

# $Geom/G_1, G_2(Geom/G)/1/1$ 可修 Erlang 消失系统的可靠性指标及其计算机仿真分析

唐应辉<sup>1</sup>, 余妙妙<sup>1,2</sup>, 付永红<sup>3</sup>

(1. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066; 2. 四川理工学院 理学院, 自贡 643000;  
3. 四川理工学院 计算机科学与技术学院, 自贡 643000)

**摘要** 研究 Bernoulli 到达且无等待空间的单服务员离散时间可修 Erlang 消失排队系统. 系统中服务员可向顾客提供两种不同类型的服务, 即常规服务和可选二次服务. 在系统运行过程中服务设备的故障可以引起系统中顾客的空闲. 采用一种新型的离散补充变量技术, 给出了系统稳态可用度, 稳态失效频度, 首次故障前平均时间, 服务员空闲概率, 故障概率, 工作概率以及系统稳态损失概率等一系列性能指标. 最后通过数值实例和计算机仿真验证了理论分析技术的合理性和有效性.

**关键词** Erlang 消失系统; 可修排队系统; 可选二次服务; 离散补充变量技术; 计算机仿真

## Reliability indices of $Geom/G_1, G_2(Geom/G)/1/1$ repairable Erlang loss system and computer simulation analysis

TANG Ying-hui<sup>1</sup>, YU Miao-miao<sup>1,2</sup>, FU Yong-hong<sup>3</sup>

(1. School of Mathematics & Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China; 2. School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China; 3. School of Computer Science & Technology, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

**Abstract** We study a single server discrete-time repairable Erlang loss system with Bernoulli arrival process and no waiting space. The server in the system is assumed to provide two different types of services, namely regular and optional services, to the customer. During the operation of the system, the breakdown of the service facility can induce customer to leave the system immediately. Applying a new type discrete supplementary variable technique, we obtain some performance characteristics, such as the steady-state availability, failure frequency of the system, mean time to the first failure, probabilities for the server being idle, busy, breakdown and the steady-state loss probability of the system etc. At last, by the numerical examples and computer simulation analysis, we prove the rationality and validity of the theoretical analysis technique.

**Keywords** Erlang loss system; repairable queueing system; second optional service; discrete supplementary variable technique; computer simulation

## 1 引言

由丹麦电气工程师 Erlang 提出的经典连续时间  $M/M/c/c$  消失排队系统<sup>[1]</sup> 在通信工程领域中有着广泛的应用. 这类系统的一个显著特点即是没有顾客的等待场所, 当到达顾客遇到所有服务台全忙时, 该顾客的服务要求则会被拒绝而不得不开离系统. 对于非马氏情形下 Erlang 消失系统的研究工作绝大部分主要集中在单服务员排队系统中. 早期 Baccelli 等<sup>[2]</sup> 在其专著中研究了  $GI/G/1/1$  这样一类较为广泛的单服务员

收稿日期: 2008-11-06

资助项目: 国家自然科学基金 (70871084); 教育部高校博士点专项研究基金 (200806360001); 四川省教育厅自然科学基金 (08ZC028)

作者简介: 唐应辉, 男, 教授, 博士生导师; 余妙妙, 男, 讲师, 博士研究生; 付永红, 女, 讲师, 硕士研究生, E-mail: yonghong.fu@gmail.com.

Erlang 消失系统. 此后 Madan<sup>[3]</sup> 又利用补充变量技术研究了具有可选二次服务的  $M/G/1/1$  Erlang 消失系统, 获得了系统的各种稳态排队指标. 接续 Madan 的研究工作, Sapna<sup>[4]</sup> 又将 Madan 的模型推广到服务员不可靠的情形, 从可靠性角度研究了系统的各种性能指标. 但值得注意的是, 上述关于 Erlang 消失系统的研究始终局限在连续时间情形, 而对离散时间情形下的 Erlang 消失系统的研究迄今为止文献报道甚少, 只是在近期田乃硕等人撰写的一部关于离散时间排队理论的专著中<sup>[5]</sup> 才对马氏情形下的  $Geom/Geom/c/c$  离散时间 Erlang 消失系统给出了一个完整的理论分析. 本文的目的就是要将离散时间 Erlang 消失系统的研究推广到非马氏情形下, 结合系统在运行过程中可能因为病毒入侵或支持系统崩溃而发生故障这一实际情况, 利用一种基于离散概率分布率的差分演化方法给出非马氏情形下离散时间 Erlang 消失系统的理论分析及其计算机模型仿真分析. 文章讨论的离散时间可修 Erlang 消失系统具有较强的工程背景, 在计算机网络通信接入系统的性能建模分析中有着实际的应用价值.

