

# 基于第 2 代 Curvelet 变换的彩色图像去噪

杨居义

(绵阳职业技术学院计算机科学系, 绵阳 621000)

**摘要:** 提出基于第 2 代 Curvelet 变换的彩色图像去噪算法, 克服小波变换在表达彩色图像边缘的方向特性等方面的内在缺陷。该算法适合分析二维彩色图像中的曲线或直线状边缘特征, 且具有较高的逼近精度和稀疏表达能力。通过 Matlab 对 512×512 的 Lena 和 Babon 彩色图像进行仿真实验, 结果表明, 该算法在视觉效果和性能指标方面都优于小波和 Ridgelet 算法。

**关键词:** 第 2 代 Curvelet 变换; 彩色图像去噪; 小波变换; Ridgelet 变换

## Color Image Denoising Based on the Second Generation Curvelet Transform

YANG Ju-yi

(Department of Computer Science, Mianyang Institute of Vocational Technology, Mianyang 621000)

**【Abstract】** This paper presents an algorithm of color image denoising based on the second generation Curvelet transform. The wavelet transform has inherent defect in describing directional characteristics of color picture edge. The new algorithm overcomes these defects and is more suitable for analyzing the edge characteristic of curves or straight lines in two-dimensional image. It has better approaching accuracy and spares ability of expression. Results of simulation experiment to 512×512 Lena and Babon color image show the new algorithm is superior to wavelet and Ridgelet algorithm either in visual effect or in performance criteria.

**【Key words】** the second generation Curvelet transform; color image denoising; wavelet transform; Ridgelet transform

### 1 概述

近几年来, 运用小波变换对彩色图像进行去噪处理已成为一个热门的研究方向。对彩色图像而言, 边缘的不连续性是按空间分布的, 这种奇异性影响了小波展开级数中的许多项, 因此, 小波变换在处理彩色图像边缘时的效果不是很理想。为了寻找更好的变换方法, 研究者提出了第 1 代 Curvelet 变换<sup>[1-2]</sup>, 它以 Ridgelet 理论为基础, 通过足够小的分块将曲线近似到每个块中的直线, 然后利用局部的 Ridgelet 分析其特性。它由一种特殊的滤波过程和多尺度 Ridgelet 变换组合而成, 其实现要经过子带分解、平滑分块、正规化和脊波变换一系列步骤实现, 该实现方法参数多、冗余大, 不可避免地存在由于分块所带来的分块效应。第 2 代 Curvelet 变换理论采用了新的框架结构<sup>[2-3]</sup>, 与第 1 代 Curvelet 变换在结构上已经完全不同, 而且与 Ridgelet 理论没有关系, 实现过程也无需用到 Ridgelet, 两者之间的相同点仅在于紧支撑、框架等抽象的数学意义。本文提出一种基于第 2 代 Curvelet 变换的彩色图像去噪算法, 该算法参数少, 实现更加简单, 运算速度也得到提高。

### 2 算理论

#### 2.1 连续 Curvelet 变换理论

连续 Curvelet 变换和小波变换、Ridgelet 变换理论都属于稀疏理论的范畴之内, 采用基函数与信号(或函数)的内积形式实现信号(或函数)的稀疏表示, Curvelet 变换表示为<sup>[2-4]</sup>

$$c(j, l, k) := \langle f, \Phi_{j,l,k} \rangle \quad (1)$$

其中,  $\Phi_{j,l,k}$  表示 Curvelet 函数;  $j, l, k$  分别表示尺度、方向、位置参量。

Curvelet 变换在频域内实现, 采用频域中的窗函数  $U$  来实现  $\varphi$  在频域中的表示。定义一对窗函数: 径向窗函数  $W(r)$ ,  $r \in (1/2, 2)$  和角度窗函数  $V(t)$ ,  $t \in [-1, 1]$ 。它们都满足如下可允许条件:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W^2(2^j r) = 1, r \in (\frac{3}{4}, \frac{3}{2}) \quad (2)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} V^2(t-1) = 1, t \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad (3)$$

对于每一个  $j \geq j_0$ , 在频域中定义频窗  $U_j$  为

$$U_j(r, \theta) = 2^{-\frac{3j}{4}} W(2^{-j} r) V(\frac{2^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \theta}{2\pi}) \quad (4)$$

