Contrôle impulsionnel appliqué à la gestion de changement de technologie dans une entreprise

Rim AMAMI
Université de Toulouse, Institut de Mathématique de Toulouse
rim.amami@math.univ-toulouse.fr

April 12, 2010

1 Introduction

Le but de ce travail est l'étude d'un problème du contrôle impulsionnel appliqué à la gestion du choix de technologie d'une entreprise (voir par exemple A. Bensoussan et J.L. Lions [5]). Nous supposons que l'entreprise décide à certains instants (instants d'impulsions) de changer de technologie, ce qui induit un saut de la valeur de la firme (impulsions). Les instants d'impulsion, le choix de la nouvelle technologie, la loi des sauts sont des variables des décisions, dont l'ensemble est appelé un contrôle impulsionnel.
Soient (τ_n) la suite croissante des instants d'impulsions et convergente vers une limite notée τ, ζ_{n+1} la technologie choisie à l'instant τ_n et Δ_n la taille du saut du log de la valeur de la firme à l'instant τ_n. On appelle un contrôle impulsionnel la donnée de tous ces paramètres, soit la stratégie notée $\alpha = (\tau_n, \zeta_{n+1}, \Delta_n, n \geq -1)$.
Toute stratégie α occasionne un gain moyen:

$$K(\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds - \sum_{n\geq 0} e^{-\beta \tau_n} c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \Big| \, \sigma(\xi_0, Y_0)\right],$$

où $\beta > 0$ est un coefficient d'actualisation, ξ_s indique la technologie au temps s, et Y est le processus représentant le log de la valeur de la firme. La fonction f représente le bénéfice net de la firme et la fonction c représente le coût de changement de technologie. L'objectif de l'entrepreneur est de trouver une stratégie $\widehat{\alpha}$ qui maximise la fonction gain de la firme.

Les outils mathématiques qui sont à la base d'une telle étude ont été initiés par A. Bensoussan et J.L. Lions [5] et ensuite formalisés par d'autres auteurs. Par exemple, dans le modèle de J.P. Lepeltier et B. Marchal [12], τ_n représente le "temps de mort" du système. Les auteurs considérent la commutation de la technologie

comme une impulsion. Le système est "tué" en τ_n puis on le fait renaître en suivant une nouvelle technologie choisie entre la moderne et l'ancienne afin d'obtenir une stratégie optimale.
Le même modèle a été étudié par J.P. Lepeltier et B. Marchal [14]. leur article traite une technique purement probabiliste pour la résolution du problème de contrôle impulsionnel. L'outil de base est la théorie générale du contrôle de C. Striebel qui permet d'obtenir un critère d'optimalité performant.
Dans le modèle de P.A. Meyer [16], la valeur de la firme est modélisée suivant un modèle canonique. La construction du problème de contrôle est fondée sur la théorie de la renaissance des processus de Markov. Avant la première impulsion, la loi du système est celle d'un processus de Markov tué au moment de cette impulsion. Puis après l'impulsion, on le fait renaitre suivant une nouvelle loi de processus de Markov à l'aide d'une probabilité de transition.
Nous mentionnons également [8] et [11] qui ont utilisé des outils purement probabilistes comme l'enveloppe de Snell et les équations différentielles stochastiques Backward pour résoudre le problème optimal de changement de technologie en horizon fini.
M.H.A Davis a étudié dans [7] un problème du contrôle optimal déterministe. Il a introduit une simple formulation du principe de la programmation dynamique des processus de Markov déterministes par morceaux (PMDP) qui aident à résoudre ce type de problème.
M. Robin a abordé dans sa thèse [23] un type de problème du contrôle impulsionnel avec retard déterministe, c'est à dire qu'aucune décision ne peut être prise avant l'effet de la dernière décision. Il a établi des résultats sur les problèmes des temps d'arrêt optimaux essentiellement pour les processus de Markov fellériens. Le résultat fondamental de cette thèse est la propriété de continuité de la fonction valeur obtenue par des techniques de pénalisation.
G. Mazziotto et J. Szpirglas [15] ont étudié le contrôle impulsionnel des systèmes stochastiques en information incomplète selon des méthodes développées essentiellement dans le cadre de la théorie du filtrage non linéaire. Leur principal résultat est un théorème de séparation du contrôle et du filtrage dans une situation de gestion de stock partiellement observée. Ce résultat a été obtenu en étendant la méthode de M. Robin [23] et en utilisant des théorèmes de sélection [20].
Une approche différente est utilisée pour la résolution de ce type de problème: le problème d'optimisation est formulé comme un problème parabolique du contrôle impulsionnel avec trois variables liées à la fonction coût, la technologie choisie et la valeur de la firme (méthode utilisée par H. Pham, M. Mnif et V. Vath [22]). Cette résolution est associée au principe de programmation dynamique des inéquations quasi-variationnelles de Hamilton-Jacobi-Bellman.
Dans le même contexte, nous citons [1, 2, 21] qui ont caractérisé la fonction valeur comme l'unique solution de viscosité des inéquations quasi-variationnelles de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Dans notre situation, à chaque temps d'arrêt le système suit une nouvelle technologie et une nouvelle loi afin d'améliorer le profit de la firme. Dans ce cas, nous utilisons le caractère markovien et homogène entre deux instants d'impulsions ainsi que la forme markovienne de chaque renaissance pour determiner un critère d'optimalité. Notre travail est basé principalement sur les articles de J.P. Lepeltier et B. Marchal ([12, 14]). Au lieu de la construction canonique, nous choisissons une approche trajectorielle qui pourrait donner des formes plus concrètes. De plus, en détaillant les épreuves, on retrouve les résultats de J.P. Lepeltier et B. Marchal.

Notre travail est organisé en trois parties. La première est consacrée à définir le modèle correspondant au problème du contrôle impulsionnel posé ainsi que les filtrations associées (section 2). Dans la seconde, nous établissons un critère d'optimalité. Nous énonçons tout d'abord le principe de programmation dynamique à l'aide du gain maximal conditionnel après un temps d'arrêt θ. Ensuite, par des techniques markoviennes, nous établissons un lien entre le gain maximal conditionnel après θ et la fonction valeur de la firme ce qui nous permet de déduire un critère d'optimalité dépendant de cette fonction (section 3). Enfin, nous définissons une stratégie qui maximise la fonction valeur de la firme et qui réalise l'optimalité conditionnelle (section 4).

