

# 多目标随机运输路径选择的频域优化模型

郑龙<sup>1,2</sup>, 周经伦<sup>1</sup>, 孙权<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学信息系统与管理学院, 长沙 410073; 2. 麦吉尔大学计算机科学院, 蒙特利尔 H3A2A7)

**摘要:** 根据运输系统的随机特性, 讨论时间、损耗和流量等优化目标之间的函数关系, 采用概率论方法提出一种用于搜索时变、随机运输网络中多目标路径优化的频域生成图模型(FSG), 设计相应的优化算法。FSG 通过时频域间概率函数的相互转化, 可定量分析 O-D 对之间多目标路径选择概率的动态变化过程, 处理连续概率分布和离散经验分布。结合 Matlab 给出的算例验证了该算法的可行性和有效性。

**关键词:** 随机运输; 频域生成图; 多目标; 路径优化

## Frequency-domain Optimization Model of Multi-objective Stochastic Transportation Path Choice

ZHENG Long<sup>1,2</sup>, ZHOU Jing-lun<sup>1</sup>, SUN Quan<sup>1</sup>

(1. School of Information System & Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073;

2. School of Computer Science, McGill University, Montreal H3A2A7)

**【Abstract】** Based on stochastic property of the transportation system, the function relation between stochastic travel time, the loss, and the flow are studied. A Frequency-domain Spanning Graph(FSG) model for searching multi-objective optimal path of the time-dependent stochastic transportation network is presented, and the corresponding algorithm is designed to deal with the model. Through the mutual transformation of probability function between time-domain and frequency-domain, O-D multi-objective probability change is capable of quantitative analysis. Continuous probability distribution and discrete probability distribution can be dealt with in the model. Experiment with Matlab proves the feasibility and effectiveness of the algorithm.

**【Key words】** stochastic transportation; Frequency-domain Spanning Graph(FSG); multi-objective; path optimization

### 1 概述

在现代交通运输中, 由于交通事故、道路拥挤、天气变化、非线性奇异吸引子产生的“幽灵阻塞”等偶发因素常引起运输行驶速度和流量的改变, 甚至在平时的抢险救灾、战时物资运输中更常出现损耗情况, 所以现代运输及其网络呈现出高度复杂和瞬息万变的局面, 各类信息的定量工作难度越来越大, 随机性普遍存在。自文献[1]首次提出运输网络中车辆路径问题以来, 关于随机旅行时间的车辆路径选择的研究成果还不多, 文献[2-3]对该问题进行了研究, 实际上只是对随机旅行时间的多重旅行商问题进行了探讨。目前的运输路径优化研究, 主要集中在随机运输网络的单目标优化, 对随机、时变运输网络的多目标路径选择问题研究还很少; 且当前处理方法也主要是传统的均值求解和分布求解, 即前者得到均值最小条件的最优路, 该方法虽然简便, 但同时丢失大量随机运输网络的相关信息, 且有时所求解与实际不符; 后者按照概率分布来予以描述, 能较全面地反映运输状态信息, 但处理复杂、信息量大, 目前主要集中在分布函数的随机问题上, 对无分布函数的经验分布问题研究还很少。因此, 结合 2 种解法优点, 研究新的频域优化方法, 快速、全面地进行路径优化在随机运输中更有意义。为此本文以随机、时变运输网络中的多目标路径选择问题进行频域优化研究。

### 2 模型建立及其性质

传统的时域随机网络的路径优化模型<sup>[4]</sup>, 是建立从运输起点  $O$  到终点  $D$  的网络图  $G=(V, E, T)$ 。其中,  $V$  代表节点

集(表示交通枢纽、城镇或特殊节点等);  $E$  为弧集(路段);  $T$  代表弧的旅行时间权集(通过路段的时间)。旅行时间  $T$  由于受各种因素影响, 是一个随机变量, 其概率密度函数为  $f(t)$ (可为连续函数或离散函数), 优化目标是搜索具有最小时间权的路径或最小期望时间权的路径。在很多实际情况下, 搜索期望时间权的最优路径是没有多大意义的, 对于决策人员往往还要考虑的是在最短时限内完成运输任务的可能性, 即完成运输的成功概率; 同时, 还要考虑损耗和流量等问题。在运输过程中出现一个运输时间, 通常总存在着一个相应的损耗和流量。假定路段损耗是与距离、时间线性正相关的函数, 且距离可表示为关于时间的函数, 则损耗函数关系描述为

$$W = w(t) = at + b \quad a, b \text{ 为常量} \quad (1)$$

由于  $T$  是随机变量, 因此损耗  $W$  也必然是随机变量, 其概率密度函数为  $g(w)$ , 由概率论可知:

$$g(w) = f(w^{-1}(t)) |(w^{-1}(t))'| = \frac{1}{a} f\left(\frac{w-b}{a}\right) \quad (2)$$

