随机介质理论及其在开挖引起的地表下沉问题中的应用①

刘宝琛

(中南工业大学)

摘　要

随机介质理论的开发及应用在中国已有40年的历史。该文重点介绍了随机介质的基本理论，以及该理论在近地表隧道开挖、地下煤层开采及露天开挖引起的地表移动和变形等问题中的实际应用。

关键词: 随机介质理论　开挖工程　地表下沉

地下开采以及近地表隧道开挖所引起的地表移动的予计，在我国已有近 40 年的研究史了，其目的在于尽量减小开采及地表开挖等工程对地表建筑物、铁路及河流的损害。近年来，由于交通、地表保护及生态学的要求，地铁、地下仓库及地下购物中心得到很大的发展，而如此众多的地下工程势必影响地面建筑及其他设施。由于予计的地表损害过大而被迫取消某些地下工程的事，也时有所见。

随着工程经验的积累，一种新的方法，即随机介质理论得到了充分的发展，并已广泛应用于建筑物、铁路及河下采煤设计。

研究任何一种力学现象及后果，首先必需了解对象体的物理力学性质。由于节理、裂隙的普遍存在，岩体可以视为由大量尺寸和形状各异的岩块紧密集聚在一起的物体。这些岩块的自由度很大，以至于经典力学无法分析各别岩块的运动轨迹。50 年代，Litwiniszyn J 考虑到节理岩体的运动为大量已知及未知因素所控制[1]，而把节理岩体视为随机介质，即岩体的运动过程可以用随机方法来解决。这一理论经过众多波兰及中国学者的开发，目前已在波兰、中国及美国得到广泛应用。

1　单元下沉盆地的基本方程

根据随机概念，可以把地下开挖分成众多个无限小的单无开挖。总的地下开挖的后果应该等于各个单元开挖引起的后果的总合。所有无限小单位长度、宽度及厚度（$d\xi$、$d\zeta$、$d\eta$）的开挖称为单元开挖。单元开挖所引起的下沉盆地称为单元盆地。单元盆地中任一点的下沉及水平移动称为单元下沉（W_e）及单元水平移动（U_e）。取一直角座标系，其 z 轴通过单元开挖垂直向上(图 1). 以概率分析为基础,单元开挖上方岩块发生运动的事件是具有一定概率的随机事件。如果岩体为水平各向同性，则岩块运动概率密度函数是一个对称于 z 轴的连续函数。在 z 水平上以点 $A(x、y、z)$ 为中心的无限小面元 $ds=dxdy$ 上发生下沉的事件,将等于在过 A 点的水平微条 dx 及 dy 内同时发生下沉(图 1)。 在数学上，可以分别列

① 于 1992 年 4 月 13 日收到

出该两事件的概率为 $f(x^2)\mathrm{d}x$ 及 $f(y^2)\mathrm{d}y$，其中 f 是概率密度函数。两事件同时发生的概率为

$$p(\mathrm{d}S)=f(x^2)\mathrm{d}xf(y^2)\mathrm{d}y=f(x^2)f(y^2)\mathrm{d}S \tag{1}$$

通过原点 0 选择一新的直角座标系 (x_1, y_1, z)，则 A 点座标为 $A(x_1, y_1, z)$，而新座标系中 $\mathrm{d}S_1$ 的下沉概率为

$$\begin{aligned} P(\mathrm{d}S_1)&=f(x_1^2)\mathrm{d}x_1f(y_1^2)\mathrm{d}y_1 \\ &=f(x_1^2)f(y_1^2)\mathrm{d}S_1 \end{aligned} \tag{2}$$

