

文章编号:1004-4213(2010)03-0537-6

# 腔 QED 中超导量子干涉仪概率克隆机的物理实现\*

朱艳<sup>1</sup>, 顾永建<sup>1,†</sup>, 徐舟<sup>2</sup>, 谢琳<sup>1</sup>, 马丽珍<sup>1</sup>

(1 中国海洋大学 物理系, 青岛 266100)

(2 中国民航大学 理学院, 天津 300300)

**摘要:** 提出一个量子概率克隆机的物理实现方案, 该方案首先将高 Q 腔中的两个超导量子干涉仪分别作为初始比特和目标比特, 腔模作为测量比特, 通过腔模和经典微波脉冲与超导量子干涉仪的多种相互作用实现量子概率克隆机的么正演化; 然后将腔模态映射到另一个超导量子干涉仪上, 通过对该超导量子干涉仪磁通量的测量完成状态坍缩, 从而以最优的成功概率实现量子态的精确克隆. 本方案采用双光子拉曼共振过程加快单比特门的操作速率, 并且总操作时间远小于自发辐射和腔模衰变时间, 因而在实验上是可行的.

**关键词:** 量子光学; 腔量子电动力学; 超导量子干涉仪; 概率克隆机

**中图分类号:** O431.2

**文献标识码:** A

**doi:** 10.3788/gzxb20103903.0537

## 0 引言

由于未知量子态的理想复制被量子不可克隆定理<sup>[1-2]</sup>所禁止, 人们提出了牺牲精确性的确定性近似克隆方案, 即普适克隆机和态依赖克隆机<sup>[3]</sup>; 以及牺牲确定性的概率性精确克隆方案, 即概率克隆机<sup>[4-5]</sup>. 概率克隆机通过么正演化加测量导致的状态坍缩实现对一组线性无关态的精确克隆, 但其成功概率存在一个上限<sup>[4-5]</sup>. 所有这些克隆机在量子信息中都有各自的应用.

目前已经提出了很多基于腔量子电动力学(腔量子电动力学(Quantum Electrodynamics, QED)系统<sup>[6-7]</sup>的普适量子克隆机的物理实现方案, 在这些方案中使用了与腔相互作用的原子<sup>[8-9]</sup>或超导量子干涉仪(Superconducting Quantum Interference Device, SQUID)<sup>[10]</sup>作为量子克隆机的初始比特和目标比特. 而对于概率克隆机而言, 除张传伟等人<sup>[11]</sup>构造了一个抽象的量子线路之外, 迄今为止还没有人提出基于腔 QED 的物理实现方案.

本文提出一个基于腔 QED 系统的 SQUID 量子比特概率克隆机的物理实现方案, 该方案容易推广到一般的态依赖克隆过程. SQUID 是实现量子信息处理的一种理想系统, 利用其与量子化腔场的相互作用实现量子信息处理更是一种全新的思想. SQUID 易于扩展, 且退相干时间长; 将其植入腔中, 则易于实现强耦合, 隔离噪声, 抑制自发辐射<sup>[12-13]</sup>.

另外, 与原子、离子等相比, 腔中的 SQUID 更便于操控和集成. 本方案将高 Q 腔中的两个 SQUID 分别作为初始比特和目标比特, 腔模作为测量比特, 首先通过腔模和经典微波脉冲与 SQUID 的多种相互作用实现量子概率克隆机的么正演化, 然后将腔模态映射到另一个 SQUID 上, 通过对该 SQUID 磁通量的测量完成状态坍缩, 从而以最优的成功概率实现量子态的精确克隆. 本方案采用双光子拉曼共振过程加快单比特门的操作速率, 采用大失谐的腔降低了对腔品质的要求. 计算表明, 整个克隆过程的总操作时间远小于自发辐射和腔模衰变时间, 因而在实验上是可行的.