同理, 运输流量  $Q$  也为随机变量, 其概率密度函数  $h(q)$  同上易知:

$$h(q) = f(q^{-1}(t)) |(q^{-1}(t))'| = \frac{1}{c} f\left(\frac{q-d}{c}\right) \quad (3)$$

**作者简介:** 郑龙(1980-), 男, 博士研究生, 主研方向: 信息系统, 物流运筹; 周经伦, 教授、博士生导师; 孙权, 副教授

**收稿日期:** 2009-10-30 **E-mail:** zheng.long2@mail.mcgill.ca

如上分析,根据运输任务和路况状态,建立随机运输网络的频域生成图模型:从起点  $v_1$  到终点  $v_n$  的运输生成图  $G=(V,E)$  如图 1 所示。 $V=\{v_i(s)\}$  代表节点集与其状态,  $E=\{e_{ij}(s)\}$  代表弧集与其通行状态。

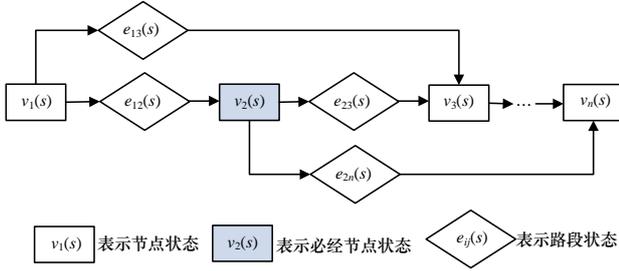


图 1 随机运输网络的频域生成图模型

在图 1 中,有

$$v_i(s) = E[e^{-sT}] = \begin{cases} 1 & \text{完全通过节点, 简化模型} \\ \int_0^{\infty} e^{-st} f_i(t) dt & \text{连续概率分布} \\ \sum_{\text{所有 } t} e^{-st} p_i(t) & \text{离散经验分布} \end{cases}$$

$$e_{ij}(s) = E[e^{-sT}] = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-st} f_{ij}(t) dt & \text{连续概率分布} \\ \sum_{\text{所有 } t} e^{-st} p_{ij}(t) & \text{离散经验分布} \end{cases}$$

其中,  $v_i(s)$  为通过节点  $v_i$  的旅行时间的频域概率密度函数, 简化模型时常取值为 1, 描述为无阻抗完全通过节点;  $e_{ij}(s)$  为通过路段  $e_{ij}$  的旅行时间的频域概率密度函数, 如  $e_{ij}(s) = e^{\frac{1}{2}\sigma_{ij}^2 s^2 - \mu_{ij}s}$  描述为通过率服从  $N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$  的正态分布, 其反拉斯变换为  $e_{ij}(t) = f_{ij}(t) \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$ 。在很多情况下无法获得准确的连续分布函数, 只能通过经验综合评估出离散的概率密度。如  $e_{ij}(s) = 0.3e^{-s} + 0.5e^{-2s} + 0.2e^{-3s}$  描述为 1 h 通过概率为 0.3, 2 h 通过概率为 0.5, 3 h 通过概率为 0.2 的离散经验密度函数。

运输损耗的频域概率密度函数为

$$e_{w_{ij}}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sw} g_{ij}(w) dw \quad (4)$$

由于  $t = w^{-1}(t) = \frac{w-b}{a}$ , 易得

$$e_{w_{ij}}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sw} \frac{1}{a} f_{ij}\left(\frac{w-b}{a}\right) dw = \int_0^{\infty} e^{-s(at+b)} \frac{1}{a} f_{ij}(t) a dt = e^{-sb} \int_0^{\infty} e^{-ast} f_{ij}(t) dt = e^{-sb} e_{ij}(as) \quad (5)$$

运输流量的频域概率密度函数为

$$e_{q_{ij}}(s) = E[e^{-s(ct+d)}] = E(e^{-sd} \cdot e^{-sct}) = e^{-sd} \cdot e_{ij}(cs) \quad (6)$$