2 Modélisation

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ complète continue à droite et soit un mouvement brownien $W = (W_t)_{t\geq 0}$. Nous noterons par $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$ la filtration complète définie par $\mathcal{G}_t = \vee_{s<t}\mathcal{F}_s,\ \forall\ s < t$.

Le contrôle impulsionnel consiste en une succession de changements d'état à $(\tau_i)_{i\geq -1}$, où $\tau_{-1} = 0$, une suite croissante des $\mathcal{G}$-temps d'arrêt et convergente vers une limite notée τ et qui vérifie:

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \tau_0 \circ \phi_{\tau_n}, \tag{1}$$

où ϕ_t est l'opérateur de translation défini, pour tous $\omega \in \Omega$ et $s, t > 0$, par $(\phi_t\, \omega)(s) = \omega(t+s)$. Ainsi, pour tout processus X, nous aurons $X_t(\phi_s\, \omega) = X_{t+s}(\omega)$. Notons que sur l'espace $\Omega' = \{\omega \in \Omega : \exists\ n(\omega) \text{ tel que } \tau_{n(\omega)} = \tau\}$, la suite (τ_n) est constante à partir du rang $n(\omega)$ et elle sera strictement croissante sur l'événement $\cap_{n\geq -1}\{\tau_0 \circ \phi_{\tau_n} > 0\}$.

Nous introduisons, pour tout $\omega \in \Omega$, le processus càdlàg ξ à valeurs dans U l'ensemble fini des technologies possibles,

$$\xi_t(\omega) = \xi_0(\omega)\mathbf{1}_{[0,\tau_0[}(t) + \sum_{n\geq 0} \zeta_{n+1}\mathbf{1}_{[\tau_n,\tau_{n+1}[}(t) + \emptyset\mathbf{1}_{[\tau,+\infty[}(t), \tag{2}$$

où $\emptyset$ désigne l'absence de technologie. On suppose qu'au delà de τ la firme a disparu. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ζ_{n+1} la technologie choisie à l'instant τ_n, est une variable aléatoire $\mathcal{G}_{\tau_n}$-mesurable. Nous noterons $\overline{U}$ l'espace $U \cup \{\emptyset\}$ et $\mathcal{P}(\overline{U})$ la tribu triviale.

Proposition 2.1. *Le processus ξ est $\mathcal{G}$-adapté.*

Preuve
Les instants τ_n sont des $\mathcal{G}$-temps d'arrêt. Alors, $\{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{G}_t$, et puisque ζ_{n+1} est $\mathcal{G}_{\tau_n}$- mesurable, $\zeta_{n+1}\mathbf{1}_{[\tau_n,\infty[}(t)$ est $\mathcal{G}_t$- mesurable. De plus, par stabilité des tribus par passage au complémentaire nous avons $\{\tau_{n+1} > t\} \in \mathcal{G}_t$. D'où $\mathbf{1}_{\{\tau_{n+1}>t\}}(t)$ est $\mathcal{G}_t$- mesurable. De même, $\emptyset\mathbf{1}_{[\tau,+\infty[}(t)$ est $\mathcal{G}_t$- mesurable car $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{G}_t$.
Ainsi ξ_t est $\mathcal{G}_t$-mesurable comme somme de variables $\mathcal{G}_t$-mesurables. Par conséquent, le processus ξ est $\mathcal{G}$-adapté. ∎

La valeur de la firme entre deux instants d'impulsions du système est donnée par l'expression suivante : $S_t = \exp Y_t,\ t \geq 0$, où Y est le processus continu à droite défini par:

$$Y_t = Y_0\mathbf{1}_{[0,\tau_0[}(t) + \sum_{n\geq 0} \Delta_n\,\mathbf{1}_{[\tau_n,\tau_{n+1}[}(t) + \int_0^t (b(\xi_s)\,ds + \sigma(\xi_s)\,dW_s) + \Delta\,\mathbf{1}_{[\tau,+\infty[}(t), \quad (3)$$

avec Δ signifie que la firme a disparu, $b : \overline{U} \to \mathbb{R}$ et $\sigma : \overline{U} \to \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions bornées sur $\overline{U}$ et Δ_n la taille du saut du log de la valeur de la firme à l'instant τ_n est une variable aléatoire réelle $\mathcal{G}_{\tau_n}$-mesurable.
Nous noterons $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\Delta\}$. On notera aussi Y^x le processus Y donné par l'expression (3) sur l'évènement $\{Y_0(\omega) = x\}$.
Par définition de l'opérateur de translation, le processus Y peut être écrit après le temps τ_n sous la forme suivante:

$$Y_{t+\tau_n} = Y_t \circ \phi_{\tau_n}.$$

Proposition 2.2. *Le processus Y est $\mathcal{G}$-adapté.*

Preuve
Les instants τ_n sont des $\mathcal{G}$-temps d'arrêt. Alors, $\{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{G}_t$, et puisque la taille du saut Δ_n est $\mathcal{G}_{\tau_n}$- mesurable, $\Delta_n\mathbf{1}_{[\tau_n,\infty[}(t)$ est $\mathcal{G}_t$- mesurable. De plus, nous avons $\{\tau_{n+1} > t\} \in \mathcal{G}_t$. D'où $\mathbf{1}_{\{\tau_{n+1}>t\}}(t)$ est $\mathcal{G}_t$- mesurable. Par conséquent, la partie discrète de l'expression (3) est $\mathcal{G}_t$- mesurable.
De même, $g(t)\mathbf{1}_{[\tau,+\infty[}(t)$ est $\mathcal{G}_t$- mesurable car $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{G}_t$. Ensuite, la partie continue de l'expression (3) est aussi $\mathcal{G}_t$- mesurable car ξ l'est. Ainsi Y_t est $\mathcal{G}_t$-mesurable comme étant une somme de variables $\mathcal{G}_t$-mesurables. Par suite, le processus Y est $\mathcal{G}$-adapté. ∎

Remarque 2.3. *La filtration $\mathcal{G}$ étant une sous-filtration de $\mathcal{F}$, les processus ξ et Y sont aussi $\mathcal{F}$-adaptés.*