其中,  $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$  是  $\frac{j}{2}$  的整数部分。 $U_j$  的支撑区间是受  $W$  和  $V$  支撑区间限制获得的楔形区域, Curvelet 变换频率的空间区域分块如图 1 所示, 其中的阴影部分表示一个楔形窗, 为 Curvelet 的支撑区间。

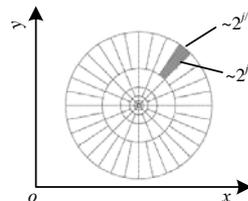


图 1 Curvelet 变换频率的空间区域分块

**作者简介:** 杨居义(1959—), 男, 副教授、高级工程师, 主研方向: 小波理论与应用, 智能控制与故障诊断

**收稿日期:** 2009-08-01 **E-mail:** yangjuyi591218@163.com

楔形区域符合各向异性尺度的特性, 设 $\varphi_j(\omega)=U_j(\omega)$ , 得知 $j$ 尺度上的 $\varphi_j$ , 其他 $2^j$ 尺度上的 Curvelet 均可由 $\varphi_j$ 通过旋转和平移获得, 定义如下:

(1)均匀的旋转角度序列 $\theta_l=2\pi \cdot 2^{-l/2} \cdot l, l=0,1,\dots, 0 \leq \theta_l < 2\pi$ .

(2)平移参数 $k=(k_1, k_2) \in Z^2$ .

通过以上概念, 定义在尺度 $2^j$ , 方向 $\theta_l$ , 平移参数 $(k_1, k_2)$ 处的 Curvelet 如下:

$$\Phi_{j,l,k}(x) = \Phi_j(R_{\theta_l}(x-x_k^{(j,l)})) \quad (5)$$

其中,  $x_k^{(j,l)}=R_{\theta_l}^{-1}(k_1 \cdot 2^j, k_2 \cdot 2^{j/2})$ ;  $R_{\theta_l}$ 由 $\theta_l$ 旋转获得. Curvelet 变换可表示为

$$c(j, l, k) = \langle f, \Phi_{j,l,k} \rangle = \int_{R^2} f(x) \overline{\Phi_{j,l,k}(x)} dx \quad (6)$$

通过 Plancherel 理论, 由(6)式可推出:

$$C(j, l, k) := \frac{1}{2\pi^2} \int \tilde{f}(\omega) \overline{\Phi_{j,l,k}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi^2} \int \tilde{f}(\omega) U_j(R_{\theta_l}\omega) e^{j\langle x_k^{(j,l)}, \omega \rangle} d\omega \quad (7)$$

## 2.2 离散 Curvelet 变换理论

以笛卡尔坐标系下的  $f[t_1, t_2](0 \leq t_1, t_2 < n)$  为输入, curvelet 变换的离散形式<sup>[5-6]</sup>为

$$c^D(j, l, k) := \sum_{0 \leq t_1, t_2 < n} f[t_1, t_2] \Phi_{j,l,k}^D(t_1, t_2) \quad (8)$$

采用一带通函数 $\psi(\omega) = \sqrt{\Phi(\omega_1/2)^2 - \Phi(\omega_1)^2}$ , 定义:

$$\Psi_j(\omega_1) = \psi(2^{-j}\omega_1) \quad (9)$$

用式(9)实现多尺度分割, 对于每一个 $\omega=(\omega_1, \omega_2)$ ,  $\omega_1 > 0$ , 则有:

$$V_j(S_{\theta_l}\omega) = V(2^{l/2}\omega_2/\omega_1 - 1) \quad (10)$$

其中,  $S_{\theta_l}$ 是一个剪切矩阵,

$$S_{\theta_l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\tan \theta & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $\theta_l$ 并非等间距, 但斜率是等间距的. 当尺度 $j=6, l=8$ 时, 离散 curvelet 变换的尺度角度分割块示意图如图 2 所示.