若 A 点不变，$\mathrm{d}S=\mathrm{d}S_1$，则下沉概率应与座标选择无关，即

$$f(x^2)f(y^2)=f(x_1^2)f(y_1^2) \tag{3}$$

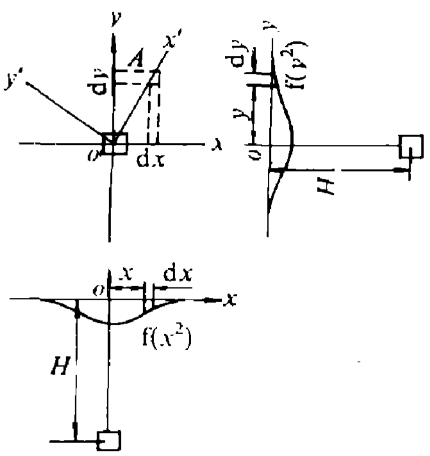

图 1　单元开挖的影响

若点 A 通过轴 ox_1，则

$$\left.\begin{aligned} x_1^2&=x^2+y^2 \\ y_1&=o \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式得出

$$f(x^2)f(y^2)=f(x^2+y^2)f(o)=Cf(x^2+y^2) \tag{5}$$

微分(5)式得出

$$\begin{aligned} f(y^2)\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}&=c\frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial(x^2+y^2)}\times\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial(x^2)} \\ &=c\frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial(x^2+y^2)} \\ f(x^2)\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}(y^2)}&=c\frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial(x^2+y^2)}\times\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial(y^2)} \\ &=c\frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

因此

$$f(y^2)\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}=f(x^2)\frac{\mathrm{d}f(y^2)}{\mathrm{d}(y^2)}$$

最终得出

$$\frac{1}{f(x^2)}\cdot\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}=\frac{1}{f(y^2)}\cdot\frac{\mathrm{d}f(y^2)}{\mathrm{d}(y^2)} \tag{6}$$

方程(6)的左端仅为 x^2 的函数，而右端仅为 y^2 的函数，因此它们都必须等于常数 k，即

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}&=kf(x^2) \\ \frac{\mathrm{d}f(y^2)}{\mathrm{d}(y^2)}&=kf(y^2) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

解微分方程(7)，并考虑当 $x\to\pm\infty$，$y\to\pm\infty$，$p(\mathrm{d}S)=o$ 这一边界条件，则

$$f(x^2)=q(z)\exp[-\frac{\pi x^2}{r^2(z)}]$$

$$f(y^2)=q(z)\exp[-\frac{\pi y^2}{r^2(z)}]$$

因此

$$p(\mathrm{d}S)=q^2(z)\exp[-\frac{\pi}{r^2(z)}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8}$$

而三维概率密度函数为

$$f(x,y,z)=q^2(z)\exp[-\frac{\pi}{r^2(z)}(x^2+y^2)] \tag{9}$$

式中　$q(z)$及 $r(z)$为取决于 z 轴的系数

上述密度函数决定了单元开挖所引起的岩块下沉分布的几何规律。单元开挖是总开挖的一个组成部分，而总开挖是足够大，以致岩体必然发生运动，因此可以把单元开挖体积乘以下沉分布密度函数而获得单元下沉

$$W_e(x,y,z,t)=q^2(z)\exp[-\frac{\pi}{r^2(z)}(x^2+y^2)]\times \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta \tag{10}$$

由(10)式可得单元下沉盆地的体积为

$$V_e=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}q^2(z)\exp[-\frac{\pi}{r^2(z)}(x^2+y^2)]\times \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11}$$

下沉盆地随时间的发展过程，可以视为上部岩体对开挖空区的压缩过程，即

$$\frac{dV_e}{dt}=c(1-V_e) \qquad (12)$$

式中　c为常数

可以认为: $t=o, V_e=o$ 及 $t\to\infty$, $V_e=d\xi d\zeta d\eta$，则方程式(12)的解为:

$$V(t)=[1-\exp(-ct)]d\xi d\zeta d\eta \qquad (13)$$

将(13)式代入(11)式解之得

$$q^2(z)=-\frac{1}{r^2(z)}[1-\exp(-ct)] \qquad (14)$$

将(14)式代入(11)式，经积分后得出

$$W_e(x,y,z,t)=\frac{1}{r^2(z)}[1-\exp(-ct)]\times \exp[-\frac{\pi}{r^2(z)}(x^2+y^2]\times d\xi d\zeta K d\eta \qquad (15)$$

对于二维问题，单无开挖的长度沿y轴为无限大，则积分(15)式得出

$$W_e(x,z,t)=\frac{1}{r(z)}[1-\exp(-ct)] \exp[-\frac{\pi x^2}{r^2(z)}]d\xi d\eta \qquad (16)$$

