

空间域的马尔可夫立体网状结构 模型及其应用*

钱 唯

(东南大学, 南京)

摘要 本文提出三维马尔可夫随机变量的网状结构模型, 探讨三维图象的建模及其图象描述的应用. 对所述空间域的马尔可夫立体网状结构模型进行了详细的理论证明. 为三维图象的描述、建模、分割、分类等提供了一个较有力的工具. 最后, 用实例给出一种三维图象的建模及其图象描述.

关键词 马尔可夫立体网状结构模型; 建模; 三维图象

1. 引言

在二维情况下, 一维的马尔可夫链的随机变量的模型称为马尔可夫随机场, 或马尔可夫随机网模型. 最近, 在计算机视觉的研究中, 利用统计方法处理和模拟图象, 建造图象模型是一个很活跃的领域. 自从 L. N. Kanal^[1] 首次提出二维马尔可夫随机网模型以后, 发展至今, 马尔可夫随机网模型在计算机视觉研究的许多方面都起到积极的作用. 例如: 利用马尔可夫随机场模型进行纹理图案模拟, 分类^[2-3], 噪声和纹理图象的分割和复原^[4-6], 以及对图象分析和处理的算法进行简化和改进.

本文首次提出空间域的马尔可夫随机变量立体网状结构模型. 所述模型不仅在三维图象分析, 描述, 建模和分类方面, 而且能够在更广阔的领域内起到积极的作用. 文中用实例给出一种三维图象的建模及其图象描述.

2. 空间域马尔可夫立体网状结构模型

我们把三维的马尔可夫随机变量的模型称为“空间域的马尔可夫立体网状结构模型”. 为了后面叙述方便, 先给出如下定义:

- (a) $X_{M,N,K}$ 是 $M \times N \times K$ 的离散随机变量的立体阵列.
- (b) $x_{a,b,c}$ 是位于 $X_{M,N,K}$ 中的 (a, b, c) 点的随机变量.
- (c) $X_{M,N,K}^{a,b,c}$ 是在 $X_{M,N,K}$ 中去掉 $x_{a,b,c}$ 变量的立体阵列.
- (d) $Z_{M,N,K}^{a,b,c}$ 是所包含的随机变量元素 $x_{i,j,l}$ 具有 $i < a$ 或 $j < b$ 或 $l < c$ 的限制的立体阵列.

定理 1 空间域马尔可夫立体网状结构模型定义为如下表达式:

* 1987 年 12 月 4 日收到, 1988 年 11 月 21 日修改定稿.

$$P(x_{a,b,c} / Z_{M,N,L}^{a,b,c}) = P\left(x_{a,b,c} / \begin{matrix} x_{a-1,b,c}, x_{a,b-1,c}, x_{a,b,c-1}, x_{a-1,b-1,c} \\ x_{a-1,b,c-1}, x_{a,b-1,c-1}, x_{a-1,b-1,c-1} \end{matrix}\right) \quad (1)$$

根据(1)式定义,可得到如下表达式:

$$P(X_{a,b,c}) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{l=1}^c P\left(x_{i,j,l} / \begin{matrix} x_{i-1,j,l}, x_{i,j-1,l}, x_{i,j,l-1}, x_{i,j-1,l-1} \\ x_{i-1,j-1,l}, x_{i-1,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l-1} \end{matrix}\right) \quad (2)$$

其中: $(1 \leq a \leq M, 1 \leq b \leq N, 1 \leq c \leq K)$, $x_{0,j,l}$, $x_{i,0,l}$ 和 $x_{i,j,0}$ 为零.