## 1 两个非正交态的量子概率克隆

单个量子比特存在两个线性无关态, 它们是非正交的. 根据文献<sup>[5]</sup>的方案, 对于两个非正交量子态  $|\phi_0\rangle$  和  $|\phi_1\rangle$ , 通过一个么正演化过程和测量导致的状态坍缩过程可以一定的概率得到精确的克隆. 整个体系包括初始比特 A, 目标比特 B 和测量比特 P. 设初始比特 A 的输入态为  $|\phi_s\rangle$ , 其中  $s=0, 1$ , 目标比特 B 最初是空白态  $|\Sigma\rangle$ , 测量比特 P 最初处在态  $|m_P\rangle$ , 么正演化过程为

$$\begin{aligned} U(|\phi_0\rangle|\Sigma\rangle|m_P\rangle) &= \sqrt{\eta}|\phi_0\rangle|\phi_0\rangle|m_P\rangle + \\ &\quad \sqrt{1-\eta}|\phi_{AB}\rangle|m'_P\rangle \\ U(|\phi_1\rangle|\Sigma\rangle|m_P\rangle) &= \sqrt{\eta}|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle|m_P\rangle + \\ &\quad \sqrt{1-\eta}|\phi_{AB}\rangle|m'_P\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

式中,  $|\phi_{AB}\rangle$  是复合系统 AB 的态,  $|m_P\rangle$ ,  $|m'_P\rangle$  是测量比特 P 的两个正交态. 么正演化完成后对测量比

\* 国家自然科学基金(60677044)资助

† Tel: 0532-66781862

Email: yjgu@ouc.edu.cn

收稿日期: 2009-03-23

修回日期: 2009-06-07

特实施测量,当且仅当测量结果为 $|m_p\rangle$ 时,克隆成功,成功的概率为 $\eta = \frac{1}{1 + \langle \psi_0 | \psi_1 \rangle}$  [5].

不失一般性,设初始比特 A 的非正交态为

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \cos\theta |g\rangle + \sin\theta |i\rangle \\ |\psi_1\rangle &= \cos\theta |g\rangle - \sin\theta |i\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $0 < \theta < \pi/4$ ,这样表示的原因是,对于任意的非正交态,总可以通过一个么正旋转转化为方程(2)中的态[11],采用这样的表示后,克隆成功的概率 $\eta =$

$\frac{1}{2\cos^2\theta}$ .为与下文的叙述一致,用 $|g\rangle, |i\rangle$ 代表量子比特 A、B 的两个基本态,而量子比特 P 的两个正交态分别表为 $|m_p\rangle = |0\rangle$ 和 $|m'_p\rangle = |1\rangle$ .将模 B 的初态取为 $|\Sigma\rangle = |g\rangle$ ,并选择 $|\phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gg\rangle + |ii\rangle)$ ,则系统的演化可表示为

$$\begin{aligned} &\cos\theta |gg0\rangle \pm \sin\theta |ig0\rangle \xrightarrow{U} \\ &\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} (\cos\theta |g\rangle \pm \sin\theta |i\rangle) (\cos\theta |g\rangle \pm \\ &\sin\theta |i\rangle) |0\rangle + \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{\sqrt{2}\cos\theta} (|gg\rangle + |ii\rangle) |1\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

## 2 超导量子干涉仪(SQUID)与腔场以及经典脉冲的相互作用

$\Lambda$ 型三能级射频超导量子干涉仪(rf-SQUID)如图1,它包括两个低能级 $|g\rangle, |i\rangle$ 和一个高能级 $|e\rangle$ [14-15].在演化过程中信息编码在较低的两个能级 $|g\rangle$ 和 $|i\rangle$ 上,高能级 $|e\rangle$ 作为辅助能级参与演化.

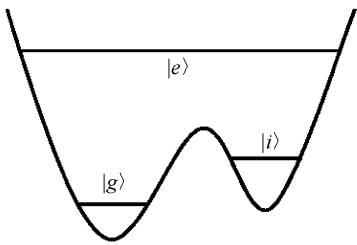


图1  $\Lambda$ 型三能级射频超导量子干涉仪能级构型

Fig.1 Energy structure of three-level  $\Lambda$ -type SQUID

### 2.1 超导量子干涉仪与腔场的共振相互作用

考虑一个植入高 Q 腔中的  $\Lambda$  型三能级 SQUID,假定 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的跃迁与腔共振, $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ 和 $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ 的跃迁与腔远离共振,SQUID 与腔场的相互作用哈密顿量为[14]

$$H_I = \lambda [a^+ |g\rangle \langle e| + a |e\rangle \langle g|] \quad (4)$$

式中 $\lambda$ 是有效耦合系数,SQUID-腔系统的态随时间的演化可表示为

$$\begin{aligned} |g,1\rangle &\rightarrow \cos(\lambda t) |g,1\rangle - i \sin(\lambda t) |e,0\rangle \\ |e,0\rangle &\rightarrow \cos(\lambda t) |e,0\rangle - i \sin(\lambda t) |g,1\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.2 超导量子干涉仪与腔场的失谐相互作用