## 2 模型描述与符号说明

具有二次可选服务的离散时间  $Geom/G_1, G_2(Geom/G)/1/1$  可修 Erlang 消失系统具体描述如下:

1) 按 EAS (Early arrival system) 入口协议规定, 潜在顾客的到达发生于时隙首端  $(k, k^+)$  处, 服务的结束只能发生在时隙的末端  $(k^-, k)$  处;

2) 顾客到达遵循参数为  $\lambda (0 < \lambda < 1, \lambda' = 1 - \lambda)$  的 Bernoulli 过程,  $\lambda$  表示单位时隙顾客的到达概率;

3) 系统中的服务设备向顾客提供两种类型的服务即常规服务与可选二次服务. 当顾客到达系统发现服务设备空闲时, 他将首先接受一次随机长度的常规服务. 常规服务时间  $\eta_1$  服从一般离散型概率分布即

$$P\{\eta_1 = k\} = g_k^{<1>}, \quad k = 1, 2, \dots$$

其对应的母函数记为  $\psi_1(z)$ . 定义离散随机变量  $\eta_1$  的尾概率为

$$G_k^{<1>} = \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i^{<1>}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

再定义单位时隙常规服务完成率为  $s_k^{<1>} = P\{\eta_1 = k + 1 | \eta_1 > k\}$ , 易知  $s_k^{<1>} = P\{\eta_1 = k + 1 | \eta_1 > k\} = g_{k+1}^{<1>} / G_k^{<1>}, k = 0, 1, 2, \dots$ .

当顾客接受完常规服务后, 他将以概率  $p$  要求服务设备向其提供第二次可选服务, 而以概率  $q$  选择离开系统, 这里  $p + q = 1$ . 可选服务时间  $\eta_2$  也服从一般离散型概率分布, 即

$$P\{\eta_2 = k\} = g_k^{<2>}, \quad k = 1, 2, \dots$$

其对应的母函数记为  $\psi_2(z)$ . 定义离散随机变量  $\eta_2$  的尾概率为

$$G_k^{<2>} = \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i^{<2>}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

再定义单位时隙可选服务完成率为  $s_k^{<2>} = P\{\eta_2 = k + 1 | \eta_2 > k\}$ , 易知  $s_k^{<2>} = P\{\eta_2 = k + 1 | \eta_2 > k\} = g_{k+1}^{<2>} / G_k^{<2>}, k = 0, 1, 2, \dots$ .

4) 在系统运行过程中 (即忙期中), 由于受到某些不可预测因素的影响, 将引起服务设备的故障和系统清空, 这里清空是指正在接受服务的顾客会因故障的发生而离开系统. 系统中服务设备的寿命时间  $\xi$  服从参数为  $\alpha$  的几何分布

$$P\{\xi = k\} = \alpha(\alpha')^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \alpha' = 1 - \alpha,$$

潜在故障发生于时隙首端  $(n, n^+)$  处;

5) 服务设备故障后维修随即开始. 服务设备的修理时间  $\tau$  服从一般离散型概率分布, 即

$$P\{\tau = k\} = h_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

其对应母函数记为  $\phi(z)$ , 数学期望为  $E[\tau] = \sum_{k=1}^{\infty} kh_k$ . 同上定义  $\tau$  的尾概率和单位时隙修复率分别如下:

$$H_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} h_i, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad r_k = P\{\tau = k + 1 | \tau > k\} = h_{k+1} / H_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

服务设备的维修在时隙末端  $(n^-, n)$  处结束, 且修复如新;

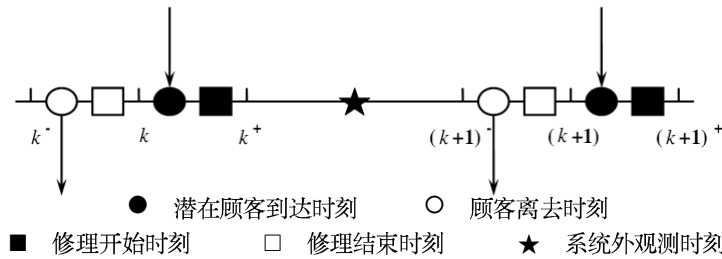


图 1 服务台故障清空离散时间早到可修排队系统各时间点示意图

6) 系统不向顾客提供等待空间, 因此只有当服务设备空闲时到达的顾客才能进入系统接受常规服务. 如果顾客到达时服务设备处于工作状态或正在进行维修则顾客的服务需求遭到拒绝而直接离开系统;

7) 顾客到达过程, 常规服务过程, 第二次可选服务过程, 服务设备的寿命过程及维修过程均相互独立. 在全文分析过程中我们定义如下状态概率

$P_0(k)$ : 时刻  $k^+$  服务员空闲;

$P_1(k, m_1)$ : 时刻  $k^+$  服务员正在向顾客提供常规服务且已用掉的常规服务时间为  $m_1, m_1 = 0, 1, 2, \dots$ ;

$P_2(k, m_2)$ : 时刻  $k^+$  服务员正在向顾客提供第二次可选服务且已用掉的可选服务时间为  $m_2, m_2 = 0, 1, 2, \dots$ ;

$F(k, n)$ : 时刻  $k^+$  服务员处于故障状态且已用掉的故障修理时间为  $n, n = 0, 1, 2, \dots$ .

### 3 系统状态转移方程

考虑系统在时刻  $k^+$  和  $(k+1)^+$  处的状态转移情况, 经过简单的概率分析容易建立起各状态概率之间的一组差分方程:

$$P_0(k+1) = \lambda' P_0(k) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha' \lambda' q P_1(k, m_1) s_{m_1}^{<1>} + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha' \lambda' P_2(k, m_2) s_{m_2}^{<2>} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda' F(k, n) r_n \quad (1)$$

$$P_1(k+1, m_1+1) = \alpha' P_1(k, m_1) (1 - s_{m_1}^{<1>}) \quad (2)$$

$$P_2(k+1, m_2+1) = \alpha' P_2(k, m_2) (1 - s_{m_2}^{<2>}) \quad (3)$$

$$F(k+1, n+1) = F(k, n) (1 - r_n) \quad (4)$$

上述方程组的边界条件为:

$$P_1(k+1, 0) = \lambda P_0(k) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha' \lambda q P_1(k, m_1) s_{m_1}^{<1>} + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha' \lambda P_2(k, m_2) s_{m_2}^{<2>} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda F(k, n) r_n \quad (5)$$

$$P_2(k+1, 0) = \sum_{m_1=0}^{\infty} p \alpha' P_1(k, m_1) s_{m_1}^{<1>} \quad (6)$$

$$F(k+1, 0) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha P_1(k, m_1) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha P_2(k, m_2) \quad (7)$$

初始条件为  $P_1(0, 0) = 1$ , 其余均为零.