多目标随机运输路径优化问题转化为如下搜索:

(1) 给定各规定条件(时间、损耗、流量)下, 完成运输概率最大的路径, 其模型为

$$P(p^*) = \max\left(\alpha \mathfrak{T}^{-1}\left[\frac{f_p(s)}{s}\right]\Bigg|_{t=t_a} + \beta \mathfrak{T}^{-1}\left[\frac{f_{wp}(s)}{s}\right]\Bigg|_{w=w_a} + \gamma \mathfrak{T}^{-1}\left[\frac{f_{qp}(s)}{s}\right]\Bigg|_{q=q_a}\right), \alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (7)$$

(2) 给定各规定成功概率下, 旅行时间短、损耗小、流量大的最优路径, 其模型为

$$V(p^*) = \min\left[\frac{(\mathfrak{T}^{-1}\left[\frac{f_p(s)}{s}\right]\Bigg|_{p=p_a})^\alpha (\mathfrak{T}^{-1}\left[\frac{f_{wp}(s)}{s}\right]\Bigg|_{p=p_a})^\beta}{(\mathfrak{T}^{-1}\left[\frac{f_{qp}(s)}{s}\right]\Bigg|_{p=p_a})^r}\right] \quad (8)$$

其中,  $\alpha, \beta, \gamma$  分别为旅行时间、损耗、流量的权重。

其他参数及约束方程如下:

$$f_p(s) = \prod_{(i,j) \in E_p} e_{ij}(s) = e_{i_1}(s) \times \dots \times e_{ij}(s) \times \dots \times e_{j_n}(s) \quad (9)$$

$$f_{wp}(s) = \prod_{(i,j) \in E_p} e_{w_{ij}}(s) = e^{-s \sum b_{ij}} \prod_{(i,j) \in E_p} e_{ij}(a_{ij}s) \quad (10)$$

$$f_{qp}(s) = \prod_{(i,j) \in E_p} e_{q_{ij}}(s) = e^{-s \sum d_{ij}} \prod_{(i,j) \in E_p} e_{ij}(c_{ij}s) \quad (11)$$

$$F_p(s) = f_p(s)/s \quad (12)$$

$$i, j \in V_p, k \in V_k \quad (13)$$

其中, 式(7)、式(8)为优化目标, 即所求多目标随机运输的最优路径  $p^*$ ;  $P(p^*)$  为规定时间  $t_a$ 、规定损耗  $w_a$  和规定流量  $q_a$  内完成运输任务最大概率的路径;  $V(p^*)$  为规定成功概率  $p_a$ 、 $p_w, p_q$  下完成运输任务综合指标最优的路径;  $\mathfrak{T}^{-1}$  为拉普拉斯逆变换。式(9)为路径  $p$  旅行时间的频域概率密度函数,  $E_p$  为路径  $p$  中的弧集。式(10)、式(11)分别为损耗、流量下通过路径  $p$  的频域概率密度函数。式(12)为路径  $p$  旅行时间的频域分布函数。在式(13)中,  $V_p$  为运输网络中路径  $p$  的节点集;  $V_k$  为必经点集。

模型部分重要性质如下:

**性质 1** 对一定的概率分布, 如果各阶频域函数存在, 则频域函数可表示为级数形式, 即

$$f_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(sT)^n}{n!} E(T^n) \quad (14)$$

证明:

$$\text{因为 } f_T(s) = E(e^{-sT}),$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

$$\text{所以 } f_T(s) = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(sT)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s^n}{n!} E(T^n).$$

利用该性质可直接将任何频域函数以级数形式展开, 以便网络状态的定性分析和定量计算, 易于计算机仿真求解。

**性质 2** 频域函数对于  $s$  的各阶导数在  $s=0$  处的值, 就是时域下随机变量  $T$  的各阶原点矩乘以  $-1$  的各阶次方的值, 即

$$f_T^n(s)\Big|_{s=0} = (-1)^n E(T^n) \quad (15)$$

证明: 根据性质 1, 对  $f_T(s)$  各阶求导, 即得证。也可如下证明:

$$\frac{\partial f_T(s)}{\partial s}\Bigg|_{s=0} = \left[\frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt\right]_{s=0} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (-t) \cdot e^{-st} f(t) dt\right]_{s=0} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (-t) \cdot e^{-st} f(t) dt\right]_{s=0} = -E[T]$$