下面考虑两个完全相同的超导量子干涉仪 SQUID a、b 与一个单模腔的大失谐相互作用,该模型最初是由中国科学技术大学量子信息重点实验室的 Zheng 和 Guo 基于原子和腔的相互作用提出的[16].在该模型中,腔模与 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 跃迁满足大失谐的条件( $\Delta = |\omega_{ge} - \omega_c| \gg \lambda$ ),其中 $\Delta$ 是腔频与跃迁 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 之间的失谐量, $\lambda$ 是有效耦合系数,此时,SQUID 与腔场的相互作用哈密顿量为[14,16]

$$H = \gamma \left[ \sum_{m=a,b} (|e\rangle_m \langle e| a a^+ - |g\rangle_m \langle g| a^+ a) + |e\rangle_a \langle g| \otimes |g\rangle_b \langle e| + |g\rangle_a \langle e| \otimes |e\rangle_b \langle g| \right] \quad (6)$$

式中 $\gamma = \lambda^2 / (\omega_c - \omega_{ge})$ ,SQUID 与腔之间没有能量交换,系统的态随时间的演化为

$$\begin{aligned} |e\rangle_a |g\rangle_b &\rightarrow e^{-i\gamma t} [\cos(\gamma t) |e\rangle_a |g\rangle_b - \\ &i \sin(\gamma t) |g\rangle_a |e\rangle_b] \\ |g\rangle_a |e\rangle_b &\rightarrow e^{-i\gamma t} [\cos(\gamma t) |g\rangle_a |e\rangle_b - \\ &i \sin(\gamma t) |e\rangle_a |g\rangle_b] \\ |e\rangle_a |e\rangle_b &\rightarrow e^{-i2\gamma t} |e\rangle_a |e\rangle_b \\ |e\rangle_a |i\rangle_b &\rightarrow e^{-i\gamma t} |e\rangle_a |i\rangle_b \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.3 超导量子干涉仪与经典微波脉冲的共振相互作用

考虑经典微波脉冲驱动超导量子干涉仪的情况,调谐微波激光脉冲的频率,使其与超导量子干涉仪 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的跃迁共振,在旋波近似下系统的相互作用哈密顿量为[14]

$$H_I = \Omega_{ge} (|g\rangle \langle e| + |e\rangle \langle g|) \quad (8)$$

式中 $\Omega_{ge}$ 是微波场与跃迁 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的有效耦合系数,系统的态随时间的演化为

$$\begin{aligned} |g\rangle &\rightarrow \cos \Omega_{ge} t |g\rangle - i \sin \Omega_{ge} t |e\rangle \\ |e\rangle &\rightarrow \cos \Omega_{ge} t |e\rangle - i \sin \Omega_{ge} t |g\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

与上述情况相似,若调谐微波激光脉冲的频率与超导量子干涉仪 $|i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的跃迁共振,此时相互作用哈密顿量为[14]

$$H_I = \Omega_{ie} (|i\rangle \langle e| + |e\rangle \langle i|) \quad (10)$$

$\Omega_{ie}$ 是微波场与跃迁 $|i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的有效耦合系数,系统的态的演化为

$$\begin{aligned} |i\rangle &\rightarrow \cos \Omega_{ie} t |i\rangle - i \sin \Omega_{ie} t |e\rangle \\ |e\rangle &\rightarrow \cos \Omega_{ie} t |e\rangle - i \sin \Omega_{ie} t |i\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

### 2.4 双光子拉曼共振过程

用两个经典微波脉冲同时驱动 SQUID 构成一个双光子拉曼共振过程,可以显著加快 SQUID 的单比特操作速率[17].如图2,令 pulse 1 与跃迁 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的失谐量和 pulse 2 与 $|i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的失谐量相同,即 $\Delta' = \omega_{ge} - \omega_1 = \omega_{ie} - \omega_2$ ,在大失谐条件下相互作用哈密顿量为[17]

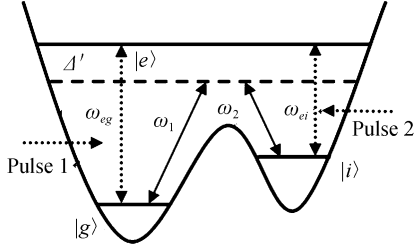


图 2 两个经典微波脉冲驱动超导量子干涉仪  
Fig. 2 The SQUID driven by two classical microwave fields

$$H = -\hbar \left[ \frac{\Omega_1^2}{\Delta'} \sigma_{gg} + \frac{\Omega_2^2}{\Delta'} \sigma_{ii} + \lambda' e^{i\omega_{gi}t} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \sigma^- + \lambda' e^{-i\omega_{gi}t} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \sigma^+ \right] \quad (12)$$