记  $\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k$  表示任意函数  $f(k), k = 0, 1, 2, \dots$  的  $Z$  变换. 据此, 对状态方程 (1) 左右两端同时关于变量  $k$  进行  $Z$  变换有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P_0(k+1) z^k &= \lambda' \sum_{k=0}^{\infty} P_0(k) z^k + \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha' \lambda' q s_{m_1}^{<1>} \sum_{k=0}^{\infty} P_1(k, m_1) z^k + \\ &\quad \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha' \lambda' s_{m_2}^{<2>} \sum_{k=0}^{\infty} P_2(k, m_2) z^k + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda' r_n \sum_{k=0}^{\infty} F(k, n) z^k. \end{aligned}$$

注意到初始条件, 上式左端可写为

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_0(k+1) z^k = \frac{1}{z} [\tilde{P}_0(z) - P_0(0)] = \frac{1}{z} \tilde{P}_0(z),$$

所以方程 (1) 的  $Z$  变换为

$$\tilde{P}_0(z) = z\lambda'\tilde{P}_0(z) + \sum_{m_1=0}^{\infty} z\alpha'\lambda'q\tilde{P}_1(z, m_1)s_{m_1}^{<1>} + \sum_{m_2=0}^{\infty} z\alpha'\lambda'\tilde{P}_2(z, m_2)s_{m_2}^{<2>} + \sum_{n=0}^{\infty} z\lambda'\tilde{F}(z, n)r_n \quad (8)$$

同理, 对余下的状态方程组及其边界条件左右两端同时关于变量  $k$  进行  $Z$  变换, 类似可得

$$\tilde{P}_1(z, m_1 + 1) = \alpha'z\tilde{P}_1(z, m_1)(1 - s_{m_1}^{<1>}) \quad (9)$$

$$\tilde{P}_2(z, m_2 + 1) = \alpha'z\tilde{P}_2(z, m_2)(1 - s_{m_2}^{<2>}) \quad (10)$$

$$\tilde{F}(z, n + 1) = z\tilde{F}(z, n)(1 - r_n) \quad (11)$$

$$\frac{1}{z}[\tilde{P}_1(z, 0) - 1] = \lambda\tilde{P}_0(z) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha'\lambda q\tilde{P}_1(z, m_1)s_{m_1}^{<1>} + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha'\lambda\tilde{P}_2(z, m_2)s_{m_2}^{<2>} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\tilde{F}(z, n)r_n \quad (12)$$

$$\tilde{P}_2(z, 0) = \sum_{m_1=0}^{\infty} p\alpha'z\tilde{P}_1(z, m_1)s_{m_1}^{<1>} \quad (13)$$

$$\tilde{F}(z, 0) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha z\tilde{P}_1(z, m_1) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha z\tilde{P}_2(z, m_2) \quad (14)$$

由方程 (9) 与 (10) 经过简单迭代后可得

$$\tilde{P}_1(z, m_1) = (\alpha'z)^{m_1}\tilde{P}_1(z, 0) \prod_{i=0}^{m_1-1} (1 - s_i^{<1>}) = (\alpha'z)^{m_1}G_{m_1}^{<1>}\tilde{P}_1(z, 0), \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

$$\tilde{P}_2(z, m_2) = (\alpha'z)^{m_2}\tilde{P}_2(z, 0) \prod_{i=0}^{m_2-1} (1 - s_i^{<2>}) = (\alpha'z)^{m_2}G_{m_2}^{<2>}\tilde{P}_2(z, 0), \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

将 (15) 式代入方程 (13) 有

$$\tilde{P}_2(z, 0) = \sum_{m_1=0}^{\infty} p(\alpha'z)^{m_1+1}\tilde{P}_1(z, 0)g_{m_1+1}^{<1>} = p\tilde{P}_1(z, 0)\psi_1(\alpha'z) \quad (17)$$

将 (17) 式代入 (16) 式可得

$$\tilde{P}_2(z, m_2) = (\alpha'z)^{m_2}G_{m_2}^{<2>}p\psi_1(\alpha'z)\tilde{P}_1(z, 0) \quad (18)$$

由方程 (11) 经过简单迭代后有

$$\tilde{F}(z, n) = z^n\tilde{F}(z, 0) \prod_{i=0}^{n-1} (1 - r_i) = z^n H_n \tilde{F}(z, 0) \quad (19)$$