同理可证, 各阶导数在  $s=0$  处存在。根据上述性质易得到服从各种概率密度函数路段的均值、方差等相关信息, 便于快速求解均值最优路径。

### 3 优化算法

基于频域生成图模型, 根据广义邻接矩阵或广义割集算法<sup>[4-5]</sup>搜索出随机运输网络中起点到终点的所有连通路程  $P$ 。

若以图 1 为例, 广义邻接矩阵  $A$  为  $[A_{ij}]_{n \times n}$ , 反映了 2 个节点之间有无路长为 1 的相连路径。

$$A = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_n \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & e_{12} & e_{13} & 0 \\ 0 & 0 & e_{23} & e_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & e_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由此易知  $A_{ij}^r$  表示节点  $i, j$  之间长为  $r$  的路径。

根据性质 2 求解各连通路径  $P$  的旅行时间、损耗、流量期望值, 对其结果与规定条件进行初步比较, 筛选出符合要求  $[E_{\text{下限}}, E_{\text{上限}}]$  的路径。

若以图 1 为例, 路径  $e_{12}e_{23}e_{3n}$  的旅行时间期望  $E(T_{123n}) = -e'_{12}(s)|_{s=0} - e'_{23}(s)|_{s=0} - e'_{3n}(s)|_{s=0}$ ,  $e_{13}e_{3n}$  的  $E(T_{13n}) = -e'_{13}(s)|_{s=0} - e'_{3n}(s)|_{s=0}$ ,  $e_{12}e_{2n}$  的  $E(T_{12n}) = -e'_{12}(s)|_{s=0} - e'_{2n}(s)|_{s=0}$  与规定时间  $t_a$  作比较, 筛选出合理路径, 与其他目标期望值的比较同上。

期望均值往往会丢失许多随机运输网络的相关信息, 不能完全反映出该路径的通行优劣, 故进一步分析。根据数学模型的式(9)~式(12)求得初步符合各目标要求的路径频域密度函数与频域分布函数, 由拉普拉斯逆变换和 Matlab 易分别绘出路径通行(时间、损耗、流量等)的概率分布函数曲线<sup>[6]</sup>, 如图 2 所示。

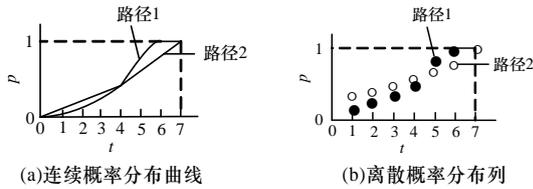


图 2 概率分布函数曲线

在置信条件(概率窗、时间窗、损耗窗、流量窗等)的约束下, 分析比较概率分布函数曲线, 最终选择出最优的运输路径  $p^*$ 。例如, 在时间窗  $[5, 6.2]$  小时区间内, 通行概率最大的是路径 1。

#### 4 算例分析

一个有向随机运输网络的起点为  $v_1(s)$ , 终点为  $v_5(s)$ , 其频域模型如图 3 所示。此运输网络中旅行时间与损耗双目标优化的路径选择分析如下。

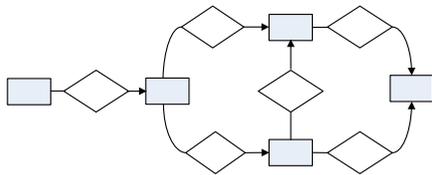


图 3 有向随机运输网络的频域生成图模型

模型的框图元素设定具体的频域函数,  $v_1(s) = v_2(s) = v_3(s) = v_4(s) = v_5(s) = 1$ , 表示简化模型忽略节点通过时间;  $A(s) = 0.3e^{-s} + 0.5e^{-2s} + 0.2e^{-3s}$  为无分布函数的经验分布, 表示 1 h 通过概率为 0.3、2 h 通过概率为 0.5、3 h 通过概率为 0.2 的路段概率密度函数;  $w_A(t) = 2t + 1$  表示路段损耗函数。有

