_1\|}{\beta_0},$$

由注 3 和式 (2.1), 有 $u'_1<-\tau_0h$. 取

$$\delta_1<\min\Big\{\delta,\frac{\delta\|Au_1\|-\tau_0\beta_0}{\tau_0\|h\|+\|Au_1\|}\Big\},$$

再由注 3 和式 (2.1), 我们对任意的 $\tau\in(0,\tau_0]$, 有

$$-\tau h-u_1'\geq\delta\|Au_1\|u^*-\tau_0\beta_0u^*\geq\delta_1(\tau\|h\|+\|Au_1\|)u^*\geq\delta_1\|-\tau h-u_1'\|u^*.$$

类似可证

$$\tau h-u_1'\geq\delta_1\|\tau h-u_1'\|u^*,\quad \tau\in(0,\tau_0].$$

令

$$M=\{x\in E\mid x\geq\delta_1\|x-u_1'\|u^*+u_1'\}.$$

注意到 $u_1'\in M$, 得知 M 是 E 中的非空凸闭集，从而 M 是 E 的收缩核.

当 $x\in M$ 时，由 $\boldsymbol{f}$ 是增算子知 $\boldsymbol{f}(x)\geq\boldsymbol{f}(u_1')$. 再由条件 (H1) 知

$$Ax-Au_1'=K(\boldsymbol{f}(x)-\boldsymbol{f}(u_1'))\geq\delta_1\|K(\boldsymbol{f}(x)-\boldsymbol{f}(u_1'))\|u^*=\delta_1\|Ax-Au_1'\|u^*,$$

因而由式 (2.2), 有

$$\begin{aligned}Ax&\geq Au_1'+\delta_1\|Ax-Au_1'\|u^*\\&\geq\delta_1\|Au_1'-u_1'\|u^*+u_1'+\delta_1\|Ax-Au_1'\|u^*\\&\geq\delta_1\|Ax-u_1'\|u^*+u_1',\end{aligned}$$

即 $Ax\in M$, 所以 $A(M)\subset M$.

由 A 的严格增性和 (2.3) 式知，对任意的 $\tau\in(0,\tau_0]$, 有

$$A^2(-\tau h)<A(-\tau h),\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}A(-\tau h)-A^2(-\tau h)&=K[\boldsymbol{f}(-\tau h)-(\boldsymbol{f}(A(-\tau h))]\\&\geq\delta_1\|K[\boldsymbol{f}(-\tau h)-(\boldsymbol{f}(A(-\tau h))]\|u^*\\&=\delta_1\|A(-\tau h)-A^2(-\tau h)\|u^*.\end{aligned}\tag{2.5}$$

由于 P 是正规锥，从而序区间 $D=\{x\in E\mid u_1'\leq x\leq\theta\}$ 有界．于是可选取

$$R>\max\Big\{\frac{\tau_0\beta_0+\beta_1}{\delta_2}+\|u_1'-Au_1'\|,\ 2\sup_{x\in D}\|x\|+2\|u_1'\|\Big\},$$

其中 $\delta_2=\min\{\delta_1,\frac{1}{\|u^*\|}\}$. 对任意的 $\tau\in(0,\tau_0]$, 令

$$\Omega_\tau=\{x\in M\mid \|x-u_1'\|<R,\ 且\ Ax\not\geq\tau h\}.$$

显然 $u_1'\in\Omega_\tau$, 故 Ω_τ 为 M 的非空有界开集．由 Ω_τ 的定义明显有 $\Omega_\tau\subset\Omega_{\tau_0}$, $\tau\in(0,\tau_0]$.

令

$$S_1=\{x\in\Omega_{\tau_0}\mid x\in P\backslash\{\theta\},\ x\not\geq\tau_0h,\ x=Ax\},$$
$$S_2=\{x\in\Omega_{\tau_0}\mid x\in -P\backslash\{\theta\},\ x\geq u_1',\ x=Ax\}.$$

若 $S_1\neq\emptyset$, $S_2\neq\emptyset$, 则存在 $\xi_0>0$, 使得

$$S_1\geq\xi_0u^*,\quad S_2\leq-\xi_0u^*,$$

对任意的 $x\in S_1$, 由于 $\boldsymbol{f}$ 是严格增的， $\boldsymbol{f}(x)>\boldsymbol{f}(\theta)=\theta$, 再由条件 (H1), 存在 $\beta(x)>0$, 使得

$$\delta_1\|x\|u^*\leq x=K(\boldsymbol{f}(x))\leq\beta(x)u^*.\tag{2.6}$$

由 A 在 E 是 u^*- 连续的，所以存在 $\delta_x>0$ 使得对任意的 $y\in S_1\cap N(x,\delta_x)$, 有

$$-\frac{\delta_1\|x\|}{2}u^*\le y-x=Ay-Ax\le\frac{\delta_1\|x\|}{2}u^*,\tag{2.7}$$