Proposition 2.4. *Désignons par* $\left(\bigcap_{s>t}\mathcal{G}_s, t \geq 0\right)$ *la filtration* $(\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ *rendue continue à droite. Elle vérifie l'égalité suivante:*

$$\bigcap_{s>t}\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_t.$$

Preuve

D'une part, $\mathcal{G}_t$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}_t$: $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. D'où $\bigcap_{s>t}\mathcal{G}_s \subset \bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$. La filtration $\mathcal{F}$ étant continue à droite,

$$\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t.$$

Ainsi, $\bigcap_{s>t}\mathcal{G}_s \subset \mathcal{F}_t$. D'autre part, $\bigcap_{s>t}\mathcal{G}_s = \bigcap_{s>t}\vee_{u<s}\mathcal{F}_u$.
Nous avons, $\forall s > t$, $\mathcal{G}_s = \vee_{u<s}\mathcal{F}_u$. Par conséquent,

$$\mathcal{F}_t \subset \vee_{u<s}\mathcal{F}_u = \mathcal{G}_s, \ \forall s > t.$$

Ce qui entraîne l'inclusion inverse et par suite l'égalité $\bigcap_{s>t}\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_t$. ■

En résumé, on obtient la définition :

Définition 2.5. *Un contrôle impulsionnel (ou stratégie admissible) est la donnée d'une suite* α*:*

$$\alpha = (\tau_n, \zeta_{n+1}, \Delta_n),$$

où (τ_n) *est une suite croissante de* $\mathcal{G}$*-temps d'arrêt qui converge vers une limite notée* τ *et vérifiant* $\tau_{n+1} = \tau_n + \tau_0 \circ \phi_{\tau_n}$*,* ζ_{n+1} *est la technologie choisie à l'instant* τ_n*, v.a.* $\mathcal{G}_{\tau_n}$*-mesurable et* $\Delta_n = Y_{\tau_n} - Y_{\tau_n^-}$ *est la taille du saut à l'instant* τ_n*, v.a.* $\mathcal{G}_{\tau_n}$*-mesurable, de telle sorte que la probabilité de transition* r_n^α *définie sur* $\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$ *par*

$$\mathbb{P}(\zeta_{n+1} = j, Y_{\tau_n} = x + dy \,\big|\, \zeta_n = i, Y_{\tau_n^-} = x) = r_n^\alpha(i, x; j, dy),$$

est indépendante de n. On note $\underline{D}$ *l'ensemble des stratégies admissibles.*

On introduit M un ensemble de probabilités de transition sur $\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$, $M = \cup_{(i,x)\in\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} M_{(i,x)}$ où $M_{(i,x)}$ vérifie:

$$\begin{cases} M_{(i,x)} = \left\{r^\alpha(i, x; ., .), \delta_{i,x};\ \alpha \in \underline{D}\right\} & \text{si } (i, x) \neq (\emptyset, \Delta) \\ M_{(\emptyset,\Delta)} = \delta_{(\emptyset,\Delta)} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

De fait on réduit l'ensemble des stratégies admissibles en supposant que la loi de passage r^α est indépendante de n. Ainsi, la famille des lois markoviennes est stationnaire.
Pour tout (i, x), l'ensemble $M_{(i,x)}$ est muni de la topologie faible suivante: la suite $(r_n)_n$ converge vers r si et seulement si pour toute fonction borélienne bornée g sur $\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$,

$$(r_n(g))_n \text{ converge uniformément vers } r(g) \text{ sur } \overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}. \tag{5}$$

Hypothèse 1: L'ensemble $M_{(i,x)}$ est faiblement fermé et faiblement compact pour la topologie définie ci-dessus.

Exemple 2.6. *Nous pouvons prendre comme exemple la mesure de probabilité dans l'ensemble $M_{(i,x)}$:*

$$r(i,x;j,dy) = p_{i,j}.\frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}}e^{\frac{-(y-x-m)^2}{2\sigma^2}}\ dy \quad \text{où} \sum_{j\in U} p_{i,j} = 1\ \forall\, i \in U.$$

Soit une fonction g borélienne bornée sur $\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}$ et une suite $(r_n)\in M_{(i,x)}$

$$r_n(i,x;g) = \sum_{i,j\in U\times U} p^n_{i,j}\int_{\overline{\mathbb{R}}} g(j,y)\frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}}e^{\frac{-(y-x-m_n)^2}{2\sigma^2}}\ dy,$$

où $m_n \in S$, S un compact de $\mathbb{R}$.
D'une part, il existe une sous-suite extraite (m_{n_k}) convergeant vers m dans $\mathbb{R}$. D'autre part, $p^n_{i,j}$ est à valeurs dans le compact $\{\sum_{j\in U} x_j = 1\}$ et donc il existe une sous suite extraite $p^{n_k}_{i,j}$ convergente vers $p_{i,j}$. Ainsi, $r_n(i,x;g)$ converge vers $r(i,x;g)$ dans l'ensemble $M_{(i,x)}$.

Définition 2.7. *A chaque stratégie α nous associons le gain*

$$k(\alpha) = \int_0^{\tau^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi^\alpha_s, Y^\alpha_s)\ ds - \sum_{n\geq 0} e^{-\beta\tau^\alpha_n} c(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}, \zeta^\alpha_{n+1}, Y_{\tau^\alpha_n}) \tag{6}$$

où β est un coefficient d'actualisation; $f:\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^+$ et $c:\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}\times\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^+$ sont deux fonctions boréliennes et bornées. Soit le gain moyen:

$$K(\alpha) = \mathbb{E}(k(\alpha)\big|\sigma(\xi_0, Y_0)). \tag{7}$$

La fonction f représente le bénéfice net de la firme et la fonction c représente le coût de changement de technologie vérifiant pour tout couple $(i,x)\in\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}$ $c(i,x,i,x)=0$, ce qui veut dire que s'il n'y a pas d'impulsion, il ne peut y avoir un coût .