证明 利用数学归纳法,结合概率乘法法则: 当 $a = b = c = 1$ 时,本定理的(1)=(2),定理成立

设 $X_{a,b,c}$ 时定理成立. 推导 $X_{a+1,b,c}$ 的情况:

$$\begin{aligned} P(X_{a+1,b,c}) &= P(X_{a,b,c})P(x_{a+1,b,c}, x_{a+1,b,c-1}, \dots, x_{a+1,1,1} / X_{a,b,c}) \\ &= P(X_{a,b,c}) [P(x_{a+1,b,c} / x_{a+1,b,c-1}, \dots, x_{a+1,1,1}, X_{a,b,c}) \\ &\quad \times P(x_{a+1,b,c-1} / x_{a+1,b-1,c-1}, \dots, x_{a+1,1,1}, X_{a,b,c}) \dots P(x_{a+1,1,1} / X_{a,b,c})] \end{aligned}$$

根据(1)式得到:

$$\begin{aligned} P(X_{a+1,b,c}) &= P(X_{a,b,c}) \left[P\left(x_{a+1,b,c} / \begin{matrix} x_{a,b,c}, x_{a+1,b-1,c}, x_{a+1,b,c-1}, x_{a,b-1,c} \\ x_{a+1,b-1,c-1}, x_{a,b,c-1}, x_{a,b-1,c-1} \end{matrix}\right) \right. \\ &\quad \cdot P\left(x_{a+1,b,c-1} / \begin{matrix} x_{a,b,c-1}, x_{a+1,b-1,c-1}, x_{a+1,b,c-2}, x_{a,b-1,c-1} \\ x_{a+1,b-1,c-2}, x_{a,b,c-2}, x_{a,b-1,c-2} \end{matrix}\right) \dots \dots \dots \\ &\quad \left. P\left(x_{a+1,1,1} / \begin{matrix} x_{a,1,1}, x_{a+1,1,0}, x_{a+1,0,1}, x_{a+1,0,0} \\ x_{a,0,1}, x_{a,1,0}, x_{a,0,0} \end{matrix}\right) \right] \\ &= P(X_{a,b,c}) \prod_{i=1}^a \prod_{l=1}^c P\left(x_{a+1,i,l} / \begin{matrix} x_{a,i,l}, x_{a+1,i,l-1}, x_{a+1,i-1,l}, x_{a+1,i-1,l-1} \\ x_{a,i,l-1}, x_{a,i-1,l}, x_{a,i-1,l-1} \end{matrix}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{a+1} \prod_{j=1}^b \prod_{l=1}^c P\left(x_{i,j,l} / \begin{matrix} x_{i-1,j,l}, x_{i,j-1,l}, x_{i,j,l-1}, x_{i,j-1,l-1} \\ x_{i-1,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l}, x_{i-1,j-1,l-1} \end{matrix}\right) \end{aligned}$$

对于 $X_{a,b+1,c}$ 和 $X_{a,b,c+1}$ 的情况,根据对称表达方式,和 $X_{a+1,b,c}$ 的证明相同,因此(2)式成立. 证毕.

定理 2 根据定理 1,可得到如下结论:

$$P(x_{a,b,c} / X_{M,N,L}^{a,b,c}) = P \left[x_{a,b,c} \begin{bmatrix} x_{a-1,b-1,c-1}, x_{a-1,b-1,c}, x_{a-1,b-1,c+1} \\ x_{a-1,b,c-1}, x_{a-1,b,c}, x_{a-1,b,c+1} \\ x_{a-1,b+1,c-1}, x_{a-1,b+1,c}, x_{a-1,b+1,c+1} \\ x_{a,b-1,c-1}, x_{a,b-1,c}, x_{a,b-1,c+1} \\ x_{a,b,c-1}, x_{a,b,c}, x_{a,b,c+1} \\ x_{a,b+1,c-1}, x_{a,b+1,c}, x_{a,b+1,c+1} \\ x_{a+1,b-1,c-1}, x_{a+1,b-1,c}, x_{a+1,b-1,c+1} \\ x_{a+1,b,c-1}, x_{a+1,b,c}, x_{a+1,b,c+1} \\ x_{a+1,b+1,c-1}, x_{a+1,b+1,c}, x_{a+1,b+1,c+1} \end{bmatrix} \right] \quad (3)$$

