第 11 卷 第 4 期　　电子科学学刊　　Vol. 11, No. 4
1989 年 7 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　July, 1989

返波型自由电子激光的小信号理论* **

孔刚玉　周　文
(浙江大学信息与电子学系，杭州)

摘要　本文利用单粒子理论给出了返波型自由电子激光的小信号理论．通过引入修正因子 F_m，常规自由电子激光的一系列公式可以用于返波自由电子激光．结果表明：返波 FEL 具有效率高及束质要求低两大优点，故适宜于作为两级自由电子激光中的一级．

关键词　自由电子激光；返波；小信号理论

1. 引言

自由电子激光目前追求的是更高的效率和更短的波长．为此已提出许多修改方案，譬如变参数摆动器、光学速调管、二级自由电子激光[1]以及利用微波加速失能电子[1)]等方案．其中二级 FEL 方案拟用较低的电子束能量获得较短波长上的相干辐射，是一种很有价值的设想．其原理是利用第一级的辐射作为第二级的泵，从而获得两次 Doppler 上频移，即更短波长上的辐射．

近年来提出的返波型自由电子激光器[2]由于具有较高的效率及对电子束束质要求较低等优点，因而可以在二级 FEL 中扮演重要角色．因为二级 FEL 方案对电子束束质要求较高，第一级辐射必须足够强以建立起实际有用的泵浦(第二级的泵浦)，而返波型FEL的特性恰好可以满足上述需求．

本文利用单粒子理论[3]详细分析了单能电子在静磁摆动器的调制环境中与一束沿反平行电子束运动方向传播的散射电磁波的相互作用，得到了描述这一互作用过程的摆方程和光场增益方程．结果表明了返波 FEL 与常规 FEL 之间的差异以及它作为二级 FEL 中一级的优越性．

2. 返波自由电子激光的电子动力学描述

(1) 模型　本文采用小信号低增益放大器模型，主要假设是：(a) 只描述单能电子束单次通过互作用区时与泵场及辐射波场的相互作用，即放大器模型；(b) 互作用区中的辐射波在被放大过程中，由于增益不高及高频系统为低损耗谐振腔，可以认为其光功率几乎不变，即低增益假设；(c) 假设互作用区中的辐射波为平面波；(d) 电子受高频电磁场的平均作用力远小于磁摆动器对电子的平均作用力，这一假设在欠饱和或饱和电压较低时成立，即小信号假设；(e) 忽略空间电荷效应，讨论在 Compton 区展开．以上五条假设就构成了小信号低增益放大器模型的基本前提．全文采用高斯单位制．

* 1987 年 9 月 28 日收到，1988 年 8 月 15 日修改定稿．
** 国家自然科学基金资助课题．
1) *R. H. Pantell, stanford university*, 私人通信，1987.

（2）电子的动力学描述　根据上述假设，可以设辐射场具有下述形式：

$$\boldsymbol{E}_r = E_0\{\hat{x}\sin(k_r z + \omega_r t + \varphi_0) + \hat{y}\cos(k_r z + \omega_r t + \varphi_0)\} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B}_r = E_0\{\hat{x}\cos(k_r z + \omega_r t + \varphi_0) - \hat{y}\sin(k_r z + \omega_r t + \varphi_0)\} \tag{2}$$

这是沿 $-z$ 方向传播的左旋极化波．静磁泵(静磁摆动器)具有形式：

$$\boldsymbol{B}_u = B_0[\hat{x}\sin k_0 z + \hat{y}\cos k_0 z] \tag{3}$$

所以互作用区合成场为：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_r \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_r + \boldsymbol{B}_u \tag{4b}$$

电子在互作用区中的运动由 Lorentz 力方程和功能关系决定

$$\frac{d}{dt}(\gamma\boldsymbol{\beta}) = \frac{e}{mc}[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}] \tag{5a}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{e}{mc}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \tag{5b}$$