Définition 2.8. *Etant donnés un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt θ et une stratégie admissible α, nous dirons qu'une stratégie admissible μ se comporte comme α jusqu'à θ exclu, que l'on note*

$$\{\mu_t = \alpha_t,\ \forall\, t < \theta\} \tag{8}$$

dès que les stratégies α et μ arrêtées en θ^- coïncident. C'est à dire que pour ω fixé, il existe $n(\omega)$ tel que $\tau^\alpha_n(\omega)\leq\theta(\omega)<\tau^\alpha_{n+1}(\omega)$ et nous avons, $\forall k\leq n(\omega)$:

$$\begin{cases} \tau^\mu_k = \tau^\alpha_k, \\ \zeta^\mu_k = \zeta^\alpha_k, \\ r^\mu = r^\alpha. \end{cases}$$

De même, nous dirons qu'une stratégie admissible μ se comporte comme α jusqu'à θ inclus, que l'on note:

$$\{\mu_t = \alpha_t,\ \forall\, t \leq \theta\}$$

dès que les stratégies α et μ arrêtées en θ coïncident. C'est à dire que pour ω fixé, il existe $n(\omega)$ tel que $\tau_n^\alpha(\omega) \leq \theta(\omega) < \tau_{n+1}^\alpha(\omega)$, et par suite, $\forall k \leq n(\omega)$:

$$\begin{cases} \tau_k^\mu = \tau_k^\alpha, \\ \zeta_{k+1}^\mu = \zeta_{k+1}^\alpha, \\ r^\mu = r^\alpha. \end{cases}$$

Le cas particulier $\theta = \tau_n^\alpha$ les stratégies α et μ arrêtées en τ_n^- se traduit par le fait que $\forall\, \omega$, $n(\omega) = n$, et $\forall k \leq n$:

$$\begin{cases} \tau_k^\mu = \tau_k^\alpha, \\ \zeta_k^\mu = \zeta_k^\alpha, \\ r^\mu = r^\alpha. \end{cases}$$

Le cas particulier $\theta = \tau_n^\alpha$ les stratégies α et μ arrêtées en τ_n se traduit par le fait que $\forall\, \omega$, $n(\omega) = n$, et $\forall k \leq n$:

$$\begin{cases} \tau_k^\mu = \tau_k^\alpha, \\ \zeta_{k+1}^\mu = \zeta_{k+1}^\alpha, \\ r^\mu = r^\alpha. \end{cases}$$

3 Critères d'optimalité

Le problème d'optimalité posé consiste à prouver l'existence d'une stratégie admissible $\widehat{\alpha}$ qui maximise la fonction gain $K(\alpha)$ définie par l'expression (7), c'est à dire trouver une stratégie $\widehat{\alpha}$ telle que

$$K(\widehat{\alpha}) = ess \sup_{\alpha \in \underline{D}} K(\alpha). \tag{9}$$

La stratégie $\widehat{\alpha}$ est dite optimale.

3.1 Gains conditionnels

Nous introduisons, tout d'abord, deux notions que nous utiliserons fréquemment (voir [10]):

Définition 3.1. *Soit une filtration $\mathcal{H}$ et $\underline{\tau}$ une sous famille de $\mathcal{H}$-temps d'arrêt. Une famille de variables aléatoires $\{X_\theta^\alpha, \theta \in \underline{\tau}, \alpha \in \underline{D}\}$ est appelée un $(\mathcal{H}, \underline{\tau}, \underline{D})$-système si, pour tout $\theta \in \underline{\tau}$ et tout $\alpha \in \underline{D}$, l'ensemble des stratégies admissibles, nous avons:*

i/ $\forall\, \gamma \in \underline{\tau}$, sur l'ensemble $\{\theta = \gamma\}$ nous avons $X_\theta^\alpha = X_\gamma^\alpha$ p.s.

ii/ Les v.a. X_θ^α sont $\mathcal{H}_\theta$-mesurables.

iii/ Si $\mu \in \underline{D}$, sur l'ensemble $\{\mu = \alpha\}$, nous avons $X_\theta^\alpha = X_\theta^\mu$ p.s.

Définition 3.2. *Un* $(\mathcal{H}, \underline{\tau}, \underline{D})$*sur-martingale-système (resp. martingale, sous-martingale) est un* $(\mathcal{H}, \underline{\tau}, \underline{D})$*-système tel que:*

i/ Pour tout $\theta \in \underline{\tau}$ *et tout* $\alpha \in \underline{D}$*,* X^α_θ *est* $\mathbb{P}$*-intégrable.*

ii/ Si γ *et* θ *sont deux éléments de* $\underline{\tau}$ *tels que* $\gamma \leq \theta$*, alors:*

$$\mathbb{E}\left(X^\alpha_\theta \middle| \mathcal{H}_\gamma\right) \leq X^\alpha_\gamma \qquad p.s. \ (resp. \quad =, \geq).$$

La méthode de résolution des problèmes de contrôle stochastique de type (9) repose sur le principe de Bellman (voir [10]).
Plus précisément, si on connaît une politique optimale $\widehat{\alpha}$ jusqu'à un temps d'observation T , et une autre optimale $\tilde{\alpha}$ de T à $T+h$, il reste optimal entre 0 et $T+h$ de garder $\widehat{\alpha}$ jusqu'à T et de la prolonger après par $\tilde{\alpha}$. C'est la raison pour laquelle nous introduisons les gains maximaux conditionnels suivants:

Définition 3.3. *Nous appelons gain maximal conditionnel la famille définie p.s., pour toute stratégie* $\alpha \in \underline{D}$ *par*

$$\{F^\alpha_\theta = ess \sup_{\mu_t = \alpha_t, t < \theta} E[k(\mu) \,|\mathcal{G}_\theta], \ \theta > 0, \theta \in \underline{\tau}\},$$

où $\underline{\tau}$ *est la famille de* $\mathcal{G}$*-temps d'arrêt. Respectivement, la famille:*

$$\{F^{\alpha^+}_\theta = ess \sup_{\mu_t = \alpha_t, t \leq \theta} E[k(\mu) \,|\mathcal{F}_\theta], \, \theta \in \underline{\tau}, \, \theta > 0 \; ou \, \theta = 0\}.$$