式中  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  是 Rabi 频率, 算符  $\sigma_{gg} = |g\rangle\langle g|$ ,  $\sigma_{ii} = |i\rangle\langle i|$ ,  $\sigma^- = |g\rangle\langle i|$ ,  $\sigma^+ = |i\rangle\langle g|$ ,  $\phi_1, \phi_2$  分别为经典微波脉冲的初相位,  $\lambda' = \Omega_1\Omega_2/\Delta'$  为有效耦合系数. 令  $\Omega_1 = \Omega_2$ , 则系统随时间的演化为<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} |g\rangle &\rightarrow \cos(\lambda't) |g\rangle + e^{-i\omega_{gi}t} e^{-i(\phi_1 - \phi_2 - \frac{\pi}{2})} \sin(\lambda't) |i\rangle \\ |i\rangle &\rightarrow e^{i(\phi_1 - \phi_2 + \frac{\pi}{2})} \sin(\lambda't) |g\rangle + e^{-i\omega_{gi}t} \cos(\lambda't) |i\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

式中略去了总相因子  $e^{i\lambda't}$ , 因其在态演化过程中不起作用.

利用双光子拉曼共振过程与 2.1 中所述的超导量子干涉仪与腔场的共振相互作用, 可以构造一个腔场对 SQUID 的受控非门, 过程为:

Step 1. 应用两个微波脉冲驱动 SQUID, 调谐初位相差  $\phi_1 - \phi_2 = -\pi/2$ , 调节相互作用时间  $t_{c1} = 3\pi/4\lambda'$ , 然后关闭经典场, 令 SQUID 经过一个时间为  $t_{c2}$  的自由演化过程, 并使  $t_{c2}$  满足条件  $\omega_{gi}(t_{c1} + t_{c2}) = (2m+1)\pi$ ;

Step 2. 令  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  跃迁与腔模共振, 调节相互作用时间  $t_{c3} = \pi/\lambda$ ;

Step 3. 重复 Step 1 操作.

整个过程的演化可写为

$$\begin{aligned} |g0\rangle &\xrightarrow{\text{step1}} (|i\rangle - |g\rangle) |0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{step2}} (|i\rangle - |g\rangle) |0\rangle \xrightarrow{\text{step3}} |g0\rangle \\ |i0\rangle &\xrightarrow{\text{step1}} (|i\rangle + |g\rangle) |0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{step2}} (|i\rangle + |g\rangle) |0\rangle \xrightarrow{\text{step3}} |i0\rangle \\ |g1\rangle &\xrightarrow{\text{step1}} (|i\rangle - |g\rangle) |1\rangle \\ &\xrightarrow{\text{step2}} (|i\rangle + |g\rangle) |1\rangle \xrightarrow{\text{step3}} |i1\rangle \\ |i1\rangle &\xrightarrow{\text{step1}} (|i\rangle + |g\rangle) |1\rangle \\ &\xrightarrow{\text{step2}} (|i\rangle - |g\rangle) |1\rangle \xrightarrow{\text{step3}} |g1\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

式中 SQUID 与腔和经典脉冲的不同相互作用可通过调节 SQUID 的能级间隔和微波脉冲的频率来分别实现<sup>[14-15, 17-18]</sup>.

### 3 量子概率克隆机的物理实现

把三个超导量子干涉仪植入一个高 Q 腔中, 通过腔场与经典微波场与 SQUID a、b 的相互作用来实现量子概率克隆机的幺正演化, 最后再通过另一个超导量子干涉仪 SQUID c 的测量完成整个概率克隆机的实现. 在本方案中, 我们用到了 SQUID 与腔和经典脉冲的多种相互作用, 这可以通过调节 SQUID 的能级间隔和微波脉冲的频率来分别实现, 而在 SQUID 系统中, 能级间隔很容易通过调节磁通量或临界电流来改变<sup>[14-15, 18]</sup>, 另外, 可以通过调节 SQUID 的能级间隔保证某个 SQUID 与腔相互作用时其余的 SQUID 不与腔发生相互作用. 在本方案中首先将腔场制备在真空态  $|0\rangle$ , SQUID b 和 SQUID c 制备在态  $|g\rangle$ , SQUID a 则处于式(2)所示的待克隆态.