根据Knothe. St[2]的研究，系数R及β被称为对地表的主要影响范围及主要影响范围角，并有下列关系

$$r(H)=R=\frac{H}{\tan\beta} \qquad (17)$$

式中　H为开挖深度

最终得出在单元开挖影响下，地表单元下沉盆地中的单元下沉为

$$W_e(x,y,t)=\frac{1}{R^2}[1-\exp(-ct)]\times \exp[-\frac{\pi}{R^2}(x^2+y^2)]d\xi d\eta \qquad (18)$$

及

$$W_e(x,t)=\frac{1}{R}[1-\exp(-ct)]\times \exp[-\frac{\pi x^2}{R^2}]d\xi d\zeta d\eta \qquad (19)$$

(18)及(19)式是今后要用的最基本的公式。对(18)式积分，可以获得地下矩形开挖引起的地表下沉为（图2）

$$W(x,y,t)=\int_a^h\int_b^d\frac{W(\xi,\zeta)}{R^2}[1-\exp(-ct)]\times \exp\{-\frac{\pi}{R^2}[(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2]\}d\xi d\zeta \qquad (20)$$

式中　$W(\xi,\zeta)$为开采顶板的下沉。

在单元开挖影响下，地表发生下沉的同时，还发生水平移动。设岩体体积变形忽略不计，则对平面应变问题有

$$E_x+E_y+E_z=0, \text{及} E_y=0 \qquad (21)$$

即

$$\frac{\partial U_e}{\partial x}+\frac{\partial W_e}{\partial z}=0 \qquad (22)$$

式中　E_x, E_y, E_z分别为x, y, z轴方向的应变。

解方程(22)得

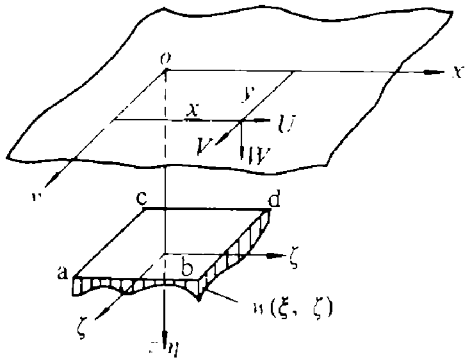

图2　二维地下开采

$$U_e=-\int\frac{\partial W_e(x)}{\partial z}dx+c \qquad (23)$$

将(16)式代入方程式(23)，并应用边界条件$x\to\pm\infty$，$U_e=o$，解之得出单元水平移动为

$$U_e(x,t)=-\frac{2\pi Bx}{R^2}[1-\exp(-ct)]\times \exp(-\frac{\pi x^2}{R^2})d\xi d\eta \qquad (24)$$

式中　B是水平移动系数

$$B=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial r(z)}{\partial z} \qquad (25)$$

2 近地表隧道开挖引起的地表移动及变形

图 3 所示为深度为 H 的长水平隧道，显然这是平面变形问题。

先讨论一种极限情况，即隧道全部塌落。在很长时间($t\to\infty$)之后地表达到最终下沉值。隧道开挖由很多无限小的单元开挖 $\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$ 组成。由(19)式，当 $t\to\infty$时，得地表单元下沉

$$W_e(x,H)=\frac{1}{r(\eta)}\exp[-\frac{\pi}{r^2(\eta)}x^2]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (26)$$

应用叠加原理，并考虑到 $r(\eta)=\eta\cot\beta$，则隧道全部塌落(面积为 Ω)时地表最终下沉为

$$W(x)=\iint_{\Omega}\frac{\tan\beta}{\eta}\exp[-\pi\tan^2\beta\frac{(x-\xi)^2}{\eta^2}]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (27)$$