将(4)式代入(5)式，注意方程(5a)的横向分量是关于时间的全微分，并有

$$\frac{d\phi}{dt} = (1 + \beta_{/\!/})\omega_r \tag{6a}$$

$$\beta_{/\!/}\cos k_0 z\, dt = \cos k_0 z\, dz \tag{6b}$$

其中

$$\phi = k_r z + \omega_r t + \phi_0 \tag{7}$$

上述方程的右边是关于时间 t 的全微分，故有：

$$\gamma\boldsymbol{\beta}_\perp = \frac{eE_0}{mc\omega_r}[-\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi] - \frac{eB_0}{mc\omega_0}[\hat{x}\sin k_0 z + \hat{y}\cos k_0 z] + c_x\hat{x} + c_y\hat{y} \tag{8}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} &\omega_0 = k_0 c,\quad z_0 = z(t)|_{t=0} \\ &c_x = \frac{eE_0}{mc\omega_r}\cos\phi_0 + \frac{eB_0}{mc\omega_0}\sin k_0 z_0 + \gamma_0\beta_x(0) \\ &c_y = -\frac{eE_0}{mc\omega_r}\sin\phi_0 + \frac{eB_0}{mc\omega_0}\cos k_0 z_0 + \gamma_0\beta_y(0) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

引入参数：

$$a_w = \frac{|e|B_0}{mc\omega_0} \tag{10a}$$

$$a_r = \frac{|e|E_0}{mc\omega_r} \tag{10b}$$

由假设 (d)，注意到 a_w，a_r 分别对应于摆动器和辐射波对电子的平均作用力，故可以略去 (8) 式中第二方括号．c_x，c_y 实际上反映了电子束横向速度的“直流项”．从物理上讲，电子速度的交流项才对其辐射有贡献；“直流项”会使电子束打到互作用区腔壁上，这是不利的．现假设引入某种手段，使得 c_x 和 c_y 均等于零．在这一前提下，(8) 式变成：

$$\gamma\boldsymbol{\beta}_\perp = a_w\{\hat{x}\sin k_0 z + \hat{y}\cos k_0 z\} \tag{11}$$

(11)式可以大致体现出电子在互作用区中的稳态运动轨道．它表明电子束的横向速度在小信号时是与摆动器的变化规律大致一样的．由于忽略了散射波的影响，所以无法得到电子在互作用空间中运动的差异．在(8)式中保留散射波的贡献,就能体现这种差异了．

$$\gamma\boldsymbol{\beta}_\perp = a_w[\hat{x}\sin k_0z + \hat{y}\cos k_0z] + a_s[\hat{x}\cos\phi - \hat{y}\sin\phi] \tag{12}$$

于是:

$$\gamma^2\boldsymbol{\beta}_\perp\cdot\boldsymbol{\beta}_\perp = a_w^2 + a_s^2 + 2a_sa_w\sin(k_0z-\phi) \tag{13}$$

由 $\gamma^2=(1+\gamma^2\beta_\perp\cdot\beta_\perp)\gamma_{/\!/}^2$，$\gamma_{/\!/}^2=(1-\beta_{/\!/}^2)^{-1}$．可令:

$$\gamma^2 = F\gamma_{/\!/}^2 \tag{14}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} F &= \mu^2 + 2a_wa_s\sin\Phi \\ \mu^2 &= 1 + a_w^2 + a_s^2 \\ \Phi &= k_0z - \phi \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

由上述三式有:

$$\frac{dF}{dt} = 2a_wa_s[(\omega_0-\omega_r)\beta_{/\!/} - \omega_r]\cos\Phi \tag{16}$$

对(14)式两边求 t 的全导数，注意 $\gamma_{/\!/}\sim\beta_{/\!/}$ 关系有:

$$\frac{d\beta_{/\!/}}{dt} = \left(2\gamma\frac{d\gamma}{dt} - \frac{dF}{dt}\gamma_{/\!/}^2\right)\Big/2\gamma_{/\!/}^4\beta_{/\!/}F \tag{17}$$

将 (5b), (12) 两式代入上式:

$$2\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \frac{-2e^2E_0B_0}{m^2c^2\omega_0}\cos\Phi \tag{18}$$

将(16),(18)两式代入(17)式有:

$$\frac{d\beta_{/\!/}}{dt} = -a_wa_s\left[\frac{\omega_0-\omega_r(1+\beta_{/\!/})}{\gamma^2}\right]\cos\Phi \tag{19}$$