$$B(s) = 0.2e^{-s} + 0.3e^{-2s} + 0.2e^{-3s} + 0.3e^{-4s}, w_B(t) = t^2 + 1$$

$$C(s) = 0.1e^{-s} + 0.5e^{-2s} + 0.2e^{-3s} + 0.2e^{-4s}, w_C(t) = 4t$$

$$D(s) = 0.3e^{-s} + 0.2e^{-2s} + 0.2e^{-3s} + 0.3e^{-4s}, w_D(t) = 3t + 2$$

$$E(s) = 0.2e^{-s} + 0.2e^{-2s} + 0.4e^{-3s} + 0.2e^{-4s}, w_E(t) = (t-1)^2 + 2$$

$$F(s) = 0.5e^{-s} + 0.5e^{-2s}, w_F(t) = t + 1$$

(1) 由广义邻接矩阵或广义割集算法搜索出所有连通路径为  $ABD, ACE, ACFD$  共 3 条。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & F & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{15}^2 = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & F & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D \\ E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ BD + CE \\ 0 \\ FD \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{15}^3 = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & F & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ BD + CE \\ 0 \\ FD \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ABD + ACE \\ CFD \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{15}^4 = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & F & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ABD + ACE \\ CFD \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ACFD \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 使用 Matlab 的 conv 命令得到通式  $F_T(s)$ , 初步比较分析 3 条路径  $ABD, ACE, ACFD$ 。

$$F(ABD) = 0.018e^{-3s} + 0.087e^{-4s} + 0.212e^{-5s} + 0.393e^{-6s} + 0.607e^{-7s} + 0.788e^{-8s} + 0.913e^{-9s} + 0.982e^{-10s} + e^{-11s}$$

根据式(15)易得  $E(ABD) = 7$  h, 完全通过整个路径为 11 h。

$$F(ACE) = 0.006e^{-3s} + 0.052e^{-4s} + 0.17e^{-5s} + 0.374e^{-6s} + 0.626e^{-7s} + 0.832e^{-8s} + 0.948e^{-9s} + 0.992e^{-10s} + e^{-11s}$$

同理, 易得  $E(ACE) = 7$  h, 完全通过整个路径为 11 h。

$$F(ACFD) = 0.0045e^{-4s} + 0.042e^{-5s} + 0.1475e^{-6s} + 0.3165e^{-7s} + 0.523e^{-8s} + 0.7285e^{-9s} + 0.881e^{-10s} + 0.963e^{-11s} + 0.994e^{-12s} + e^{-13s}$$

同理, 易得  $E(ACFD) = 8.4$  h, 完全通过整个路径为 13 h。

再根据式(2)、式(5)、式(10), 易得

$$f_w(ABD) = e^{-s} A(2s) \cdot e^{-s} B_T(s) \cdot e^{-2s} D(3s)$$

$$F_w(ABD) = 0.018e^{-10s} + 0.018e^{-11s} + \dots + 0.982e^{-36s} + 1e^{-37s}$$

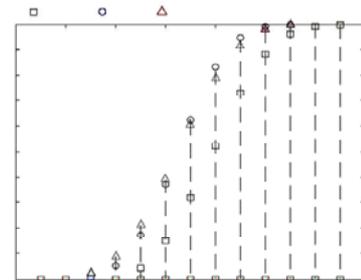
$$f_w(ACE) = e^{-s} A(2s) \cdot C(4s) \cdot e^{-2s} E_{(T-1)}(s)$$

$$F_w(ACE) = 0.006e^{-9s} + 0.012e^{-10s} + \dots + 0.992e^{-33s} + 1e^{-34s}$$

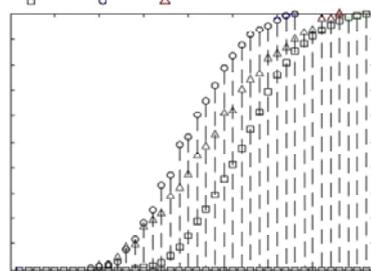
$$f_w(ACFD) = e^{-s} A(2s) \cdot C(4s) \cdot e^{-2s} F(s) \cdot e^{-2s} D(3s)$$

$$F_w(ACFD) = 0.0045e^{-14s} + 0.009e^{-15s} + \dots + 0.994e^{-39s} + 1e^{-40s}$$

(3) 运用 Matlab 图形可视化, 直观比较分析。图 4 为旅行时间和损耗双目标的路径优化分析结果。可分析在不同的概率窗、时间窗、损耗窗多条件下的最优路径。



(a) 旅行时间概率分布的路径选择分析



(b) 损耗概率分布的路径选择分析

图 4 随机运输网络中多目标的路径优化分析

(下转第 204 页)