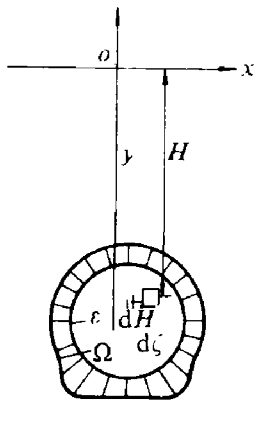

图 3　隧道开挖

隧道全部塌落是最坏的，也是不能接受的情况，然而它表示地表最大可能的下沉。工程实践指出，开挖隧道并进行支护以后，隧道周边仅发生有限的收敛变形，即由开挖断面 Ω 收敛为 ω（不含支护），而真正地表下沉仅由断面差 Ω−ω 所引起，即

$$W(x)=W_{\Omega}(x)-W_{\omega}(x)=\iint_{(\Omega-\omega)}\frac{\tan\beta}{\eta}\times \exp[\frac{\pi}{\eta^2}\tan^2\beta(x-\xi)^2]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (28)$$

若隧道断面为园形，其初始开挖半径为 a，收敛后的半径为 b，则由(28)式可得

$$W(x)=\tan\beta\ \{\int_A^B\int_C^D\exp[-\frac{\pi}{\eta^2}\tan^2\beta\times (x-\xi)^2]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta-\int_E^F\int_G^H\exp\times [-\frac{\pi}{\eta^2}\tan^2\beta(x-\xi)^2]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\} \quad (29)$$

式中　$A=H-a$

$B=H+a$

$C=-\sqrt{a^2-(H-\eta)^2}$

$D=\sqrt{a^2-(H-\eta)^2}$

$E=H-b\quad F=H+b$

$G=-\sqrt{b^2-(H-\eta)^2}$

$H=\sqrt{b^2-(H-\eta)^2}$

为计算 $W(x)$, $U(x)$及 $E_x(x)$, 编制了适用于一般 PC 级微机的电算程序"TUNNEL"。输入几何及岩性参数，即可算出 $W(x)$、$U(x)$及 $E_x(x)$并自动绘制它们在地表的分布曲线。为了对比，选用文献[5]中的一个实例加以计算。隧道距地表 17.4 m，断面高 4.5 m、宽 5.7 m，面积收敛为 0.76 m^2，$\tan\beta=1.37$。计算结果与观测资料吻合良好，见图 4。

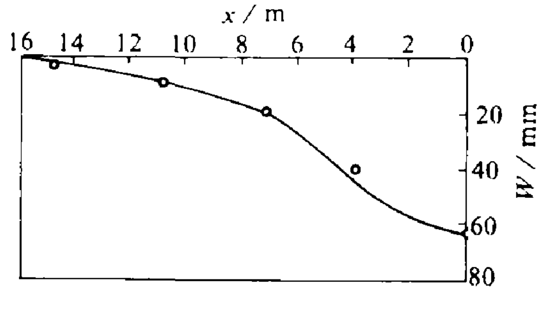

图 4　计算结果（曲线）与观测资料（园点）的对比

地表水平移动由下式决定

$$U(x)=B\frac{H}{\tan\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} \quad (30)$$

地表水平变形为

$$E_x(x)=\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} \quad (31)$$

3 倾斜煤(矿)层开采引起的地表移动及变形

实践及模型实验[3, 4]指出，当开采倾斜煤层（或矿层）时，由于岩体的倾斜成层，单元下沉盆地的中心向下山方向偏移而单元盆地形状仍为对称(图 5)。单元盆地中心与单元开采中心的联线与水平线的夹角 θ 称为开采影响传播角，即

$$\theta=90-\alpha K(z) \tag{32}$$

式中 $K(z)$为取决于岩体倾斜成层性质的参数 $\theta\leqslant K(z)\leqslant 1$

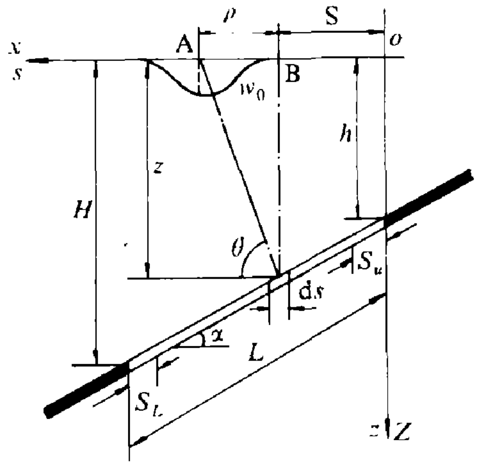

图 5 倾斜煤层的开采参数

由图 5 有

$$\rho(z)=\frac{z}{\tan\theta}=\frac{z}{\tan[90-\alpha K(z)]} \tag{33}$$

把(20)式应用于平面问题，并以 $x-\dot{\rho}(z)$代替 x，当 $t\to\infty$时，获得单元下沉为

$$W_e(x)=\frac{1}{r(z-Z)}\exp\left\{-\frac{\pi}{r^2(z-Z)}[x-s-\rho(z-Z)]^2\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{34}$$