La variable aléatoire F^α_θ (resp. $F^{\alpha^+}_\theta$) représente le gain maximal conditionnel connaissant l'évolution du processus impulsé jusqu'à l'instant θ en excluant (resp. incluant) la renaissance éventuelle en cet instant.
Soit k_θ le gain après θ donné par l'expression

$$k_\theta(\alpha) = \int_{\theta \wedge \tau^\alpha}^{\tau^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi^\alpha_s, Y^\alpha_s)\, ds - \sum_{n \geq 0} 1_{(\tau^\alpha_n \geq \theta)}\, e^{-\beta \tau^\alpha_n} c(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}, \zeta^\alpha_{n+1}, Y_{\tau^\alpha_n}),$$

et

$$\begin{cases} k_{\theta^+}(\alpha) = \int_{\theta \wedge \tau^\alpha}^{\tau^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi^\alpha_s, Y^\alpha_s)\, ds - \displaystyle\sum_{n \geq 0} 1_{(\tau^\alpha_n > \theta)}\, e^{-\beta \tau^\alpha_n} c(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}, \zeta^\alpha_{n+1}, Y_{\tau^\alpha_n}) \\ k_{0^+}(\alpha) = k(\alpha). \end{cases}$$

D'où la remarque suivante:

Remarque 3.4. *De l'égalité* $k_{0^+}(\alpha) = k(\alpha)$*, il vient:*

$$F^{\alpha^+}_0 = \sup_{\mu \in \underline{D}} E[k(\mu)], \qquad pour \ toute \ stratégie \ \alpha \in \underline{D}.$$

De plus, l'expression $(k(\alpha)-k_\theta(\alpha))$ *(resp.* $(k(\alpha)-k_{\theta^+}(\alpha))$*) étant* $\mathcal{G}_\theta$ *(respectivement* $\mathcal{F}_\theta$*-mesurable),*

$$\{F_\theta^\alpha = (k(\alpha)-k_\theta(\alpha)) + ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, t<\theta\}} \mathbb{E}\left(k_\theta(\mu)|\, \mathcal{G}_\theta\right),\, \theta \in \underline{\mathcal{T}},\, \theta > 0\}$$

Respectivement,

$$\{F_\theta^{\alpha^+} = (k(\alpha)-k_{\theta^+}(\alpha)) + ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, t\leq\theta\}} \mathbb{E}\left(k_{\theta^+}(\mu)|\, \mathcal{F}_\theta\right),\theta \in \underline{\mathcal{T}},\, \theta > 0 \; ou\, \theta = 0\},$$

Proposition 3.5. *Pour toute stratégie* $\alpha \in \underline{D}$ *et tout* $\mathcal{G}$*-temps d'arrêt* θ*, le gain maximal conditionnel* F_θ^α *est un* $(\mathcal{G}, \underline{\mathcal{T}}, \underline{D})$*-système. Respectivement,* $F_\theta^{\alpha^+}$ *est un* $(\mathcal{F}, \underline{\mathcal{T}}, \underline{D})$*-système.*

Preuve
Il s'agit de montrer que la v.a. F_θ^α vérifie les propriétés de la définition 3.1.
• $\forall\, \gamma \in \underline{\mathcal{T}}$, nous avons:

$$F_\gamma^\alpha = (k(\alpha)-k_\gamma(\alpha)) + ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, t<\gamma\}} \mathbb{E}\left(k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\gamma\right).$$

Sur l'ensemble $\{\theta=\gamma\}$, nous avons $k_\theta(\mu) = k_\gamma(\mu)$. Ensuite, nous sommes ramenés à montrer l'égalité

$$\mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left(k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\theta\right) = \mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left(k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\gamma\right).$$

De prime abord, $\{\theta=\gamma\} \in \mathcal{G}_\gamma \cap \mathcal{G}_\theta$.
D'une part, l'expression

$$\mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left(k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\gamma\right)\, \mathbf{1}_{\{\gamma\leq t\}}$$

est $\mathcal{G}_t$-mesurable. Elle est égale à l'expression $\mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left(k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\gamma\right)\, \mathbf{1}_{\{\theta\leq t\}}$ qui est $\mathcal{G}_t$-mesurable et donc l'expression $\mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left(k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\gamma\right)\}$ est $\mathcal{G}_\theta$-mesurable.
D'autre part, l'expression $\mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left(k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\theta\right)$ est $\mathcal{G}_\theta$-mesurable.
Puis, soit X une v.a. $\mathcal{G}_\theta$-mesurable. Nous avons $X\, \mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}} \in \mathcal{G}_\gamma$. Par suite,

$$\mathbb{E}\left(X\, \mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left[k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\gamma\right]\right) = \mathbb{E}\left(X\, \mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, k_\gamma(\mu)\right).$$

De plus,

$$\mathbb{E}\left(X\, \mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, k_\gamma(\mu)\right) = \mathbb{E}\left(X\, \mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left[k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\theta\right]\right).$$

Il en suit,

$$\mathbb{E}\left(X\, \mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left[k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\gamma\right]\right) = \mathbb{E}\left(X\, \mathbf{1}_{\{\theta=\gamma\}}\, \mathbb{E}\left[k_\gamma(\mu)|\, \mathcal{G}_\theta\right]\right).$$

Ainsi,

$$F_\theta^\alpha = F_\gamma^\alpha \quad \text{p.s. sur l'ensemble } \{\theta=\gamma\},$$

• L'expression $(k(\alpha) - k_\theta(\alpha))$ est $\mathcal{G}_\theta$-mesurable. De plus, par définition de l'ess-sup d'une famille mesurable, l'expression $ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, t<\gamma\}} \mathbb{E}\left(k_\gamma(\mu)\middle|\, \mathcal{G}_\gamma\right)$ est aussi $\mathcal{G}_\theta$-mesurable. Ainsi, F_θ^α est $\mathcal{G}_\theta$-mesurable.
• Si $\mu \in \underline{D}$, nous avons:

$$F_\theta^\mu = (k(\mu) - k_\theta(\mu)) + ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, t<\theta\}} \mathbb{E}\left(k_\theta(\alpha)\middle|\, \mathcal{G}_\theta\right).$$

Sur l'ensemble $\{\mu = \alpha\}$,

$$F_\theta^\alpha = F_\theta^\mu \quad \text{p.s.}$$

D'où, F_θ^α est bien un $(\mathcal{G}, \underline{\tau}, \underline{D})$-système.