将 (15) 和 (18) 式代入方程 (14) 有

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z, 0) &= \alpha z\tilde{P}_1(z, 0) \sum_{m_1=0}^{\infty} (\alpha'z)^{m_1}G_{m_1}^{<1>} + \alpha z p\tilde{P}_1(z, 0)\psi_1(\alpha'z) \sum_{m_2=0}^{\infty} (\alpha'z)^{m_2}G_{m_2}^{<2>} \\ &= \alpha z\tilde{P}_1(z, 0) \frac{1 - \psi_1(\alpha'z)}{1 - \alpha'z} + \alpha z p\tilde{P}_1(z, 0)\psi_1(\alpha'z) \frac{1 - \psi_2(\alpha'z)}{1 - \alpha'z} \end{aligned} \quad (20)$$

进一步由 (19) 和 (20) 式可得

$$\tilde{F}(z, n) = \alpha z^{n+1} H_n \tilde{P}_1(z, 0) \frac{1 - \omega(z)}{1 - \alpha'z} \quad (21)$$

这里  $\omega(z) = q\psi_1(\alpha'z) + p\psi_1(\alpha'z)\psi_2(\alpha'z)$ . 将 (15), (18) 和 (21) 式代入方程 (8) 化简后有

$$\tilde{P}_0(z) = \frac{\lambda'\omega(z)(1 - \alpha'z) + \lambda'\alpha z\phi(z)(1 - \omega(z))}{(1 - \lambda'z)(1 - \alpha'z)} \tilde{P}_1(z, 0) \quad (22)$$

再将 (15), (18), (21) 和 (22) 式代入方程 (12) 可解得  $\tilde{P}_1(z, 0)$  为

$$\tilde{P}_1(z, 0) = \frac{(1 - \lambda'z)(1 - \alpha'z)}{(1 - \lambda'z)(1 - \alpha'z) - \lambda\omega(z)(1 - \alpha'z) - \alpha\lambda z\phi(z)(1 - \omega(z))} \quad (23)$$

至此, 我们获得了系统全部状态概率的  $Z$  变换表达式.

## 4 系统稳态性能指标

本节我们将利用可修 Erlang 消失系统中各状态概率的  $Z$  变换解析表达式, 对系统的各种稳态性能指标加以分析. 先给出两个重要的引理

**引理 1**<sup>[6]</sup> 设  $\tilde{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ,  $|z| < 1$ ,  $b_n \geq 0$ , 则可知

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)\tilde{B}(z) = b < \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right\} = b < \infty.$$

**引理 2**<sup>[6]</sup> 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < \infty$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right\} = b$ .

事实上引理 1 是 Tauber 定理的离散化形式, 引理 2 是实分析中著名的 Cesaró 定理, 这两个引理在讨论离散时间随机模型的一些稳态指标时十分有用.

### 4.1 系统可用度

根据系统瞬时可用度的定义, 系统在时刻  $k^+$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 的可用度为

$$A(k) = P_0(k) + \sum_{m_1=0}^{\infty} P_1(k, m_1) + \sum_{m_2=0}^{\infty} P_2(k, m_2),$$

结合第三节中所给出的状态概率  $Z$  变换表达式, 易得  $A(k)$  的  $Z$  变换为

$$\begin{aligned} \tilde{A}(z) &= \tilde{P}_0(z) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \tilde{P}_1(z, m_1) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \tilde{P}_2(z, m_2) \\ &= \left[ \frac{\lambda' \omega(z)(1-\alpha'z) + \lambda' \alpha z \phi(z)(1-\omega(z)) + (1-\lambda'z)(1-\omega(z))}{(1-\lambda'z)(1-\alpha'z)} \right] \cdot \tilde{P}_1(z, 0) \\ &= \frac{\lambda' \omega(z)(1-\alpha'z) + \lambda' \alpha z \phi(z)(1-\omega(z)) + (1-\lambda'z)(1-\omega(z))}{(1-\lambda'z)(1-\alpha'z) - \lambda \omega(z)(1-\alpha'z) - z \phi(z) \alpha \lambda (1-\omega(z))}. \end{aligned}$$

利用洛必达法则结合上述引理, 则系统的稳态可用度为

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A(k) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)\tilde{A}(z) = \frac{\lambda' \alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))}{\lambda' \alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))(1 + \alpha E[\tau])}.$$

**注 1** 考虑到离散时间排队系统的运行特点, 系统在  $(k^+, (k+1)^-)$  时间段内状态不会发生任何改变, 所以上述系统在时刻  $k^+$  的可用度也是  $(k^+, (k+1)^-)$  时段内外部观测时刻所见系统的可用度. 因此时刻  $k^+$  的稳态可用度与外部观测时刻所见系统的稳态可用度完全相同.

### 4.2 系统故障频度

根据文献 [7] 中针对离散 Markov 链情形下的状态转移计数过程的讨论, 我们容易获得该系统从  $0^+$  时刻开始到  $k^+$  时刻结束这段时间内的平均故障次数为  $M_f(k) = \sum_{i=1}^k W_f(i)$ , 其中  $W_f(k)$  称为一个高维离散时间 Markov 过程的单位时隙故障频度.

$$W_f(k) = E[N_{wf}(k) - N_{wf}(k-1)], \quad k = 1, 2, \dots$$

计数过程  $N_{wf}(k)$  表示高维离散时间 Markov 过程在前  $k$  步中从工作状态转入故障状态的次数. 按文献 [7] 中的方式有

$$W_f(k) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha P_1(k-1, m_1) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha P_2(k-1, m_2).$$