由(23)式，单元水平移动为

$$U_e(x)=\frac{r(z-Z)}{2\pi}\frac{\partial r(z-Z)}{\partial z}\frac{\partial W_e(x)}{\partial x}-\frac{\partial\rho(z-Z)}{\partial z}W_e(z) \tag{35}$$

将(34)式积分，可得开采宽为 L，最小及最大开采深为 h 及 H 条件下的地表下沉为

$$W(x)=W_{max}\tan\beta\int_A^B\frac{1}{h+s\tan\alpha}\exp\times\{-\pi[x-S-(h+s\tan\alpha)\cot\theta]\tan\beta/h+S\tan\alpha)^2\}\mathrm{d}S \tag{36}$$

式中 $A=S_1\cos\alpha$

$B=(L-S_2)\cos\alpha$

由(35)及(36)式得出

$$U(x)=-BW_{max}\int_A^B\frac{2\pi\tan^2\beta}{(h+S\tan\alpha)^2}[x-S-(h+S\tan\alpha)\cot\theta]\cdot\exp\times\left\{\frac{\pi[x-S-(h+S\tan\alpha)\cot\theta]^2}{-(h+S\tan\alpha)^2\tan^{-2}\beta}\right\}\times dS-W(x)\cot\theta \tag{37}$$

最大可能下沉为

$$W_{\max}=W_{\theta\max}\mathrm{Sin}\theta=M_\theta\eta\mathrm{Sin}\theta \tag{38}$$

式中 $W_{\theta\max}$ 及 M_θ 为 θ 方向上地表最大移动量及煤层有效厚度，η 为下沉系数。

若

$$M_\theta=\frac{M}{\cos[(1-k)\alpha]}$$

则

$$W_{max}=\frac{M\eta\cos(k\alpha)}{\cos[(1-k)\alpha]} \tag{39}$$

地表面的倾斜为

$$T(x)=\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}=-W_{max}\int_A^B\frac{2\pi\tan^3\beta}{(h+S\tan\alpha)^3}\times[x-S-(h+S\tan\alpha)W+\theta]\cdot\exp\left\{-\frac{\pi\tan^2\beta}{(h+S\tan\alpha)^2}[x-S-(h+S\tan\alpha)\cot\theta]^2\right\}\mathrm{d}S \tag{40}$$

地表面的曲率为

$$K(x)=\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}=-W_{max}\int_A^B\frac{2\pi\tan^3\beta}{(h+S\tan\alpha)^3}\times\left\{1-\frac{2\pi\tan^2\beta}{(h+S\tan\alpha)^2}[x-S-(h+S\tan\alpha)cot\theta]^2\right\}\times\exp\left\{-\frac{\pi\tan^2\beta}{(h+S\tan\alpha)^2}\times[x-S-(h+S\tan\alpha)\cot\theta]^2\right\}\mathrm{d}S \tag{41}$$

地表水平变形为

$$E_x(x)=\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}=-BW_{max}\int_A^B\frac{2\pi\tan^2\beta}{(h+S\tan\alpha)^2}\times\{1-\frac{2\pi\tan^2\beta}{(h+S\tan\alpha)^2}[x-S-(h+S\tan\alpha)\cos\theta]\}\exp\{-\frac{\pi\tan^2\beta}{(h+S\tan\alpha)^2}\times[x-S-(h+S\tan\alpha)\cot\theta^2\}\mathrm{d}S-T(x)\cot\theta \qquad (42)$$

为了计算地表移动及变形，专门开发了适用于 PC 级微机的电算程序“SFCMOV”。输入有关几何、岩体性质及开采情况的参数，即可算出 $W(x)$，$U(x)$，$T(x)$，$K(x)$及 $E_x(x)$ 数组，并自动绘制它们在地表分布的曲线。