#### 3.1 幺正演化的实现

Step (I) 用经典微波脉冲驱动 SQUID a, 相互作用时间  $t_1 = 3\pi/2\Omega_{ge}$ , 系统的初态演化为

$$\text{icos } \theta |e\rangle_a |g\rangle_b \pm \sin \theta |i\rangle_a |g\rangle_b |0\rangle \quad (15)$$

Step (II) 应用双光子拉曼共振过程于 SQUID a, 令初相位差  $\phi_1 - \phi_2 = \pi/4$ , 调节相互作用时间  $t_2 = \pi/2\lambda'$ , 系统的态的演化为

$$\text{icos } \theta |e\rangle_a |g\rangle_b |0\rangle \pm e^{3\pi i/4} \sin \theta |g\rangle_a |g\rangle_b |0\rangle \quad (16)$$

Step (III) 令 SQUID a 的  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  的跃迁与腔场共振, 经过时间  $t_3$  后, 由式(5)得到

$$\text{icos } \theta [A |e\rangle_a |0\rangle + iB |g\rangle_a |1\rangle] |g\rangle_b \pm e^{3\pi i/4} \sin \theta |g\rangle_a |g\rangle_b |0\rangle \quad (17)$$

式中  $t_3$  满足

$$A = \cos(\lambda t_3) = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos^2 \theta}\right)^2},$$

$$B = -\sin(\lambda t_3) = \sqrt{2 \times \left(\frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{2 \cos^2 \theta}\right)^2}.$$

Step (IV) 令 SQUID b 的  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  跃迁与腔场耦合, 在哈密顿量(4)下演化, 经过时间  $t_4 = \pi/2\lambda$ , 演化至

$$\text{icos } \theta (A |e\rangle_a |g\rangle_b |0\rangle + B |g\rangle_a |e\rangle_b |0\rangle) \pm e^{3\pi i/4} \sin \theta |g\rangle_a |g\rangle_b |0\rangle \quad (18)$$

Step (V) 令 SQUID a 再次与腔共振相互作用, 类似 Step (III) 过程, 经过时间  $t_5$  后, 系统的态演化为

$$\text{icos } \theta \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |e\rangle_a |0\rangle - i \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos^2 \theta} |g\rangle_a |1\rangle \right) |g\rangle_b + iB \cos \theta |g\rangle_a |e\rangle_b |0\rangle \pm e^{3\pi i/4} \sin \theta |g\rangle_a |g\rangle_b |0\rangle \quad (19)$$

式中  $t_5$  满足  $\cos \lambda t_5 = \frac{1}{\sqrt{2}A}$ ,  $\sin \lambda t_5 = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2}A \cos^2 \theta}$ .

Step (VI) 令 SQUID b 再次与腔共振相互作用, 令  $t_6 = 3\pi/2\lambda$ , 得到

$$i \cos \theta \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |e\rangle_a |g\rangle_b + \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos^2 \theta} |g\rangle_a |e\rangle_b \right) |0\rangle - B \cos \theta |g\rangle_a |g\rangle_b |1\rangle \pm e^{3\pi i/4} \sin \theta |g\rangle_a |g\rangle_b |0\rangle \quad (20)$$

Step (VII) 应用经典脉冲驱动 SQUID a, 与跃迁  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  共振, 作用时间  $t_7 = \pi/2\Omega_{ge}$ , 式(20)演化为

$$\cos \theta \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle_a |g\rangle_b + \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos^2 \theta} |e\rangle_a |e\rangle_b \right) |0\rangle + i B \cos \theta |e\rangle_a |g\rangle_b |1\rangle \mp i e^{3\pi i/4} \sin \theta |e\rangle_a |g\rangle_b |0\rangle \quad (21)$$

Step (VIII) 令 SQUID a 和 SQUID b 与腔发生失谐相互作用, 经过时间  $t_8 = \pi/4\gamma$ , 系统的态演化为

$$\begin{aligned} & \cos \theta \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle_a |g\rangle_b - i \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos^2 \theta} |e\rangle_a |e\rangle_b \right) |0\rangle + \\ & i e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{2 \cos \theta} \left( |e\rangle_a |g\rangle_b - i |g\rangle_a |e\rangle_b \right) |1\rangle \pm \\ & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left( |e\rangle_a |g\rangle_b - i |g\rangle_a |e\rangle_b \right) |0\rangle \end{aligned} \quad (22)$$