对上式两端分别作  $Z$  变换后有

$$\tilde{W}_f(z) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha z \tilde{P}_1(z, m_1) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha z \tilde{P}_2(z, m_2) = \alpha z \frac{1-\omega(z)}{1-\alpha'z} \tilde{P}_1(z, 0).$$

根据引理 1 和 2, 系统的稳态故障频度

$$M = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_f(k)}{k} = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)\tilde{W}_f(z) = \frac{\alpha \lambda (1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))}{\lambda' \alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))(1 + \alpha E[\tau])}.$$

### 4.3 外部观测时刻系统处于空闲、繁忙、故障的概率

由注 1 中所述之理由, 利用两个重要引理和洛必达法则我们可以给出如下一些平稳概率的解析表示:

系统在外观测时刻处于空闲状态的平稳概率

$$P_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} P_0(k) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)\tilde{P}_0(z) = \frac{\alpha \lambda'}{\lambda' \alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))(1 + \alpha E[\tau])};$$

系统在外部观测时刻处于常规服务状态的平稳概率

$$P_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} P_1(k, m_1) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z) \sum_{m_1=0}^{\infty} \tilde{P}_1(z, m_1) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z) \tilde{P}_1(z, 0) \frac{1 - \psi_1(\alpha'z)}{1 - \alpha'z}$$

$$= \frac{\lambda(1 - \psi_1(\alpha'))}{\lambda'\alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))(1 + \alpha E[\tau])};$$

系统在外部观测时刻处于二次可选服务状态的平稳概率

$$P_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} P_2(k, m_2) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z) \sum_{m_2=0}^{\infty} \tilde{P}_2(z, m_2) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z) p\psi_1(\alpha'z) \tilde{P}_1(z, 0) \frac{1 - \psi_2(\alpha'z)}{1 - \alpha'z}$$

$$= \frac{\lambda p\psi_1(\alpha')(1 - \psi_2(\alpha'))}{\lambda'\alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))(1 + \alpha E[\tau])};$$

记系统在外部观测时刻处于繁忙状态的平稳概率为  $P_{busy}$ , 则易知

$$P_{busy} = P_1 + P_2 = \frac{\lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))}{\lambda'\alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))(1 + \alpha E[\tau])};$$

系统在外部观测时刻处于故障维修状态的平稳概率

$$F = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} F(k, n) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}(z, n) = \frac{\alpha\lambda E[\tau](1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))}{\lambda'\alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))(1 + \alpha E[\tau])}.$$

**注 2** 从上述结论中我们不难发现平稳概率  $P_0 + P_{busy} + F = 1$ , 这进一步说明了本文所使用分析技术的合理性和推导过程的正确性.

#### 4.4 损失概率

先讨论顾客被系统接收的概率. 由 EAS 入口机制可知, 在下述四种情形下  $(k, k^+)$  内到达的顾客可以被系统接收:

(I)  $(k-1)^+$  时刻系统状态概率为  $P_1(k-1, m_1)$ ,  $m_1 = 0, 1, 2, \dots$ , 在  $(k^-, k)$  内常规服务结束, 顾客以概率  $q$  选择离开系统且  $(k, k^+)$  内无故障发生;

(II)  $(k-1)^+$  时刻系统状态概率为  $P_2(k-1, m_2)$ ,  $m_2 = 0, 1, 2, \dots$ , 在  $(k^-, k)$  内二次可选服务结束,  $(k, k^+)$  内无故障发生;

(III)  $(k-1)^+$  时刻系统状态概率为  $F(k-1, n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 在  $(k^-, k)$  内修理结束;

(IV)  $(k-1)^+$  时刻系统状态概率为  $P_0(k-1)$ .

记  $P_{\text{accept}}(k)$  表示  $(k, k^+)$  内到达的顾客被系统接收的概率, 则

$$P_{\text{accept}}(k) = \sum_{m_1=0}^{\infty} q\alpha' P_1(k-1, m_1) s_{m_1}^{<1>} + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha' P_2(k-1, m_2) s_{m_2}^{<2>} + \sum_{n=0}^{\infty} F(k-1, n) r_n + P_0(k-1).$$

对  $P_{\text{accept}}(k)$  作  $Z$  变换, 同理再由引理 1 和 2 可得顾客被系统接收的平稳概率为

$$P_{\text{accept}} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\text{accept}}(k) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z) \tilde{P}_{\text{accept}}(z) = \frac{\alpha}{\lambda'\alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))(1 + \alpha E[\tau])}.$$

所以系统的平稳损失概率为

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{\alpha}{\lambda'\alpha + \lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))(1 + \alpha E[\tau])}.$$

#### 4.5 系统可靠度

为求出系统可靠度, 只需在上述模型中令系统故障状态为一高维马氏过程的吸收状态, 从而对一个新的带有吸收状态的高维离散时间马氏过程加以研究. 在系统可靠度分析中为将新定义的吸收过程与原过程加以区别, 我们引入一组新的状态概率记号  $Q_0(k)$ ,  $Q_1(k, m_1)$  和  $Q_2(k, m_2)$ , 他们所代表的意义完全同于  $P_0(k)$ ,  $P_1(k, m_1)$  和  $P_2(k, m_2)$ . 在分析吸收过程的状态转移情况后我们得到如下一组差分方程:

$$Q_0(k+1) = \lambda'Q_0(k) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha'\lambda'qQ_1(k, m_1)s_{m_1}^{<1>} + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha'\lambda'Q_2(k, m_2)s_{m_2}^{<2>},$$

$$Q_1(k+1, m_1+1) = \alpha'Q_1(k, m_1)(1 - s_{m_1}^{<1>}), \quad Q_2(k+1, m_2+1) = \alpha'Q_2(k, m_2)(1 - s_{m_2}^{<2>}),$$

$$Q_1(k+1, 0) = \lambda Q_0(k) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \alpha'\lambda q Q_1(k, m_1) s_{m_1}^{<1>} + \sum_{m_2=0}^{\infty} \alpha'\lambda Q_2(k, m_2) s_{m_2}^{<2>},$$

$$Q_2(k+1, 0) = \sum_{m_1=0}^{\infty} p\alpha'Q_1(k, m_1)s_{m_1}^{<1>}, \quad Q_1(0, 0) = 1.$$