证明:

$$P(x_{a,b,c}/X_{M,N,K}^{a,b,c}) = P(X_{M,N,K})/P(X_{M,N,K}^{a,b,c})$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N \prod_{l=1}^K P(x_{i,j,l} / \begin{matrix} x_{i-1,j,l}, x_{i,j-1,l}, x_{i,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l} \\ x_{i-1,j-1,l}, x_{i-1,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l-1} \end{matrix})}{\sum_{x_{a,b,c}} \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N \prod_{l=1}^K P(x_{i,j,l} / \begin{matrix} x_{i-1,j,l}, x_{i,j-1,l}, x_{i,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l} \\ x_{i-1,j-1,l}, x_{i-1,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l-1} \end{matrix})}$$

(所有可能的值)

对所有不含 $x_{a,b,c}$ 的分子分母可约去, 得到:

$$P(x_{a,b,c}/X_{M,N,K}^{a,b,c}) = \frac{\prod_{i=a}^{a+1} \prod_{j=b}^{b+1} \prod_{l=c}^{c+1} P(x_{i,j,l} / \begin{matrix} x_{i-1,j,l}, x_{i,j-1,l}, x_{i,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l} \\ x_{i-1,j-1,l}, x_{i-1,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l-1} \end{matrix})}{\sum_{x_{a,b,c}} \prod_{i=a}^{a+1} \prod_{j=b}^{b+1} \prod_{l=c}^{c+1} P(x_{i,j,l} / \begin{matrix} x_{i-1,j,l}, x_{i,j-1,l}, x_{i,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l} \\ x_{i-1,j-1,l}, x_{i-1,j,l-1}, x_{i-1,j-1,l-1} \end{matrix})} \quad (4)$$

从(4)式可见, $P(x_{a,b,c}/X_{M,N,K}^{a,b,c})$ 仅仅是 $x_{a,b,c}$ 和它的 26 个相邻近的变量的函数。用简单的方式解释如下:

设三个随机变量 A, B, C , 如果有 $P(A/BC) = f(AB)$ 与 C 无关。则:

$$P(A/BC) = P(A/B)$$

从而(3)式得证, 定理 2 成立。

证毕:

我们将(2)式和(3)式加以推广, 得到:

$$P(X_{a,b,c}) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{l=1}^c P(x_{i,j,l}/U_{i,j,l}) \quad (5)$$

式中, $U_{i,j,l}$ 是在 $Z_{M,N,K}^{i,j,l}$ 阵列中, 环绕在 $x_{i,j,l}$ 周围的最靠近 $x_{i,j,l}$ 的邻近变量的集合。

$$P(X_{M,N,K}) = \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N \prod_{l=1}^K P(x_{i,j,l}/Y_{i,j,l}) \quad (6)$$

其中, $Y_{i,j,l}$ 是在 $X_{M,N,K}$ 阵列中, 环绕在 $x_{i,j,l}$ 周围的相邻变量的集合。

3. 三维图象的建模, 实例及其图象描述

根据随机过程的观点, 把图象看成是三维随机场的概率分布的抽样。如果图象不是随机噪声的话, 那么某点图象的亮度值与它的相邻点相关。三维马尔可夫随机场模型正好给出了在 (i, j, k) 点和与其相邻点相关的灰度值的转移概率表达关系。因此, 我们采用三维马尔可夫随机场作为三维图象的模型。

为了方便图象建模, 用一套新的数学符号表达以上讨论的模型。

设 $r = (i, j, k)$, 可知 $\{x_r\}$ 表示一个三维随机场。用 $\{x_r\}$ 模拟三维图象, 则 x_r 表示 $M \times N \times K$ 的三维图象在 (i, j, k) 点的一个象素亮度值。将(3)式中的 $x_{a,b,c}$ 表示为 x_r , $X_{M,N,K}^{a,b,c}$ 表示为 X_r , 则(3)式为:

$$P(x_r/X_r) = P\{x_r/x_v, v \in D_r\} \quad (7)$$

其中, D_r 表示 r 的邻近点, 一般地表达为:

$$D_p = \{v = (l, m, n); \|r - v\|^2 \leq N_p \text{ 且 } v \neq r\} \quad (8)$$

其中 N_p 是相隔最远的邻近点的欧几里德距离的平方(p 是马氏过程的阶数). (7)式就是一个三维数字图象的模型.