此式表明：由于电子束受合成场的作用,使其横向速度发生周期性变化,即电子束发生横向调制,而这一结果又导致纵向速度受到调制,从而引起了电子束的群聚．

(12), (14)及(19)式给出了单个电子的全部动力学性质．对于含有 N 个电子的束流而言，共有 $3N$ 个方程描述它在互作用区中演化的动力学特性,同时也给出了群聚的定量描述．

3. 摆方程及其分析

(1) 共振电子　　相位不变的电子称为共振电子．通过对它的研究可使物理图象更清晰．由 (12) 式及第 2 节中的假设 (d) (可表示成 $a_w>a_s$),有:

$$\boldsymbol{\beta}_\perp\cdot\boldsymbol{\beta}_\perp = \frac{1}{\gamma^2}[a_s^2 + a_w^2 + 2a_sa_w\sin\Phi] \approx (\mu^2-1)/\gamma^2 \tag{20}$$

故

$$\beta_{/\!/} = \sqrt{1-\beta_\perp\cdot\beta_\perp-\frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{\mu^2}{2\gamma^2} \tag{21}$$

通过对(15)式中 Φ 求 t 的全微分,并代入(21)式有:

$$\dot{\Phi} = \frac{2\pi c}{\lambda_w}F_m\left[1-\frac{\gamma_r^2}{\gamma^2}\right] \tag{22}$$

其中 F_m 为修正因子，γ_r 为共振电子相对论因子，它们分别满足：

$$F_m = 1 - 2\lambda_w/\lambda_r \tag{23a}$$

$$\gamma_r^2 = \frac{\lambda_r - \lambda_w}{\lambda_r - 2\lambda_w} \cdot \frac{\mu^2}{2} \tag{23b}$$

当 $\gamma = \gamma_r$ 时，$\dot{\Phi} = 0$,即为共振电子.

从上述结果可以看出：(a) 共振电子能量系指任何具有该能量的电子都将保持相位不变．但注意到导出上述结论是在略去相角 Φ 之影响前提下得到的，故严格讲共振能量这一概念给出了共振电子应具有能量的平均值；(b) 返波 FEL 的相角变化率公式中比常规 FEL 多一修正因子 F_m，$F_m < 1$，所以前者中的相角变化要缓慢一些．这说明此时电子一旦被俘获，就能长时间地与场换能；(c) 由 (23b) 可以得到返波 FEL 的散射波公式：

$$\lambda_r = \frac{2 - \mu^2/2\gamma_r^2}{1 - \mu^2/2\gamma_r^2}\lambda_w \approx 2\lambda_w \tag{24}$$

这一公式反映出返波 FEL 的一个缺点，即不能缩短波长，也说明这种设想宜于用于电磁泵.

(2) 摆方程　　设电子束以略大于 $\gamma_r mc^2$ 之能量进入互作用区，定义单个电子的能量转化率 ξ：

$$\xi \equiv (\gamma - \gamma_r)/\gamma_r \tag{24}$$

通过线性化(能量线性化)及籍助 ξ 的推导有：

$$\ddot{\Phi} = -\Omega_b^2 \cos\Phi \tag{25}$$

这里同步回旋频率

$$\Omega_b = \sqrt{F_m \frac{2e^2E_0B_0}{\gamma_r^2 m^2 c^2}} \tag{26}$$

这就是返波 FEL 中的摆方程，它是单粒子理论的基础.

4. 增益公式

(1) 非自洽增益公式　　定义标志电子束能量变化平均值百分比的参数 $\eta(t)$ 为：

$$\eta(t) = 1 - \bar{\gamma}(t)/\gamma(0) \tag{27}$$

这一参数的计算可以方便地导出增益公式.

$$\bar{\gamma}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(t, \varphi)d\varphi \tag{28}$$

仿文献[3]及摆方程(25)可以得出光场增益为：

$$G(t) = F_m \frac{4e^4B_0^2\rho_e\lambda_0}{(\Delta\omega\gamma_r mc)^3}\left[1 - \cos\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta\omega t \sin\Delta\omega t\right] \tag{29}$$