其中 $N(x,\delta_x)=\{z\in E\mid\|z-x\|<\delta_x\}$. 由 (2.6), (2.7) 可得

$$y\ge\frac{\delta_1\|x\|}{2}u^*.\tag{2.8}$$

明显，$\bigcup\limits_{x\in S_1}N(x,\delta_x)$ 是 S_1 的开覆盖. 又因为 A 是全连续的，且 $AS_1=S_1\subset\Omega_{\tau_0}$ 是有界集，故 S_1 是相对紧集. 因而存在 S_1 的有限开覆盖，不失一般性，我们假设 $N(x_1,\delta_{x_1}), N(x_2,\delta_{x_2})$, $\cdots, N(x_n,\delta_{x_n})$ 是 S_1 的有限开覆盖，即

$$S_1\subset\bigcup_{i=1}^nN(x_i,\delta_{x_i}).$$

令

$$\xi_1=\frac{\delta_1}{2}\min\{\|x_1\|,\|x_2\|,\cdots,\|x_n\|\},$$

由 (2.8) 我们可得

$$S_1\ge\xi_1u^*.\tag{2.9}$$

类似地，我们可以证明存在 $\xi_2>0$, 使得

$$S_2\le-\xi_2u^*.\tag{2.10}$$

令 $\xi_0=\min\{\xi_1,\ \xi_2\}$, 由 (2.9), (2.10) 有

$$S_1\ge\xi_0u^*,\quad S_2\le-\xi_0u^*.\tag{2.11}$$

取

$$\tau_1=\min\Big\{\tau_0,\frac{1}{2}\xi_0\Big\}.$$

令

$$G_1=\{x\in\Omega_{\tau_1}\mid \text{存在 }\eta>0,\text{ 使得 }Ax\le-\tau_1h-\eta u^*\},$$
$$G_2=\{x\in\Omega_{\tau_1}\mid Ax\not\ge\tau_1h, Ax\not\le-\tau_1h\},$$

由上面的讨论知，Ω_{τ_1} 是 M 中的有界开集，$G_1\subset\Omega_{\tau_1}, G_2\subset\Omega_{\tau_1}$ 是 M 中的非空有界开集，且若 $S_1\ne\emptyset$ 时，有 $S_1\cap\Omega_{\tau_1}=\emptyset$.

若 $x\in\Omega_{\tau_1}$ 是 A 的不动点，则有两种情况

(1) $x\le-\tau_1h$. 这时由 (2.5) 得 $x=Ax=A^2x\le A^2(-\tau_1h)\le A(-\tau_1h)-\delta\|A(-\tau_1h)-A^2(-\tau_1h)\|u^*\le-\tau_1h-\delta\|A(-\tau_1h)-A^2(-\tau_1h)\|u^*$, 故 $x\in G_1$;

(2) $x\not\le-\tau_1h$. 这时，由于 $x=Ax$, 我们有 $Ax\not\le-\tau_1h$, 故 $x\in G_2$. 由此可知，A 在 $\Omega_{\tau_1}\backslash(G_1\cup G_2)$ 上没有不动点. 于是，根据拓扑度的切除性，我们有

$$i(A,\Omega_{\tau_1},M)=i(A,G_1,M)+i(A,G_2,M).\tag{2.12}$$

若有 $x_0 \in \partial G_1$ 及 $0 \le t_1 \le 1$, 满足 $x_0 = t_1 A x_0 + (1-t_1)u_1'$, 则由 $x_0 \in \overline{G_1}$ 知 $u_1' \le x_0 < -\tau_1 h$, 从而 $x_0 \le Ax_0 \le A(-\tau_1 h) < -\tau_1 h$. 于是由 (2.5), 我们有

$$Ax_0 \le A^2 x_0 \le A^2(-\tau_1 h) \le -\tau_1 h - \delta\|A(-\tau_1 h) - A^2(-\tau_1 h)\| u^*,$$

故 $x_0 \in G_1$, 此与 $x_0 \in \partial G_1$ 矛盾. 因此由拓扑度的同伦不变性和正规性得

$$i(A, G_1, M) = i(u_1', G_1, M) = 1. \tag{2.13}$$

下面证明

$$x - Ax \ne tu^*, \quad \forall\ (t,x) \in [0,+\infty) \times \partial\Omega_{\tau_1}. \tag{2.14}$$