类似于第三节中的求解过程可得

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1(z, m_1) &= (\alpha'z)^{m_1} \tilde{Q}_1(z, 0) \prod_{i=0}^{m_1-1} (1 - s_i^{<1>}) = (\alpha'z)^{m_1} G_{m_1}^{<1>} \tilde{Q}_1(z, 0), \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots, \\ \tilde{Q}_2(z, m_2) &= (\alpha'z)^{m_2} \tilde{Q}_2(z, 0) \prod_{i=0}^{m_2-1} (1 - s_i^{<2>}) = (\alpha'z)^{m_2} G_{m_2}^{<2>} \tilde{Q}_2(z, 0) \\ &= (\alpha'z)^{m_2} G_{m_2}^{<2>} p\psi_1(\alpha'z) \tilde{Q}_1(z, 0), \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots, \\ \tilde{Q}_0(z) &= \frac{\lambda'\omega(z)}{1 - \lambda'z} \tilde{Q}_1(z, 0),\end{aligned}$$

这里  $\tilde{Q}_1(z, 0) = \frac{1 - \lambda'z}{1 - \lambda'z - \lambda\omega(z)}$ . 由系统可靠度定义有  $R(k) = Q_0(k) + \sum_{m_1=0}^{\infty} Q_1(k, m_1) + \sum_{m_2=0}^{\infty} Q_2(k, m_2)$ , 则  $R(k)$  的  $Z$  变换为  $\tilde{R}(z) = \frac{\lambda'\omega(z)(1 - \alpha'z) + (1 - \omega(z))(1 - \lambda'z)}{(1 - \alpha'z)(1 - \lambda'z - \lambda\omega(z))}$ . 于是系统首次故障前平均时间为

$$MTTFF = \sum_{k=0}^{\infty} R(k) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \tilde{R}(z) = \frac{\lambda'(q\psi_1(\alpha') + p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))}{\lambda(1 - q\psi_1(\alpha') - p\psi_1(\alpha')\psi_2(\alpha'))} + \frac{1}{\alpha}.$$

## 5 计算机仿真分析

### 5.1 仿真算法的实现与结构框图

在模拟服务台对到达顾客进行服务的过程中, 首先设定了系统仿真总时间, 并且引入了系统当前仿真时间变量用来记录系统当前仿真时间, 以此来判断仿真是否结束. 假设系统初始状态为空闲, 当仿真流程开始, 首个顾客到达后, 服务台在向顾客提供服务的过程中会出现以下两种情况:

#### 1) 服务期间发生故障

根据随机生成的服务台寿命时间及顾客需要的服务时间进行判断, 如果服务台的寿命小于顾客服务所需时间, 即意味着服务台在对顾客的服务过程中会发生故障, 导致顾客离开系统. 而后系统进行维修, 每一次的修理时间服从参数为  $\alpha$  的几何分布. 修理结束后, 我们将系统当前时间更新, 即系统当前时间需加上顾客离开系统的时间和服务台的修理的时间.

#### 2) 服务期间未发生故障

系统正常提供服务, 服务结束后更新系统当前时间, 即系统当前时间需加上顾客的服务时间.

本算法中顾客在进行第一次常规服务时, 依 1)、2) 两步骤进行判断. 如果此间系统发生故障, 顾客在故障时刻离开系统. 如果服务台未发生故障且顾客不需要进行二次服务, 则顾客直接离开系统. 若顾客在进行完第一次常规服务后, 向系统提出二次服务的要求, 则仿真流程重复 1)、2) 两步. 在二次服务过程中系统若发生故障, 则顾客在故障时刻离开系统. 反之, 顾客在进行完第二次服务后离开系统.

下一个顾客到达时, 如果顾客的到达时间小于系统的当前时间, 说明此顾客到达时, 系统正处于繁忙或故障状态, 不能为该顾客提供服务. 反之, 系统接受并提供服务, 重复仿真流程 1)、2) 两步. 依此对顾客达到序列逐个进行仿真模拟, 直到仿真时间结束. 仿真结构框图见图 2.