Step (IX) 用经典脉冲驱动 SQUID a 和 SQUID b, 令其与跃迁  $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  共振, 经过时间  $t_9 = 3\pi/2\Omega_{ie}$  后, 系统的态演化为

$$\begin{aligned} & \cos \theta \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle_a |g\rangle_b + i \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos^2 \theta} |i\rangle_a |i\rangle_b \right) |0\rangle + \\ & e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{2 \cos \theta} \left( i |i\rangle_a |g\rangle_b + |g\rangle_a |i\rangle_b \right) |1\rangle \pm \\ & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left( i |i\rangle_a |g\rangle_b + |g\rangle_a |i\rangle_b \right) |0\rangle \end{aligned} \quad (23)$$

Step (X) 对 SQUID b 实施式(14)所述的腔对 SQUID 的受控非操作, 式(23)演化为

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} |g\rangle_a |g\rangle_b + i \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos^2 \theta} |i\rangle_a |i\rangle_b \right) |0\rangle + \\ & e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{2 \cos \theta} \left( i |i\rangle_a |i\rangle_b + |g\rangle_a |g\rangle_b \right) |1\rangle \pm \\ & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left( i |i\rangle_a |g\rangle_b + |g\rangle_a |i\rangle_b \right) |0\rangle \end{aligned} \quad (24)$$

Step (XI) 对 SQUID a 应用双光子拉曼过程, 调节相互作用时间  $t_{11} = 2\pi/\lambda'$ , 然后关闭经典场, 让 SQUID a 经过一个时间为  $t_\omega$  的自由演化过程,  $t_\omega$  与  $t_{11}$  满足  $\omega_{gi}(t_{11} + t_\omega) = (2m + 1/2)\pi$ , 系统的态最终演化为

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} |g\rangle_a |g\rangle_b + \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos \theta} |i\rangle_a |i\rangle_b \right) |0\rangle + \\ & e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{2 \cos \theta} \left( |i\rangle_a |i\rangle_b + |g\rangle_a |g\rangle_b \right) |1\rangle \pm \end{aligned}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left( |i\rangle_a |g\rangle_b + |g\rangle_a |i\rangle_b \right) |0\rangle \quad (25)$$

即

$$\begin{aligned} & \cos \theta |gg0\rangle \pm \sin \theta |igo\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} (\cos \theta |g\rangle_a \pm \\ & \sin \theta |i\rangle_a) (\cos \theta |g\rangle_b \pm \sin \theta |i\rangle_b) |0\rangle + \\ & e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{\sqrt{2} \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |g\rangle_a |g\rangle_b + |i\rangle_a |i\rangle_b \right) |1\rangle \end{aligned} \quad (26)$$

由式(26)可以看出与式(3)相比, 式(26)中最后一项多了一项相位因子  $e^{i\pi/4}$ , 由于在测量中不影响结果, 因此不予以考虑.

### 3.2 状态坍塌的实现

令 SQUID c 与腔场发生共振相互作用, 将腔模的态映射到 SQUID c 上, 这样就可以通过测量 SQUID c 的态完成最后的测量过程. 假定 SQUID c 的初态为  $|g\rangle_c$ , 当腔模与 SQUID c 的  $|g\rangle_c \leftrightarrow |e\rangle_c$  跃迁共振时, 调节相互作用时间  $t_{12} = 2\pi/\lambda$ , 系统的态演化为

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} (\cos \theta |g\rangle_a + \sin \theta |i\rangle_a) (\cos \theta |g\rangle_b + \right. \\ & \left. \sin \theta |i\rangle_b) |g\rangle_c + e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{\sqrt{2} \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |g\rangle_a |g\rangle_b + \right. \right. \\ & \left. \left. |i\rangle_a |i\rangle_b \right) |e\rangle_c \right] |0\rangle \end{aligned} \quad (27)$$

然后对 SQUID c 做一个基为  $|g\rangle_c, |e\rangle_c$  的正交投影测量, 当测量结果为  $|g\rangle_c$  时, 我们得到了信息的精确克隆, 成功概率为  $\left| \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} \right|^2 = \frac{1}{2 \cos^2 \theta}$ ; 反之, 当结果为  $|e\rangle_c$  时, 克隆失败. 对 SQUID c 的测量可以通过对其磁通量的测量完成, 目前实验上已经实现<sup>[19]</sup>.