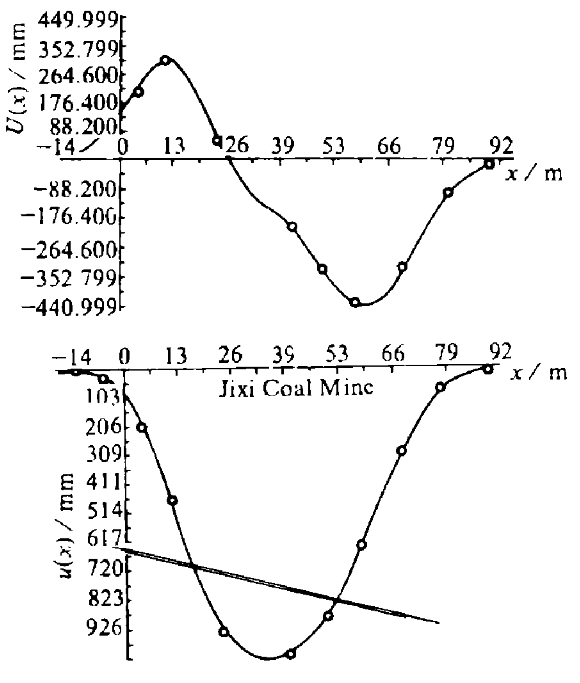

图 6　观测资料(圆点)与计算结果(曲线)的对比

图 6 所示为对鸡西煤矿的计算结果。基本输入参数为：$h=43$ m, $L=69$ m, $\alpha=13(°)$, $\theta=81(°)$, $K=0.7$, $\tan\beta=1.9$, $\beta=0.36$, $M=1\,500$ mm, $\eta=0.73$, $S_1=6$ m, $S_2=14$ m。

图 7 所示为对 S_2 贾汪煤矿的计算结果(图中圆点为观测值)。基本输入参数为：$h=82$ m，$L=143$ m, $\alpha=15(°)$, $\theta=80(°)$, $K=0.76$, $\tan\beta=1.87$，$\beta=0.3$，$M=1750$ mm，$\eta=0.61$，$S_1=22.8$ m，$S_2=21$ m。

4　露天开挖工程引起的地表移动及变形

露天开挖破坏了岩体的初始平衡，在开挖境介以外引起地表移动及变形。从而引起地面建筑物的损害及边坡的滑坡。现仅对平面变形问题，如图 8 所示，在单元开挖的影响下，令 $r^{-2}(z)=h^2(z)/\pi$ 代入(10)式得出单元下沉为

$$W_e=h(z)\exp[-h^2(z_o)\frac{(x-x_o)^2}{\sqrt{\pi}}] \qquad (43)$$

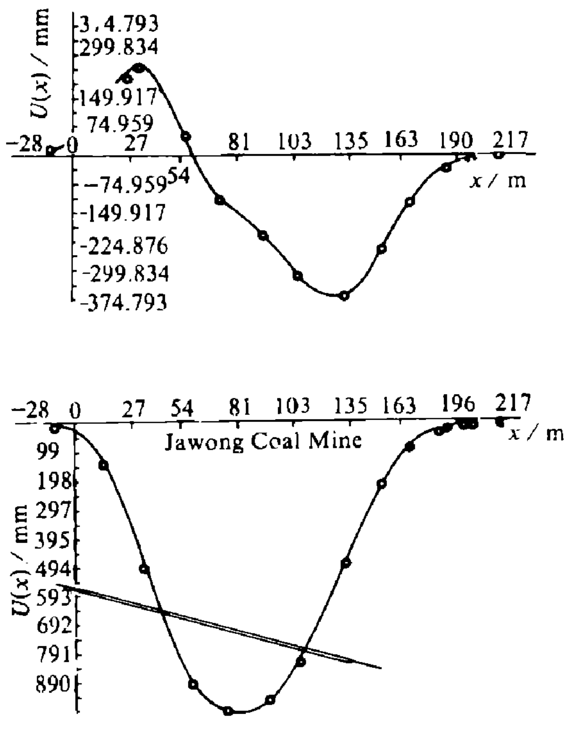

图 7　观测资料(圆点)与计算结果(曲线)的对比

图 8 中，H 为开挖深度，上平面为 $z=o$，底平面为 $z=-H$，α 为边坡角，坡面为 $z=x\tan\alpha$。

设点 $p(x_0, z_0)$处有一单元开挖 $\mathrm{d}x_0\mathrm{d}z_o$，则由(43)式可得开挖 $\mathrm{d}z_0$ 微分层的地表下沉为