这里 ρ_e 是电子束的粒子密度．这一形式适宜于描述沿互作用区轴线光场增益的演化规律．若要描述不同能量电子束注入后，在互作用区末端处得到的光增益，上式可变为：

$$G(\alpha) = F_m \frac{4e^4B_0^2\rho_e\lambda_0 L^3}{(\gamma_r mc^2)^3} g(\alpha) \tag{30}$$

其中 $\alpha = \Delta\omega L/c$，$L$ 为互作用区长度；增益函数 $g(\alpha)$：

$$g(\alpha)=\left(1-\cos\alpha-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha\right)\Big/\alpha^3 \tag{31}$$

(2) 两个参数 为了更好地描述线性理论所能得到的其它结论，引入两个参数：(a) 饱和相角 Θ：

$$\Theta\equiv\Omega_bL/c=\left[F_m\frac{2e^2E_0B_0L^2}{(\gamma_rmc^2)^2}\right]^{1/2} \tag{32}$$

这一概念是建立在相图上的，通常用 $\Theta\geqslant\pi$ 来标称饱和状态，也以此来估计作用区长度；(b) 势阱高度 $\delta\gamma_m$。当电子从势阱顶端入射后，经互作用区后若处于势阱底部，那么此时电子能量损失在 $2mc^2\delta\gamma_m$ 量级上，所以 $\delta\gamma_m$ 反映了电子失能的量度。$\delta\gamma_m$ 还可以作为能散要求的标志，大的 $\delta\gamma_m$ 及 a_s 可以使系统对电子束散度的要求降低。可以证明：

$$\delta\gamma_m=\frac{2\gamma_r}{\mu}\sqrt{a_sa_w} \tag{33}$$

(3) 返波 FEL 与常规 FEL 的比较 (a) 最佳互作用区长度比较：

$$L_b=L_f/F_m \tag{34}$$

这里下标 b，f 分别表示返波和常规 FEL、以下各参量下标的意义相同。(34) 式表明返波 FEL 具有较长的互作用区（因 $F_m<1$）；(b) 对于同样的 $\Delta\omega$ 和空间位置，$G_b(\Delta\omega, z)<G_L(\Delta\omega, z)$，即常规 FEL 瞬时增益高。但是由于两种 FEL 均需满足 $\Delta\omega L/c=2.6$，所以

$$(\Delta\omega)_b=F_m(\Delta\omega)_f \tag{35}$$

于是：

$$G_b\left(\frac{L_b}{c},\ (\Delta\omega)_b\right)=\frac{1}{F_m^2}G_f\left(\frac{L_f}{c},\ (\Delta\omega)_f\right) \tag{36}$$

故返波 FEL 的饱和增益高(这里引进了饱和相角 Θ 的概念)；(c) 对于同样的电子束和互作用区，返波 FEL 的饱和电平为常规的 $1/F_m$ 倍，(d) 由(24)及(33)式可以证明：

$$(\delta\gamma_m)_b\approx(\delta\gamma_m)_f/\sqrt{F_m} \tag{37}$$

由此可以看出，返波 FEL 对电子束质的要求较低。这点很重要，因为二级 FEL 方案的一重要指标就是要求束质优良，所以返波 FEL 作为二级 FEL 中的一级就比较合适。

5. 结束语

返波 FEL 具有两大优点，饱和增益高和束质要求低，可在二级方案中起一定作用，还可以用劣质电子束放大及辐射毫米波。

参考文献

[1] L. R. Elias, *Phys. Rev. Lett.*, 42(1979), 977—978.
[2] W. Zhou, *Nuclear Instr. & Methods in Physics Research*, A234(1985), 198—201.
[3] W. B. Colson, Ph. D. Thesis, Stanford University, 1977.

SMALL SIGNAL THEORY FOR THE BACKWARD WAVE FREE ELECTRON LASERS

Kong Gangyu　Zhou Wen

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract A detailed analysis for the backward wave free electron laser (FEL) in small signal regime is conducted, following the single partical approach. By the use of a modified factor F_m, the formulas resulted are similar to those of normal FELs. To compare with normal FELs, these formulas show that the backward wave FELs have two main features: the high energy conversiom effeciency and the loose e-beam quality requirement. So it is suitable to be one stage of the two-stage FEL.

Key words FEL; Backward wave; Small signal theory