文献[7]采用蒙特卡罗法模拟二维的马尔可夫随机场,对二值 $x_{i,j} \in (0, 1)$ 图象可得到:

$$P(x_{i,j}/X'_{M,N}) = \exp(xT)/[1 + \exp(T)] \quad (9)$$

其中 T 为邻近点的线性组合.

根据马尔可夫随机场的各向同性原理,利用(7)式,可将(9)式推广到三维情况,得到:

$$P(x_r/X_r) = \exp(x_r T_r)/(1 + \exp(T_r)) \quad (10)$$

其中:

$$T_r = a + \sum_{r \in D_p} b_r x_r = a + \sum_{(i,j,k) \in D_p} b(i-l, j-m, k-n) x_{i,j,k}$$

如果所研究的 $\{x_r\}$ 是有限的三维矩形,则在边缘上的点与内部的点相比,具有较少的相邻点,为了弥补这种不足,我们设 $\{x_r\}$ 是周期的,即 $\{x_r\}$ 的左边与右边相联,上边与下边相联.

对应于(10)式的数据列于表1,三维图象模型的五幅二维剖视图象示于图1(a)—图1(e).

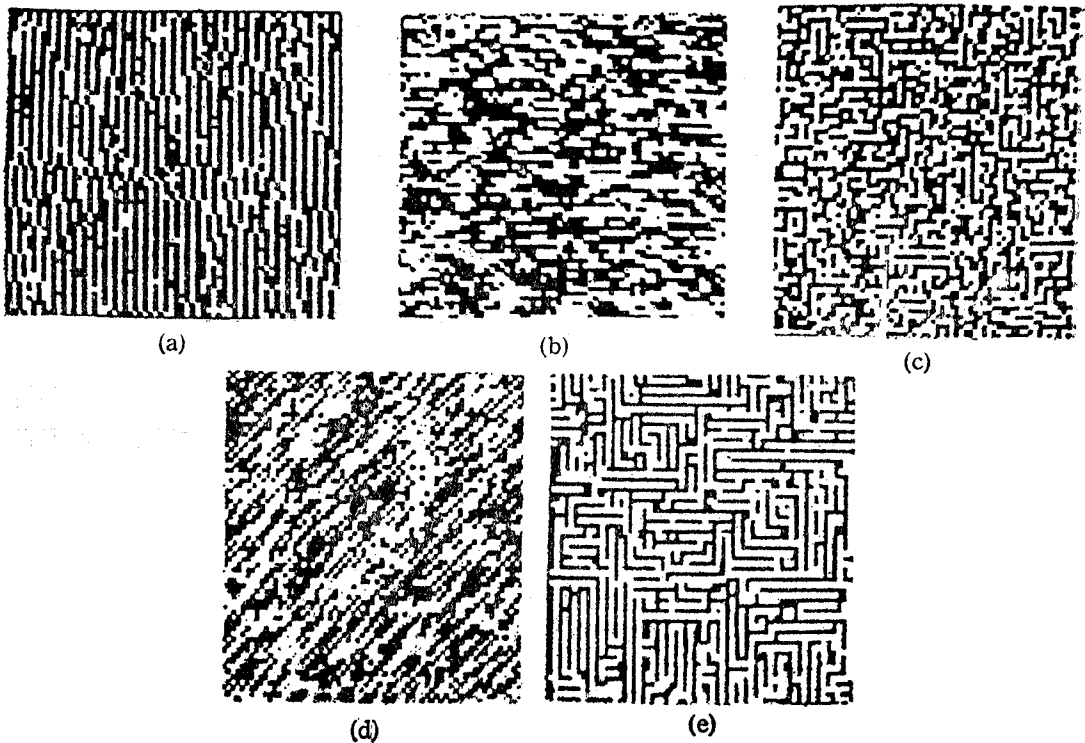


图 1

表 1

一 图	(a)	$a = -0.26, b(1,0,0) = -2, b(0,1,0) = 2.1, b_1(1,1,0) = 0.13, b_2(1,1,0) = 0.015$
	(b)	$a = -2.04, b(1,0,0) = 1.93, b(0,1,0) = 0.16, b_1(1,1,0) = 0.07, b_2(1,1,0) = 0.02$
	(c)	$a = 2.19, b(1,0,0) = -0.088, b(0,1,0) = -0.009, b_1(1,1,0) = -1, b_2(1,1,0) = -1$
	(d)	$a = -1.9, b(1,0,0) = -0.1, b(0,1,0) = 0.1, b_1(1,1,0) = 1.9, b_2(1,1,0) = -0.075$
	(e)	$a = 0.16, b(1,0,0) = 2.06, b(0,1,0) = 2.05, b_1(1,1,0) = -2.03, b_2(1,1,0) = -2.10$

4. 结束语

三维马尔可夫模型在二维图象的分类,分割,建模,图象复原等方面的研究中已取得了成功,而且有许多独到的优点,尤其是在三维纹理图象的分析和综合方面. 三维马尔可夫模型与二维马尔可夫模型一样,在模型本身有许多特点. 例如: 它没有特别的方向性要求,允许我们在各个方向上去考虑它的邻近点,因此,不需要假设模型的因果性. 而且,模型中的变量只与它邻近的变量有关,而与其它众多变量无关. 这样,使我们在计算上得到许多方便,例如从本文的(5)式和(6)式可见,每一个随机变量条件概率的待定系数,在系数估算过程中,能够实行并行计算. 模型的优劣可以通过假设检验来进行客观地评价,而进行假设检验也可以并行地完成. 这样,不但在计算的时间,速度和精确方面得到提高,而且可以较方便地调节,控制系数. 因为马尔可夫模型是产生图象的充要条件,所以,调节,控制模型的系数可以使我们方便地进行模式的研究和分类,有目的地控制图象中的灰度级和分布.