### 5.2 数值计算与仿真结果对比

利用 Matlab 编程, 对本文所讨论的系统进行了 40000 个单位时间的仿真. 其中顾客到达数据流采用的是符合几何分布的随机矩阵生成, 到达率参数  $\lambda$  的变化范围控制在 0.015 - 0.05 间. 进入系统顾客的常规服务时间, 和可选二次服务时间也分别采用符合几何分布的  $1 \times 1$  随机矩阵生成, 且常规服务率和二次可选服务率分别取为 0.025 和 0.05, 进一步假定每个用户在接受完常规服务后会以 50% 的概率向系统提出二次服务的要求. 由于受到外界因素的冲击, 服务台在工作期间可能发生故障, 服务台寿命时间采用参数  $\alpha = 0.075$  的几何分布  $1 \times 1$  随机矩阵模拟. 仿真分析中假定服务台故障后的维修时间服从均值为 10 的几何分布, 维修时间的模拟仍然采用符合几何分布的  $1 \times 1$  随机矩阵生成. 下面分别给出系统繁忙概率, 系统空闲概率, 系统损失概率以及系统稳态可用度随到达率变化的理论值与仿真值的比较. 如图 3-6, 从图中可以看出理论值和仿真值比较接近, 从而验证了模型理论分析的合理性和有效性.

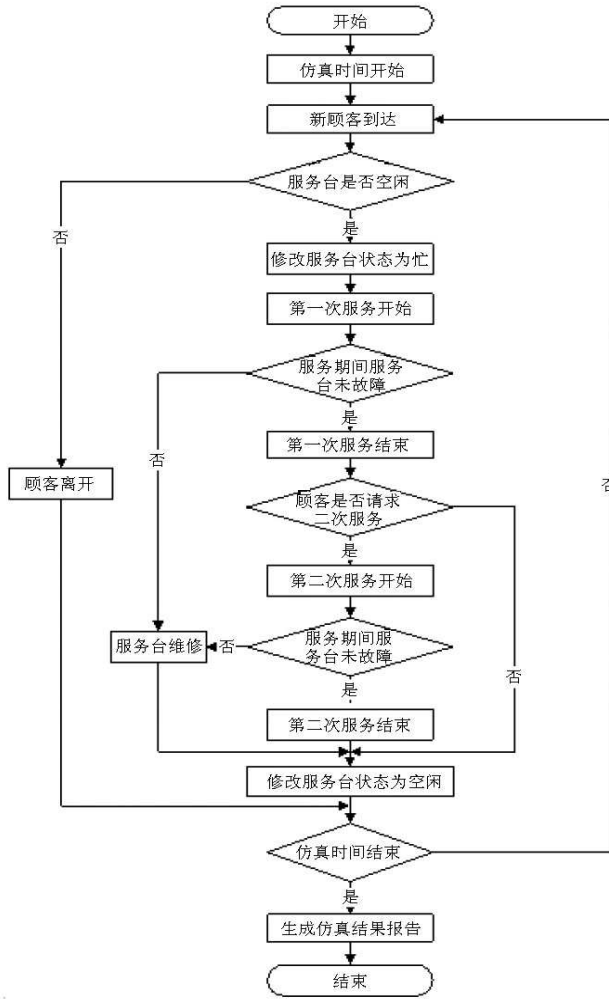


图 2 服务台故障清空算法流程

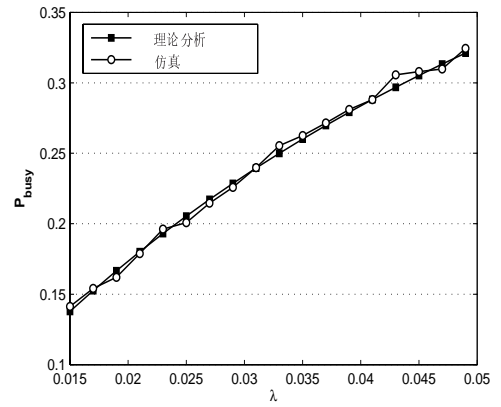


图 3  $\lambda$ 对系统繁忙概率的影响

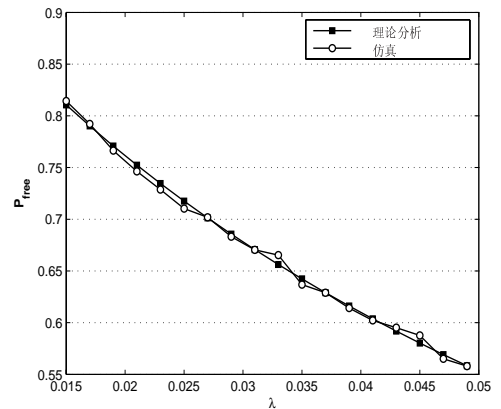


图 4  $\lambda$ 对系统空闲概率的影响

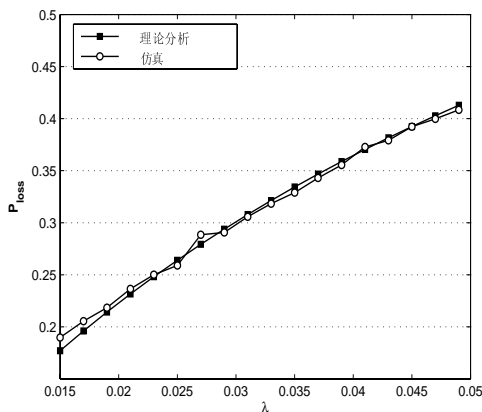


图 5  $\lambda$ 对系统损失概率的影响

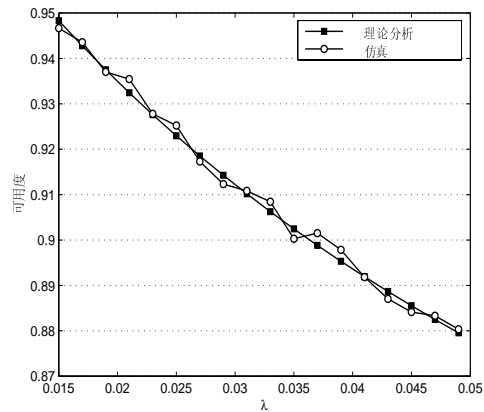


图 6  $\lambda$ 对系统稳态可用度的影响

表 1 还进一步给出了理论值与仿真值的具体数据.