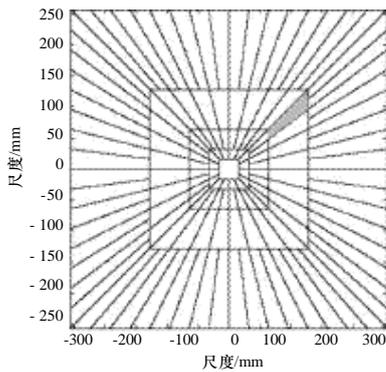


图 2 离散 Curvelet 变换的尺度角度分块示意图

定义:

$$\tilde{U}_j(\omega) := \Psi_j(\omega_1) V_j(\omega) \quad (11)$$

对于每一个 $\theta_l \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ , 有如下公式:

$$\tilde{U}_{j,l}(\omega) := \Psi_j(\omega_1) V_j(S_{\theta_l}\omega) = \tilde{U}_j(S_{\theta_l}\omega) \quad (12)$$

## 3 算法描述与流程

基于第 2 代 Curvelet 变换的彩色图像去噪与小波变换的去噪相比, 具有如下优势:

(1)小波变换是采用“块基”来逼近 $C^2$ (2次连续可微)的奇异点, 是各向同性的, 并没有考虑奇异点的几何形状; 而

Curvelet 变换则采用“楔形基”来逼近 $C^2$ 的奇异点.

(2)小波分解每个尺度下只具有水平、垂直、45°角 3 个方向子带彩色图像, 而 Curvelet 分解每个尺度下有任意角度的子带彩色图像.

(3)Curvelet 变换比小波变换具有更好的稀疏表达能力, 它能更好地表示彩色图像.

(4)Curvelet 变换后能量更加集中, 更利于跟踪和分析彩色图像的重要特征.

以 2 幅彩色图像的第 2 代 Curvelet 变换去噪为例, 其具体实现步骤如下:

(1)对 2 幅原彩色图像进行 Curvelet 变换, 得到不同分辨率层次下的一系列低频和高频子带系数.

(2)对低频子带系数进行分段阈值去噪, 对各尺度高频子带系数进行阈值去噪.

(3)对所有子带系数进行 Curvelet 逆变换(即进行彩色图像重构), 得到去噪后的彩色图像.

具体 Curvelet 变换彩色图像去噪流程如图 3 所示.

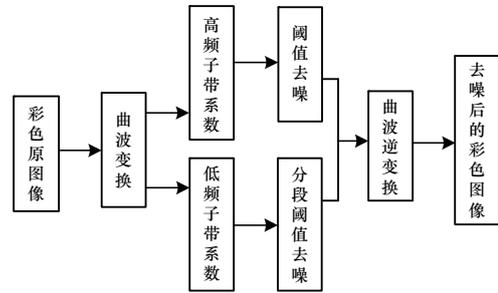


图 3 Curvelet 变换彩色图像去噪流程

## 4 仿真实验与分析

### 4.1 仿真实验

本文采用  $512 \times 512$  的 Lena 和 Babon 彩色图像在 Matlab 环境下进行仿真实验, 程序用 VisualC++ 编程, 仿真效果如图 4 所示. 图 4(a)为 Lena(加入高斯噪声  $\delta=20$ )和 Babon(加入高斯噪声  $\delta=15$ )彩色原图像.



图 4 彩色图像去噪效果

## 4.2 实验结果分析

从图 4 所示的彩色图像去噪效果可以看出,小波变换和脊波变换的去噪图像虽然也能得到比较清晰的图像,但在一些边缘处出现了明显的模糊现象,而本文提出的去噪算法则能得到清晰边缘的彩色图像。虽然不同尺度层数分解对 Curvelet 去噪彩色图像有影响,当层数较少,如 2 层、3 层时,得到的去噪彩色图像仍然比较模糊,存在扭曲的现象,但随着分解层数增加,模糊、扭曲现象逐渐消失,彩色图像越来越清晰。分解层数也不能取得过大,过大会引起失真。本实验最高分解到 5 层,从视觉效果来看,4 层、5 层分解的彩色图像去噪效果基本差不多。

采用峰值信噪比(PSNR)对 2 幅含噪彩色图像(Lena 和 Babon)进行比较,PSNR 计算公式如下<sup>[2,6]</sup>:

$$PSNR=10 \lg \left[ \frac{255^2}{\frac{1}{M \times N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} (x(m,n) - x^*(m,n))^2} \right] \quad (13)$$

其中,  $x(m,n)$  和  $x^*(m,n)$  分别为含噪彩色图像与去噪后彩色图像的第  $(m,n)$  个像素的灰度值。对于图 4,不同去噪方法的 PSNR 值如表 1 所示。