### 3.3 讨论

能级的自发辐射和腔泄露是两个必须考虑的问题, 本方案要想实际执行, 总操作时间必须远小于能级  $|e\rangle$  的自发辐射时间和腔模的寿命. 利用表 1 中的数据计算了本方案中每一步所需的操作时间, 表 1 中的数据取自文献<sup>[10]</sup>, 其中每个参量的含义可参见本文第 2 部分, 计算结果见表 2. 由表 2 的结果容易求出本方案所需的总演化时间, 可见, 它的确远小于能级  $|e\rangle$  的自发辐射时  $t_{\text{total}} = 66.16 \text{ ns}$  间  $\gamma_e^{-1} = 2.5 \text{ } \mu\text{s}$  和腔模的寿命  $\kappa^{-1} = 3.8 \text{ } \mu\text{s}$ <sup>[10]</sup>.

表 1 计算各步演化时间所需参量,选自参考文献[8]

Table 1 Parameters for computing time of each step, selected from Ref. [8]

$\gamma=2.08\times 10^{10} \text{ s}^{-1}$	$\lambda\sim 2.5\times 10^9 \text{ s}^{-1}$	$\lambda'\sim 2.4\times 10^8 \text{ s}^{-1}$	$\Omega_{ge}=2.62\times 10^9 \text{ s}^{-1}$	$\Omega_{ie}=2.07\times 10^9 \text{ s}^{-1}$
--	---	--	--	--

表 2 本文方案每一步所需的时间

Table 2 Time used for each step

$t_i$	$t_1$	$t_2$	$t_{3\max}$	$t_4$	$t_{5\max}$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$
$t/\text{ns}$	1.80	6.54	2.51	0.63	0.31	1.89	0.60	0.04	2.27	20.88	26.18	2.51

另外,快速调节 SQUID 的能级间隔也是很重要的一个方面,研究表明,SQUID 的能级间隔很容易通过调节外场的通量或是临界电流来改变<sup>[14-15,18]</sup>. 本方案要求各 SQUID 与腔的耦合是相同的,这可以通过调节各 SQUID 在腔轴上的位置  $r_1, r_2, r_3$  使得腔场的磁分量  $B(r_1, t)$ 、 $B(r_2, t)$  和  $B(r_3, t)$  相同来实现. 还有一个条件必须满足,就是 SQUID 之间的耦合作用是可以忽略的,该条件也不难满足,只要两个超导量子干涉仪之间的距离远小于单个超导量子干涉仪的线度,超导比特之间的相互作用就可以忽略不计<sup>[10]</sup>. 为提高性能,还可以采取以下措施:1)通过增大 Rabi 频率  $\Omega$  可以减小经典脉冲和超导比特之间的相互作用时间;2)通过对超导量子比特的设计使激发能级  $|e\rangle$  的自发辐射时间  $\gamma_e^{-1}$  足够长;3)用一个高品质因数的腔模可以延长腔的寿命  $\kappa^{-1}$ ,等等<sup>[11-12,14,19]</sup>.

## 4 结论

本文提出了一个基于腔 QED 的超导量子干涉仪概率克隆机的物理实现方案. 该方案将高 Q 腔中的两个超导量子干涉仪分别作为初始比特和目标比特,腔模作为测量比特,通过腔模和经典微波脉冲与 SQUID 的多种相互作用实现量子概率克隆机的么正演化,然后将腔模态映射到另一个 SQUID 上,通过对该 SQUID 磁通量的测量完成状态坍缩,从而以最优的成功概率实现量子态的精确克隆. 本方案总操作时间远小于自发辐射和腔模衰变时间,因而在实验上是可行的.

### 参考文献

- [1] WOOTTERS W K, ZUREK W H. A single quantum cannot be cloned[J]. *Nature*, 1982, **299**: 802-803.
- [2] SCARANI V, IBLISDIR S, GISIS N, *et al.* Quantum cloning [J]. *Rev Mod Phys*, 2005, **77**(4): 1225-1256.
- [3] BUZEK V, HILLERY M. Quantum copying: Beyond the no-cloning theorem[J]. *Phys Rev A*, 1996, **54**(3): 1844-1852.
- [4] DUAN Lu-ming, GUO Guang-can. Probabilistic cloning and identification of linearly independent quantum states[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **80**(22): 4999-5002.
- [5] DUAN Lu-ming, GUO Guang-can. A probabilistic cloning

machine for replicating two non-orthogonal states [J]. *Phys Lett A*, 1998, **243**(5-6): 261-264.