反证法，若 (2.14) 式不成立，则存在 $x_1 \in \partial\Omega_{\tau_1}$, $t_1 \in [0,+\infty)$, 使得

$$x_1 = Ax_1 + t_1 u^*. \tag{2.15}$$

令 $B_1 = \{x \in \partial\Omega_{\tau_1} | Ax \ge \tau_1 h\}$, $B_2 = \{x \in \partial\Omega_{\tau_1} | Ax \not\ge \tau_1 h\}$, 则 $\partial\Omega_{\tau_1} = B_1 \cup B_2$. 若 $x_0 \in B_1$, 则 $Ax_1 \ge \tau_1 h$, 再由 (2.15) 式得 $x_1 \ge \tau_1 h$, 易知 $x_1 > \tau_1 h$ (否则 $x_1 = \tau_1 h$, 于是有 $x_1 = Ax_1 + t_1 u^* = A(\tau_1 h) + t_1 u^* > \tau_1 h + t_1 u^* > \tau_1 h$, 矛盾). 由条件 (H1) 有

$$Ax_1 \ge \delta\|Ax_1 - A(\tau_1 h)\| u^* + A(\tau_1 h) \ge \tau_1 h + \delta\|Ax_1 - A(\tau_1 h)\| u^*.$$

于是, 由 A 的 u^*- 连续性, 存在 δ_2, 使得当 $\|x - x_1\| < \delta_2$ 时，$Ax \ge Ax_1 - \frac{1}{2}\delta\|Ax_1 - A(\tau_1 h)\| u^* \ge \tau_1 h + \frac{1}{2}\delta\|Ax_1 - A(\tau_1 h)\| u^*$. 而 $x_1 \in \partial\Omega_{\tau_1}$, 故有序列 $\{y_n\} \subset \Omega_{\tau_1}$, 使得 $y_n \to x_1 (n \to \infty)$. 于是当 n 充分大时，有 $Ay_n \ge \tau_1 h + \frac{1}{2}\delta\|Ax_1 - A(\tau_1 h)\| u^*$, 这与 $y_n \in \Omega_{\tau_1}(Ay_n \not\ge \tau_1 h)$ 矛盾. 若 $x_1 \in B_2$, 则 $\|x_1 - u_1'\| = R$, 由条件 (H1) 及 (2.15), 可以得到

$$\begin{aligned}
x_1 - u_1' &= Ax_1 + t_1 u^* - u_1' \ge Ax_1 - Au_1' + t_1 u^* \\
&= K(\boldsymbol{f}(x_1) - \boldsymbol{f}(u_1')) + t_1 u^* \ge \delta\|Ax_1 - Au_1'\| u^* + t_1 u^* \\
&\ge \delta_2\|Ax_1 - Au_1'\| u^* + t_1 \delta_2 \|u^*\| u^* \ge \delta_2 \|Ax_1 - Au_1' + t_1 u^*\| u^* \\
&\ge \delta_2 \|x_1 - Au_1'\| u^* \ge \delta_2(\|x_1 - u_1'\| - \|u_1' - Au_1'\|) u^* \\
&\ge \tau_0 h - u_1' \ge \tau_1 h - u_1',
\end{aligned}$$

即 $x_1 \ge \tau_1 h$, 从而 $Ax_1 \ge A(\tau_1 h) > \tau_1 h$, 这与 $x_1 \in B_2$ 矛盾. 由上证明了 (2.14) 式成立.

而 (2.14) 式隐含着 A 在 $\partial\Omega_{\tau_1}$ 上无不动点，由此结合 $A(M) \subset M$ 知 A 在 Ω_{τ_1} 上关于 M 的不动点指数 $i(A, \Omega_{\tau_1}, M)$ 存在. 令 $a = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}_{\tau_1}} \|Ax\|$, $b = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}_{\tau_1}} \|x\|$, 其中 $\overline{\Omega}_{\tau_1} = \Omega_{\tau_1} \cup \partial\Omega_{\tau_1}$. 选取 p, q, 使得 $q\|u^*\| > p > a + b$, 则对任意的 $x \in \overline{\Omega}_{\tau_1}$, 有 $Ax + qu^* \ge Au_1' + qu^* \ge u_1' + qu^* > u_1'$, 即 $Ax + qu^* \in M$, 且 $\|Ax + qu^*\| \ge q\|u^*\| - \|Ax\| > p - a > b \ge \|x\|$, 由此知不动点指数 $i(A + qu^*, \Omega_{\tau_1}, M)$ 存在，并且