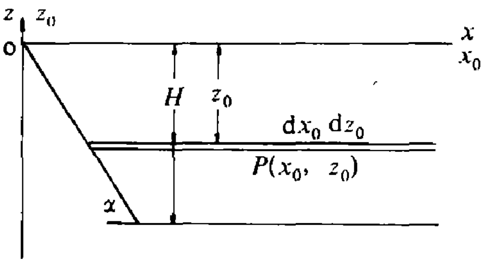

图 8 露天开挖剖面示意图

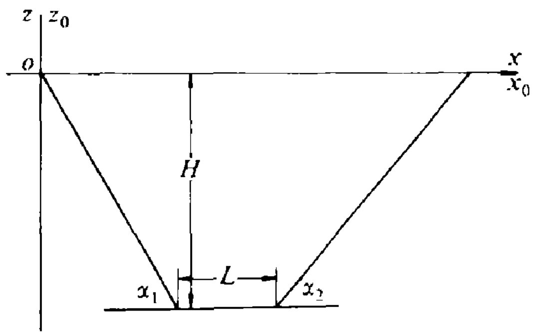

图 9 露天采场横剖面示意图

$$\triangle W(z_0)=\int_{-z_0\cot\alpha}^{\infty}\frac{h(z_0)}{\sqrt{\pi}}\exp[-h^2(z_o)(x-x_0)^2]dx_0 \quad (44)$$

开挖所有分层后地表下沉为

$$W(x)=\int_{-H}^{o}\int_{-z_o\cot\alpha}^{\infty}\frac{h(z_o)}{\sqrt{\pi}}\exp[-h^2(z_o)(x-x_o)^2]dx_o dz_o \quad (45)$$

考虑到 $r(z_o)=-z_o\tan^{-1}\beta$，以及 $h(z_o)=-\sqrt{\pi}z_0^{-1}\tan\beta$，并积分后得出地表下沉如(图 9)

$$W(x)=\int_{-H}^{o}\int_{a}^{b}\frac{\tan\beta}{z_o}\exp[-\frac{\pi\tan^2\beta}{z_o^2}(x-x_o)^2]dx_o dz_o \quad (46)$$

式中 $a=-z_0\cot\alpha_1$

$b=H\cot\alpha_1+L+(z_0+H)\tan^{-1}\alpha_2$

地表水平移动为

$$U(x)=\int_{-H}^{0}\int_{a}^{b}\frac{\tan\beta}{z_0^2}(x-x_o)\exp[-\frac{\pi\tan^2\alpha}{z_0^2}(x-x_o)^2]dx_o dz_o \quad (47)$$

地表的水平变形为

$$E_x(x)=\frac{dU(x)}{dx}$$

为便于计算，编制了适用于 *PC* 级微机的电算程序“OPNPIT”。计算时，仅对 $x\leqslant 0$ 及 $x\geqslant H(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)+L$ 才有意义。

5 结论

30 多年来，应用随机介质理论于煤矿“三下”（建筑物下、水体下及铁路下）开采是十分成功的，并已广泛应用矿山及设计部门，取得巨大经济效益。此理论应用于城市地铁及露天采矿和采石场，则需作进一步的工作。

参考文献

1 Litwiniszyh J. Arch. Mech. Stos.,1956,(7):8.

2 Knothe. St. Arch. Gorn. Hutn.,1953,t1.

3 刘宝琛，廖国华。煤矿地表移动的基本规律，北京：中国工业出版社。1965.

4 Liu Baochen, Liao Kouhua, Yan Roungui. In:Proceedings of 4 th Congress of ISRM. Montreux, Suisse. 1979.

5 Liu Baochen, Lin Dezhang. The Application of Stochastic Medium Theory to The Problem of Surface Movement. due to Open Pit Mining, In:Stability in Surface Mining. Volume 3.1982.