On procède d'une manière analogue pour montrer que $(F_\theta^{\alpha^+})$ est un $(\mathcal{F}, \underline{\tau}, \underline{D})$-système en constatant que $F_\theta^{\alpha^+}$ est $\mathcal{F}_\theta$-mesurable puisque c'est la somme de deux expressions $\mathcal{F}_\theta$-mesurables. ■

Définition 3.6. *Une stratégie $\widehat{\alpha}$ est dite $(\theta, \widehat{\alpha})$-conditionnellement optimale dès qu'elle est admissible et qu'elle vérifie p.s.*

$$F_\theta^{\widehat{\alpha}^+} = \mathbb{E}(k(\widehat{\alpha})|\, \mathcal{F}_\theta).$$

Le principe d'optimalité est basé sur la propriété de commutation de l'ess-sup et de l'espérance conditionnelle, qui est en particulier satisfaite si la famille considérée est un ensemble filtrant croissant (voir par exemple [10]).

Lemme 3.7. *Pour tout $\mathcal{G}$-temps d'arrêtθ et toute stratégie $\alpha \in \underline{D}$, l' ensemble*

$$\{\mathbb{E}(k(\mu)|\mathcal{G}_\theta)\backslash \forall t < \theta;\, \mu_t = \alpha_t\}$$

est un ensemble filtrant croissant. Egalement on a la même propriété pour les ensembles

$$\{\mathbb{E}(k_\theta(\mu)|\mathcal{G}_\theta)\backslash \forall t < \theta;\, \mu_t = \alpha_t\} \quad et \quad \{\mathbb{E}(k_{\theta^+}(\mu)|\mathcal{F}_\theta)\backslash \forall t \le \theta;\, \mu_t = \alpha_t\}.$$

Preuve
Considérons deux stratégies admissibles μ^1 et μ^2 vérifiant

$$\{\mu_t^1 = \alpha_t, t < \theta\} \quad et \quad \{\mu_t^2 = \alpha_t, t < \theta\}.$$

Introduisons, pour simplifier l'écriture, les variables aléatoires $\mathcal{G}_\theta$-mesurables suivantes:

$$F^1 = \mathbb{E}(k(\mu^1)|\, \mathcal{G}_\theta) \quad et \quad F^2 = \mathbb{E}(k(\mu^2)|\, \mathcal{G}_\theta).$$

On définit la stratégie admissible $\mu = (\tau_n, \zeta_{n+1}, \Delta_n)$ par

$$\mu = \begin{cases} \mu^2 & \text{sur } \{F^1 \le F^2\} \\ \mu^1 & \text{sur } \{F^1 > F^2\} \end{cases}$$

Elle vérifie $\{\mu_t = \alpha_t, t < \theta\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(k(\mu)\middle|\, \mathcal{G}_\theta\right) &= \mathbb{E}\left[1_{\{F^1 \leq F^2\}} k(\mu)\middle|\, \mathcal{G}_\theta\right] + \mathbb{E}\left[1_{\{F^1 > F^2\}} k(\mu)\middle|\, \mathcal{G}_\theta\right] \\
&= \mathbb{E}\left(k(\mu^2)\middle|\, \mathcal{G}_\theta\right)\ 1_{\{F^1 \leq F^2\}} + \mathbb{E}\left(k(\mu^1)\middle|\, \mathcal{G}_\theta\right)\ 1_{\{F^1 > F^2\}} \\
&= F^1 \vee F^2.
\end{aligned}$$

Pour l'ensemble $\{\mathbb{E}(k_\theta(\mu)|\mathcal{G}_\theta)\backslash\forall t < \theta;\ \mu_t = \alpha_t\}$, au lieu des v.a. F^1 et F^2, il suffit de prendre les variables aléatoires $\mathcal{G}_\theta$-mesurables suivantes:

$$F_1^1 = \mathbb{E}(k_\theta(\mu^1)|\, \mathcal{G}_\theta) \quad et \quad F_2^2 = \mathbb{E}(k_\theta(\mu^2)|\, \mathcal{G}_\theta),$$

et la démarche sera la même que précédemment. Tandis que pour l'ensemble $\{\mathbb{E}(k_{\theta^+}(\mu)|\mathcal{F}_\theta)\backslash\forall t \leq \theta;\ \mu_t = \alpha_t\}$, nous procèdons d'une manière analogue en considérant les stratégies μ^3 et μ^4 vérifiant

$$\{\mu_t^3 = \alpha_t, t \leq \theta\} \quad et \quad \{\mu_t^4 = \alpha_t, t \leq \theta\},$$

et les v.a. $\mathcal{F}_\theta$-mesurables suivantes:

$$F^3 = \mathbb{E}(k_{\theta^+}(\mu^3)|\, \mathcal{F}_\theta) \quad et \quad F^4 = \mathbb{E}(k_{\theta^+}(\mu^4)|\, \mathcal{F}_\theta).$$

■

Nous pouvons, donc, établir:

Proposition 3.8. *Le gain maximal conditionnel (F_θ^α) (resp. $(F_\theta^{\alpha^+})$) forme un $(\mathcal{G}, \underline{\mathcal{T}}, \underline{D})$ (resp. $(\mathcal{F}, \underline{\mathcal{T}}, \underline{D})$)-sur-martingale-système positif.*

Preuve
Soient θ et γ deux $\mathcal{G}$-temps d'arrêt avec $\gamma \leq \theta$. Alors, p.s.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F_\theta^\alpha|\, \mathcal{G}_\gamma) &= \mathbb{E}\left[ess \sup_{\mu_t = \alpha_t, t < \theta} E\left(k(\mu)\left|\mathcal{G}_\theta\right)\right|\mathcal{G}_\gamma\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[ess \sup_{\mu_t = \alpha_t, t < \gamma} E\left(k(\mu)\left|\mathcal{G}_\theta\right)\right|\mathcal{G}_\gamma\right],
\end{aligned}$$

le sup étant pris sur un ensemble plus vaste dans la deuxième inégalité. Nous pouvons commuter l' ess-sup et la $\mathcal{G}_\gamma$-espérance conditionnelle, grâce au lemme 3.7, et obtenir p.s.