表 1 理论值与仿真值数据对照表

$\lambda$	$P_{\text{busy}}$		$P_{\text{free}}$		$P_{\text{loss}}$		Availability	
	理论值	仿真值	理论值	仿真值	理论值	仿真值	理论值	仿真值
0.019	0.1667	0.1620	0.7708	0.7664	0.2142	0.2184	0.9375	0.9370
0.021	0.1801	0.1789	0.7523	0.7463	0.2316	0.2364	0.9324	0.9355
0.023	0.1930	0.1961	0.7346	0.7287	0.2481	0.2501	0.9276	0.9278
0.025	0.2054	0.2007	0.7176	0.7103	0.2640	0.2590	0.9230	0.9252
0.027	0.2172	0.2146	0.7013	0.7019	0.2792	0.2885	0.9185	0.9173
0.029	0.2286	0.2259	0.6857	0.6832	0.2938	0.2906	0.9143	0.9123
0.031	0.2395	0.2398	0.6707	0.6705	0.3079	0.3057	0.9102	0.9108
0.033	0.2500	0.2553	0.6563	0.6653	0.3214	0.3184	0.9063	0.9084
0.035	0.2601	0.2625	0.6424	0.6368	0.3343	0.3289	0.9025	0.9003
0.037	0.2698	0.2715	0.6290	0.6290	0.3468	0.3430	0.8988	0.9015
0.039	0.2791	0.2811	0.6162	0.6141	0.3588	0.3555	0.8953	0.8978
0.041	0.2882	0.2881	0.6038	0.6021	0.3704	0.3727	0.8919	0.8918

## 6 结论

传统的补充变量技术是研究连续时间非马氏排队模型的一种十分有效的方法, 该方法试图将随机排队模型纯粹无规的演化行为通过密度的偏微积分方程组用完全确定的动力系统去描述和研究<sup>[7]</sup>. 这样的一种研究手段无疑决定了传统意义上的补充变量方法难以在离散时间排队模型中付之应用. 针对上述问题, 早期 Chaudhry 和 Gupta<sup>[8-9]</sup> 将非马氏过程的剩余时间作为离散补充变量引入队长过程, 建立起了一组刻画离散排队系统演化行为的不显含初边值条件的差分方程. 结合嵌入马氏链技术, 他们为处理非马氏离散排队模型提供了一套完整的数值计算方法. 但值得注意的是, 在处理有限状态非马氏离散排队模型时他们的方法只能给出系统平稳分布和某些性能指标的数值解, 在系统各种稳态指标的解析表示方面还有所不及. 本文所采用的分析技术虽然也称之为离散补充变量技术, 但文中所引入的补充变量与前者完全不同. 将非马氏过程的逝去时间作为离散补充变量引入队长过程, 通过引入时隙风险概率来建立起带初边值条件的状态转移多元差分方程组的. 另外在差分方程组建立的过程中我们发现, 与连续时间排队模型相比较, 由于离散时间排队系统中多个事件在同一时刻同时发生的概率不再为零, 所以在建立反映系统演化规律的差分方程组时将会出现比连续时间系统更复杂的情形, 这一点尤其是在建立离散时间排队系统的边值条件时体现尤为明显, 并且这也是离散时间系统与连续时间系统的重大差别之所在.

## 参考文献

- [1] 唐应辉, 唐小我. 排队论——基础与分析技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.  
Tang Y H, Tang X W. Queueing Theory—Foundations and Analysis Technique[M]. Beijing: Sciences Press, 2006.
- [2] Baccelli F, Bremaud P. Elements of Queueing Theory, Palm-martingale Calculus and Stochastic Recurrences[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [3] Madan K C. An  $M/G/1$  queueing system with additional optional service and no waiting capacities[J]. Microelectronics and Reliability, 1994, 34(3): 521-527.
- [4] Sapna K P. An  $M/G/1$  type queueing system with non-perfect servers and no waiting capacity[J]. Microelectronics and Reliability, 1996, 36(5): 697-700.
- [5] 田乃硕, 徐秀丽, 马占友. 离散时间排队论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.  
Tian N S, Xu X L, Ma Z Y. Discrete-time Queueing Theory[M]. Beijing: Sciences Press, 2008.
- [6] Hunter J J. Mathematical Techniques of Applied Probability, Vol. II, Discrete Time Models: Techniques and Applications[M]. New York: Academic Press, 1983.
- [7] 史定华. 随机模型的密度演化方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.  
Shi D H. Density Evolution Method in Stochastic Models[M]. Beijing: Sciences Press, 1999.
- [8] Chaudhry M L, Gupta U C. Queue-length and waiting time distributions of discrete-time  $GI^x/Geom/1$  queueing systems with early and late arrivals[J]. Queueing Systems, 1997, 25(2): 307-334.
- [9] Chaudhry M L, Templeton J G C, Gupta U C. Analysis of the discrete-time  $GI/Geom(n)/1/N$  queue[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1996, 31(1): 59-68.