作为本文所研究模型的应用,所给出的三维图象建模实例及其图象描述的应用,具有一定的代表性,可方便地推广到三维图象的分割,分类和各种用途的图象分析.

本文经导师韦钰教授审阅,并提出有益的修改意见. 特此致谢.

参 考 文 献

- [1] L. N. Kanal, *Computer Graphics Image Processing*, 12 (1980)4, 371—375.
- [2] G. R. Cross, A. K. Jain, *IEEE Trans. on PAMI*, PAMI-2 (1983)1, 25—39.
- [3] F. R. Hansen, H. Elliott, *Computer Graphics Image Processing*, 20(1982)1, 101—132.
- [4] R. C. Lappa, R. L. Kashyap, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-28 (1982)3, 461—472.
- [5] H. Derin et al., *IEEE Trans. on PAMI*, PAMI-3 (1984)6, 707—720.
- [6] H. Derin, W. S. Cole, *Computer Graphics Image Processing*, 35(1986)1, 72—78.
- [7] M. Hassnner, J. Sklansky, *Proceeding of ICPR in JAPAN*, 1(1978), 538—540.

THE MODELING OF 3-D IMAGES AND SPACE MARKOV CUBIC MESH MODELS

Qian Wei

(Southeast University, Nanjing)

Abstract Three-dimensional (3-D) Markov cubic random mesh models are presented and proved in the form of two theorems in details. Its applications to the modeling and description of 3-D images are described. The model presented here is the appropriate mathematic tool for the segmentation, modeling, classification and other processing. Finally, an example is given.

Key words Markov cubic mesh model; Modeling; 3-D image