$$i(A + qu^*, \Omega_{\tau_1}, M) = 0. \tag{2.16}$$

对任意的 $(t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}_{\tau_1}$, 令 $H(t,x) = (1-t)Ax + t(Ax + qu^*)$, 则有 $H(t,x) \in M$. 由 (2.14) 式易证 $H(t,x) \ne x$, $\forall\ (t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega_{\tau_1}$, 于是通过 (2.16) 式及不动点指数的同伦不变性，得

$$i(A, \Omega_{\tau_1}, M) = 0. \tag{2.17}$$

由条件 (H3) 知， θ 是 A 的孤立不动点 [4], 再由文 [5] 可知，存在 θ 充分小的邻域 $B(\theta)\subset \Omega_{\tau_1}$, 使得 θ 是 A 在 $B(\theta)$ 内的唯一不动点，且有

$$i(A,B(\theta),M)=1. \tag{2.18}$$

由 (2.12), (2.13), (2.17) 和 (2.18), 并根据不动点指数的可加性有

$$i(A,G_2\backslash B(\theta),M)=i(A,\Omega_{\tau_1},M)-i(A,G_1,M)-i(A,B(\theta),M)=-2,$$

因而 A 在 $G_2\backslash B(\theta)$ 至少有一个不动点 x^*, 注意到 (2.11) 式和 Ω_{τ_1},G_1,G_2 的定义，可知 x^* 是 A 的变号解.

注 4 本文利用一个下解得到了变号解的存在性，并且从定理 1 的证明过程中不难发现 θ 也是方程 (1.1) 的解，利用 (2.13) 式及不动点指数的可解性还可以得到一个负解，

推论 1 若定理 1 的条件成立，则算子方程 (1.1) 至少有三个不同的解，即一个负解，一个零解和一个变号解.

类似于定理 1 的证明，我们还可以得到以下定理.

定理 2 若条件 (H1), (H2) 和 (H3) 成立，又设存在 $u_1\in P\backslash\{\theta\}$, 使得 $Au_1<u_1$, 则算子方程 (1.1) 至少有三个不同的解，即一个正解，一个零解和一个变号解.

3 应 用

本节考虑下面二阶三点边值问题

$$x''+f(x)=0,\quad 0\le t\le 1, \tag{3.1}$$

$$x(0)=0,\quad x(1)=\alpha x(\eta), \tag{3.2}$$

其中 $0<\alpha<1,\ 0<\eta<1,\ f\in C[R,R]$. 二阶三点边值问题 (3.1), (3.2) 等价于下面的 Hammerstein 型非线性积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s, \tag{3.3}$$

其中

$$G(t,s)=k(t,s)+\frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}k(\eta,s), \tag{3.4}$$

$$k(t,s)=\begin{cases} t(1-s), & 0\le t\le s\le 1,\\ s(1-t), & 0\le s\le t\le 1.\end{cases} \tag{3.5}$$

本节需要以下假设条件

(F1) $f(u):R\to R$ 连续且严格增， $f(0)=0$.

(F2) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=\beta$, 且存在 $n_0\in N$, 使得 $\lambda_{2n_0}<\beta<\lambda_{2n_0+1}$, 其中 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$ 为 $\sin\sqrt{x}=\alpha\sin\eta\sqrt{x}$ 的正解序列.

(F3) $\lim\limits_{u\to -\infty}\frac{f(u)}{u}<2(1-\alpha\eta)$.

定义线性算子 K 如下

$$(Kx)(t)=\int_0^1 G(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\quad x\in C[0,1].$$

定理 3 假设 (F1)–(F3) 成立，则边值问题 (3.1), (3.2) 至少有三个不同的解，即一个正解，一个零解和一个变号解.

证 令 $E = C[0,1]$, E 的范数记为 $\|\cdot\|$, $P = \{x \mid x(t) \geq 0,\ \forall\ t \in [0,1]\}$, $u^* = t$, $\boldsymbol{f}x = f(x(t)), x \in E$. 显然， $K, \boldsymbol{f} : E \to E$.