- [6] JAYNES E T, COMMINGS F W. Comparison of quantum and sem-classical radiation theories with application to the beam maser[J]. *IEEE*, 1963, **51**(1): 89-110.
- [7] CHEN Mei-feng, MA Song-she. Generation of W-type entangled coherent states of three-cavity field by raman interaction[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(5): 950-954.
- [8] MILMAN P, OLLIVIER H, RAIMOND J M. Universal quantum cloning in cavity QED[J]. *Phys Rev A*, 2003, **67**(1): 012314-012317.
- [9] ZOU Xu-bo, PAHLKE K, MATHIS W. Scheme for the implementation of a universal quantum cloning machine via cavity-assisted atomic collisions in cavity QED[J]. *Phys Rev A*, 2003, **67**(2): 024304-024307.
- [10] YANG Jian, YU Ya-fei, ZHANG Zhi-ming, *et al.* Realization of universal quantum cloning with superconducting quantum-interference device qubits in a cavity[J]. *Phys Rev A*, 2008, **77**(3): 034302-034305.
- [11] ZHANG Chuan-wei, WANG Zi-yang, LI Chuan-feng, *et al.* Realizing probabilistic identification and cloning of quantum states via universal quantum logic gates[J]. *Phys Rev A*, 2000, **61**(6): 062310-062318.
- [12] YU Yang, HAN Si-yuan, CHU Xi, *et al.* Coherent temporal oscillations of macroscopic quantum states in a josephson junction[J]. *Science*, 2002, **296**: 889-892.
- [13] CHIORESCU I, NAKAMURA Y, HARMANS C J P M, *et al.* Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit[J]. *Science*, 2003, **299**: 1869-1871.
- [14] YANG Chui-ping, CHU Shih-I. Possible realization of entanglement, logical gates, and quantum-information transfer with superconducting quantum interference device qubits in cavity QED[J]. *Phys Rev A*, 2003, **67**(4): 042311-042318.
- [15] YANG Chui-ping, CHU Shih-I. Quantum information transfer and entanglement with SQUID qubits in Cavity QED: A Dark-State scheme with tolerance for nonuniform device parameter[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **92**(11): 117902-117905.
- [16] ZHENG Shi-biao, GUO Guang-can. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED[J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **85**(11): 2392-2395.
- [17] YANG Chui-ping, HAN Si-yuan. Arbitray single-qubit operations without energy relaxation in a three-level SQUID qubit[J]. *Phys Lett A*, 2004, **321**(5-6): 273-279.
- [18] HAN S, LAPOINTE J, LUKENS J E. *Single-electron tunneling and macroscopic devices* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991, **31**: 219-222.
- [19] MAKHLIN Y, SCHOEN G, SHNIRMAN A. Quantum-state engineering with Josephson-junction devices[J]. *Rev Mod Phys*, 2001, **73**(2): 357-400.

## Physical Realization of Probabilistic Cloning Machines of Superconducting Quantum Interference Devices in Cavity QED

ZHU Yan<sup>1</sup>, GU Yong-jian<sup>1</sup>, XU Zhou<sup>2</sup>, XIE Lin<sup>1</sup>, MA Li-zhen<sup>1</sup>

(1 *Department of Physics, Ocean University of China, Qingdao 266100, China*)

(2 *College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China*)

**Abstract:** A scheme is proposed for the physical realization of a quantum probabilistic cloning machine. First, with two superconducting quantum interference devices (SQUIDs) embedded in a high- $Q$  cavity used as the original and target qubits respectively, and the cavity field as the measurement qubit, the unitary evolution required for the cloning machines is realized through multiple interactions of SQUID with the cavity or classical microwave pulses. Then the state reduction is implemented by mapping the cavity state onto another SQUID and measuring the magnetic flux of the SQUID, thus realizing the exact cloning of quantum states with optimal success probability. In this scheme, two-photon Raman resonance process is used to increase the single qubit operation rate, and the total operation time is far less the time of spontaneous decay and cavity decay. Therefore this scheme is experimentally feasible.

**Key words:** Quantum optics; Cavity-QED; SQUID; Quantum probabilistic cloning machine



**ZHU Yan** was born in 1982. She is a postgraduate at College of Information Science and Engineering, Ocean University of China. Her research interests focus on quantum information and quantum optics.



**GU Yong-jian** was born in 1964. He obtained the Ph. D. degree in physics from University of Science and Technology of China. Now he is a professor, and his research interests focus on quantum optics and quantum information science.