$$\mathbb{E}(F_\theta^\alpha|\, \mathcal{G}_\gamma) \leq F_\gamma^\alpha.$$

On applique le même raisonnement pour le gain maximal conditionnel $F_\theta^{\alpha^+}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F_\theta^{\alpha^+}|\, \mathcal{F}_\gamma) &= \mathbb{E}\left[ess \sup_{\mu_t = \alpha_t, t \leq \theta} E\left(k(\mu)\left|\mathcal{F}_\theta\right)\right|\mathcal{F}_\gamma\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[ess \sup_{\mu_t = \alpha_t, t \leq \gamma} E\left(k(\mu)\left|\mathcal{F}_\theta\right)\right|\mathcal{F}_\gamma\right],
\end{aligned}$$

le sup étant pris sur un ensemble plus vaste dans la deuxième inégalité. Nous pouvons commuter l' ess-sup et la $\mathcal{F}_\gamma$-espérance conditionnelle, grâce au lemme 3.7, et obtenir p.s.

$$\mathbb{E}(F_\theta^{\alpha^+} | \mathcal{F}_\gamma) \leq F_\gamma^{\alpha^+}.$$

Il reste à prouver que la variable aléatoire $F_\theta^{\alpha^+}$ est positive pour tout $\mathcal{G}$-temps d'arrêt θ. Il suffit de trouver une stratégie α appartenant à $\underline{D}$ dont le gain est positif. Soit une stratégie $\alpha \in \underline{D}$ avec $\xi_t = i,\ \forall t$ et r^α la mesure de Dirac. Le gain associé à α est donné par

$$k(\alpha) = \int_0^\tau e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds - c(i, Y_{0^-}, i, Y_0). \tag{10}$$

Or au démarrage, le coût est nul et donc l'expression précédente est positive. Ce qui entraîne que son espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_\theta$ est aussi positive. En passant à l'essentiel supremum, on déduit que $F_\theta^{\alpha^+}$ est une v.a. positive. ∎

Une conséquence immédiate de cette proposition est le premier critère d'optimalité suivant:

Corollaire 3.9. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la stratégie $\widehat{\alpha}$ soit optimale est que le gain maximal conditionnel $F_\cdot^{\widehat{\alpha}^+}$ soit un $(\mathcal{F}, \underline{\tau}, \underline{D})$-martingale-système, c'est à dire $\forall\, \theta, \gamma$ deux $\mathcal{G}$-temps d'arrêt, $\gamma \leq \theta$, nous avons*

$$\mathbb{E}(F_\theta^{\alpha^+} | \mathcal{F}_\gamma) = F_\gamma^{\alpha^+}.$$

Preuve La stratégie admissible $\widehat{\alpha}$ est optimale, alors elle vérifie:

$$\mathbb{E}(k(\widehat{\alpha})) = \sup_{\alpha \in \underline{D}} \mathbb{E}(k(\alpha)) \geq \sup_{\{\alpha : \alpha_t = \widehat{\alpha}_t,\, t \leq \theta\}} \mathbb{E}(k(\alpha)) \geq \mathbb{E}(k(\widehat{\alpha})).$$

D'où l'égalité. De plus, la commutation de l'ess-sup et l'espérance conditionnelle et l'égalité précédente entraînent

$$\mathbb{E}(F_\theta^{\widehat{\alpha}^+}) = \mathbb{E}\left(ess \sup_{\{\alpha_t = \widehat{\alpha}_t,\, t \leq \theta\}} \mathbb{E}(k(\alpha) | \mathcal{F}_\theta) \right) = \sup_{\alpha \in \underline{D}} \mathbb{E}(k(\alpha)) = \mathbb{E}(k(\widehat{\alpha})) = F_0^{\widehat{\alpha}^+}. \tag{11}$$

La dernière égalité provient de la définition 3.6 appliquée au temps 0.

Inversement, supposons que $F_\theta^{\widehat{\alpha}^+}$ est un $\mathcal{F}$-martingale-système, c'est à dire

$$p.s.\ \ F_\gamma^{\widehat{\alpha}^+} = \mathbb{E}(F_\theta^{\widehat{\alpha}^+} | \mathcal{F}_\gamma) \quad \text{pour tout } \gamma \leq \theta.$$

Citons le théorème 1.17 d'El Karoui [10] : "*Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle $\widehat{\alpha}$ soit optimal est que, pour tout temps d'observation γ, il soit $(\widehat{\alpha}, \gamma)$-conditionnellement optimal, ou ce qui est équivalent, que le coût minimal conditionnel par rapport à $\widehat{\alpha}$, soit un $(\mathcal{F}, \underline{\tau}, \underline{D})$-martingale-système, c'est à dire que: si γ et θ sont deux temps d'observation avec $\gamma \leq \theta$:*

$$\mathbb{E}[F_\theta^{\widehat{\alpha}^+} | \mathcal{F}_\gamma] = F_\gamma^{\widehat{\alpha}^+} \quad p.s."$$

On peut donc dire que la stratégie $\widehat{\alpha}$ est conditionnellement optimale donc optimale. ■

Ce critère permet de réduire considérablement la classe des stratégies susceptibles d'être optimales.

Nous introduisons une nouvelle notion de gains maximaux :

Définition 3.10. *Pour toute stratégie admissible α et pour tout $\mathcal{G}$-temps d'arrêt θ, nous appellons gain maximal conditionnel après $\theta > 0$ (respectivement à droite après θ ou $\theta = 0$), la famille définie p.s. par:*

$$W_\theta^\alpha = ess \sup_{\{\mu_t = \alpha_t,\, \forall\, t < \theta\}} \mathbb{E}\left[k_\theta(\mu)\,|\mathcal{G}_\theta\right].$$

Respectivement, pour tout $\theta \geq 0$, nous avons:

$$W_\theta^{\alpha^+} = ess \sup_{\{\mu_t = \alpha_t,\, \forall\, t \leq \theta\}} \mathbb{E}\left[k_{\theta^+}(\mu)\,|\mathcal{F}_\theta\right].$$

Proposition 3.11. *Pour toute stratégie $\alpha \in \underline{D}$ et tout $\mathcal{G}$-temps d'arrêt θ, le gain maximal conditionnel F_θ^α peut être écrit, p.s., sous la forme suivante:*

$$F_\theta^\alpha = (k(\alpha) - k_\theta(\alpha)) + W_\theta^\alpha,\ \ \theta > 0. \tag{12}$$