由函数 $k(t,s)$ 的性质容易推出

$$G(t,s) \geq \delta t G(\tau,s), \quad \forall\ \tau, t, s \in [0,1], \tag{3.6}$$

其中

$$\delta = \frac{\alpha\eta(1-\eta)}{1+\alpha-\alpha\eta}.$$

(1) 证明 (H1) 满足. 由 $G(t,s) > 0$, $\forall\ t, s \in (0,1)$, 知 K 是严格增的. 对任意的 $x \in P$, 利用式 (3.6), 有

$$(Kx)(t) = \int_0^1 G(t,s)x(s)\mathrm{d}s \geq \delta t \int_0^1 G(\tau,s)x(s)\mathrm{d}s = \delta t(Kx)(\tau), \quad \forall\ \tau \in [0,1],$$

这意味着 $Kx \geq \delta t\|Kx\|$, 同时说明 $K : E_{u^*} \to E_{u^*}$ 是强正的. 对任意的 $x \in P$, 由 (3.4) 知

$$Kx(t) = \int_0^1 G(t,s)x(s)\mathrm{d}s \leq \frac{1-\alpha\eta+\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^1 x(s)\mathrm{d}s \cdot t.$$

即 (H1) 满足. 而 (H2) 直接由条件 (F1) 和 $\boldsymbol{f}$ 的定义推出.

(2) 证明 (H3) 满足. 令 $Ax = A_1x + A_2x$, 其中

$$A_1x = \int_0^1 k(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s, \quad A_2x = \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 k(\eta,s)f(x(s))\mathrm{d}s.$$

容易证明 $A_1, A_2 : E \to E$ 是全连续的. 由 A_2 的表达式易知， $A_2 : E \to E_{u^*}$ 也是全连续的. 注意到函数 $k(t,s)$ 的表达式，易证 $A_1 : E \to X$ 是全连续的，其中 $X = \{x \in C^1[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, 范数为 $|x|_1 = \|x'\|$. 容易看出 $X \subset E_{t(1-t)} \subset E_{u^*}(u^* = t)$. 因为相对于范数 $|\cdot|_1$ 的收敛和相对于范数 $\|\cdot\|_{u^*}$ 的收敛都意味着在 $[0,1]$ 上逐点收敛，由闭图象定理知嵌入映射是连续的，因而 $A_2 : E \to E_{u^*}$ 是全连续的. 故 $A = A_1 + A_2 : E \to E_{u^*}$ 是全连续的.

由文 [2] 引理 4 知， $A'_\theta = \beta K$, 类似于以上证明，知 A'_θ 是强正的， $r(A'_\theta) > 1$, 1 不是 A'_θ 的特征值，且 A'_θ 的小于 1 的全部特征值的代数重数之和为偶数.

令 h 为 A'_θ 的属于第一特征值的正特征函数，即 h 满足 $h = \lambda_1 A'_\theta h = \alpha\lambda_1 Kh$. 由于 $Kh \geq \delta t\|Kh\|$, 因此存在 $\alpha_0 > 0$, 使得 $\alpha_0 u^* \leq h$. 条件 (H3) 满足.

(3) 证明 (H4) 满足. 由于

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{f(u)}{u} < 2(1-\alpha\eta),$$

故存在充分大的 $M > 0$, 使得 $\frac{f(-M)}{-M} < 2(1-\alpha\eta)$, 令 $u_1 = -M$, 由文 [2] 可证 $(Au_1)(t) > u_1(t), \quad t \in [0,1]$.

注 5 文 [2] 中也讨论了二阶三点边值问题变号解的存在性，但文 [2] 中要求

$$\lim_{|u|\to+\infty}\frac{f(u)}{u} < 2(1-\alpha\eta),$$

而本文要求

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{f(u)}{u}<2(1-\alpha\eta),$$

减弱了定理的条件，仍然得到了变号解的存在，且文 [2] 中的方法不适用于本文.

注 6　应用文 [5] 定理 3.1 的方法，可以把条件 (F1) 中 f 的严格增性放宽为满足单边李普希茨条件.

参 考 文 献

[1] 张克梅，孙经先．非线性算子方程变号解的存在性及其应用．数学学报， 2003, **46**(3): 815–822.

[2] Xu Xian, Sun Jingxian. On sign-changing solution for some three-point boundary value problems. *Nonlinear Analysis*, 2004, **59**: 491–505.

[3] 李福义． Amann 三解定理的改进及其应用．系统科学与数学， 1999, **19**(4): 403–406.

[4] 郭大钧．非线性泛函分析．济南：山东科技出版社， 1985.

[5] Xu Xian, Regan D O. A three solutions theorem for nonlinear operator equations in ordered Banach spaces. *Positivity*, 2006, **10**(4): 647–667.

EXISTENCE OF SIGN-CHANGING SOLUTIONS FOR NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS AND ITS APPLICATIONS

CUI Yujun　　ZOU Yumei　　LI Hongyu

(*College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao* 266510)

Abstract　In this paper, the existence of sign-changing solutions for nonlinear operator equations is discussed. The abstract results generalize the existing ones. As an application, we investigate the existence of sign-changing solutions for some three-point boundary value problem is investigated.

Key words　Fixed point index, sign-changing solution, cone, three-point boundary value problem.