表 1 不同去噪方法的 PSNR 值比较

去噪方法	PSNR/dB	
	Lena	Babon
小波去噪	22.16	22.56
Ridgelet 去噪	24.38	23.87
2 层 Curvelet 去噪	30.23	30.43
3 层 Curvelet 去噪	30.65	30.74
4 层 Curvelet 去噪	32.63	32.57
5 层 Curvelet 去噪	32.94	32.78

可以看出,Ridgelet 变换对于原图像中的边缘恢复视觉效果好于传统的小波变换的去噪方法。但是,Curvelet 变换的去噪彩色图像 PSNR 明显高于小波变换和 Ridgelet 变换,而且 Curvelet 重建彩色图像不会产生如小波重建彩色图像那样

边缘的模糊,在二维情况下,当彩色图像具有奇异性曲线并且曲线是二次可微的,则曲线波可以自适应地“跟踪”该奇异曲线。因此,Curvelet 变换去噪明显强于小波和 Ridgelet 变换去噪。

## 5 结束语

本文提出一种基于第 2 代 Curvelet 变换的彩色图像去噪算法,比第 1 代 Curvelet 变换实现起来更简单、便于理解,对于具有光滑曲线奇异性的目标函数来说,本算法具有稳定、高效及近于最优的表示。实验证明,本文算法无论是在峰值信噪比,还是对彩色图像边缘的处理效果上,都优于小波变换和 Ridgelet 变换。在中等程度或高噪声背景下,采用本文算法的去噪彩色图像在视觉上更清晰,对于恢复边缘和微弱的线性及曲线结构均非常有效。

## 参考文献

- [1] 李晖晖, 郭雷, 刘航. 基于二代 Curvelet 变换的图像融合研究[J]. 光学学报, 2006, 26(5): 657-662.
- [2] 闫敬文, 屈小波. 超小波分析及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
- [3] Starck J L, Candes E, Donoho D. The Curvelet Transform for Image Denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(6): 670-684.
- [4] Briese C. Three-dimensional Modeling of Breaklines from Airborne Laser Scanner Data[J]. International Archives of Photogrammetry Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 2004, 35(3): 1097-1102.
- [5] Candes E J. Ridgelets: Theory and Applications[D]. Palo Alto, California, USA: Stanford University, 1998.
- [6] Starck J, Candes E J, Donoho D L. The Curvelet Transform for Image Denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(6): 670-684.

编辑 顾姣健

(上接第 206 页)

在编码速度提高 10 倍多的情况下,PSNR 增加了 0.22 dB。

表 2 本文算法与其他算法的实验结果对比

算法	D 块的搜索范围	PSNR/dB	编码时间/s
本文算法	52 × 80 × 8	31.92	3.21
遗传算法和分形图像编码算法的结合	50 × 80 × 8	30.40	3.25
分形图像编码算法	62001 × 8	31.70	31.50

几种算法的解码图像对比见图 3。本文算法获得的图像质量与结合传统遗传算法的分形图像编码相比有较大提高。



图 3 几种算法的解码图像对比

## 5 结束语

本文在考虑分形图像编码中图像块的特征和对比度因子约束的基础上对遗传算法进行了改进,利用图像块的特征,改进遗传算法的最优解搜索能力,结合对比度因子的约束,限制求解过程中 D 块的搜索范围。由于分形图像编码和遗传

算法都具有并行能力,随着并行计算的发展,基于改进遗传算法的分形图像编码将拥有更好的应用前景。

## 参考文献

- [1] Barnsley M F, Sloan A D. A Better Way to Compress Images[J]. Byte Magazine, 1988, 13(1): 215-223.
- [2] Jacquin A E. A Fractal Theory of Iterated Markov Operators with Applications to Digital Image Coding[D]. Atlanta, GA, USA: Georgia Institute of Technology, 1989.
- [3] 何传江, 黄席樾. 基于图像块叉迹的快速分形图像编码算法[J]. 计算机学报, 2005, 28(10): 1753-1759.
- [4] 王小平, 曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.
- [5] Jacquin A E. Image Coding Based on a Fractal Theory of Iterated Contractive Image Transformations[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1992, 1(1): 18-30.
- [6] 何传江, 蒋海军, 黄席樾. 基于平均偏差排序的快速分形图像编码[J]. 中国图象图形学报, 2004, 9(9): 1130-1134.
- [7] 何传江, 李高平. 分形图像编码的改进算法[J]. 计算机仿真, 2004, 21(8): 66-69.

编辑 顾姣健