De même, le gain maximal conditionnel $F_\theta^{\alpha^+}$ est donné par l'expression

$$F_\theta^{\alpha^+} = (k(\alpha) - k_{\theta^+}(\alpha)) + W_\theta^{\alpha^+}. \tag{13}$$

Preuve
De la définition du gain maximal conditionnel, nous avons lorsque $\theta > 0$:

$$F_\theta^\alpha = (k(\alpha) - k_\theta(\alpha)) + ess \sup_{\{\mu_t = \alpha_t,\, \forall\, t < \theta\}} \mathbb{E}\left(k_\theta(\mu)|\, \mathcal{G}_\theta\right)$$

où l'on reconnait W_θ^α dans le deuxième terme, soit (12).
De même

$$\begin{aligned} F_\theta^{\alpha^+} &= ess \sup_{\{\mu_t = \alpha_t,\, \forall\, t \leq \theta\}} \mathbb{E}\left[k(\mu)\,|\mathcal{F}_\theta\right] \\ &= (k(\alpha) - k_{\theta^+}(\alpha)) + ess \sup_{\{\mu_t = \alpha_t,\, t \leq \theta\}} \mathbb{E}\left(k_{\theta^+}(\mu)|\, \mathcal{F}_\theta\right). \end{aligned}$$

où l'on reconnait $W_\theta^{\alpha^+}$ dans le deuxième terme. D'où l'égalité (13) est vérifiée. ■

Remarque 3.12. *On déduit immédiatement des égalités (12) et (13) et du fait que les gains maximaux conditionnels F_θ^α et $F_\theta^{\alpha+}$ sont des $(\mathcal{G}, \underline{\tau}, \underline{D})$ (respectivement $(\mathcal{F}, \underline{\tau}, \underline{D})$)-systèmes que (W_θ^α) définit un $(\mathcal{G}, \underline{\tau}, \underline{D})$-système et que $(W_\theta^{\alpha^+})$ définit un $(\mathcal{F}, \underline{\tau}, \underline{D})$-système.*

Proposition 3.13. *Le gain maximal conditionnel* $W^{\alpha^+}_{\tau_n}$ *converge vers* 0 *p.s. lorsque* n *tend vers l'infini.*

Preuve
De la proposition 3.8, la famille $(F^{\alpha^+}_\theta,\ \theta \in \underline{\tau})$ est un $(\mathcal{F}, \underline{\tau}, \underline{D})$-sur-martingale-système positif, donc $(F^{\alpha^+}_{\tau_n},\ n \geq 0)$ est une sur-martingale discrète positive pour la filtration $\mathcal{F}_{\tau_n}$.
Grâce à la convergence des sur-martingales positives, il existe une limite p.s. positive de $F^{\alpha^+}_{\tau_n}$, lorsque n tend vers l'infini, notée $F^{\alpha^+}_\infty$ et qui vérifie:

$$F^{\alpha^+}_{\tau_n} \geq \mathbb{E}\left[F^{\alpha^+}_\infty | \mathcal{F}_{\tau_n}\right] \quad \text{p.s.} \tag{14}$$

Cette limite est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable. En effet, nous avons, $\forall\, B$ ouvert:

$$\{\omega \in \Omega :\ F^{\alpha^+}_\infty \in B\} = \bigcup_N \bigcap_{n \geq N} \{F^{\alpha^+}_{\tau_n} \in B\} \in \vee_n \mathcal{F}_{\tau_n} \subset \mathcal{F}_\tau.$$

D'une part, la commutation de l'essentiel sup et l'espérance conditionnelle par rapport à la filtration $\mathcal{F}_{\tau_n}$ permet d'établir l'expression suivante:

$$\mathbb{E}(F^{\alpha^+}_{\tau_n}) = \sup_{\mu_t = \alpha_t,\, t \leq \tau_n} \mathbb{E}\left[\,\mathbb{E}\left(k(\mu)|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right)\right] = \sup_{\mu_t = \alpha_t,\, t \leq \tau_n} \mathbb{E}\left(k(\mu)\right).$$

La suite $(F^{\alpha^+}_{\tau_n})$ étant une sur-martingale discrète positive convergeant p.s. et dans L^1 vers $F^{\alpha^+}_\infty$, la suite $\mathbb{E}(F^{\alpha^+}_{\tau_n})$ décroît vers $E[F^{\alpha^+}_\infty]$ et $\sup_{\mu_t = \alpha_t,\, t \leq \tau_n} \mathbb{E}\left(k(\mu)\right)$ décroit vers $\mathbb{E}\left(k(\alpha)\right)$.
Par suite, nous avons $\mathbb{E}[F^{\alpha^+}_\infty] = \mathbb{E}\left(k(\alpha)\right)$. De plus, du fait que $F^{\alpha^+}_{\tau_n} - \mathbb{E}[k(\alpha)|\, \mathcal{F}_{\tau_n}] \geq 0$, on déduit que $F^{\alpha^+}_\infty - k(\alpha) \geq 0$. Nous pouvons donc augurer que $F^{\alpha^+}_\infty = k(\alpha)$.
D'autre part, $k_{\tau_n^+}(\alpha)$ converge vers 0 p.s. lorsque n tend vers l'infini. De l'expression (13), il en suit:

$$\lim_{n \to +\infty} W^{\alpha^+}_{\tau_n} = \lim_{n \to +\infty} (F^{\alpha^+}_{\tau_n} + k_{\tau_n^+}(\alpha) - k(\alpha)) = F^{\alpha^+}_\infty - k(\alpha).$$

Ce qui entraîne que $W^{\alpha^+}_{\tau_n}$ converge vers 0 p.s. ∎

Le principe de la programmation dynamique est un principe fondamental pour la théorie du contrôle stochastique. Il a été initié dans les années cinquante par Bellman et il s'énonce ainsi:

Proposition 3.14. *Pour toute stratégie* $\alpha \in \underline{D}$ *et tout couple* (γ, θ) *de* $\mathcal{G}$*-temps d'arrêt,* $0 < \gamma \leq \theta$*, nous avons p.s.*

$$\begin{aligned} W^\alpha_\gamma \quad &\geq \quad \mathbb{E}\left[\int_{\gamma \wedge \tau^\alpha}^{\theta \wedge \tau^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi^\alpha_s, Y^\alpha_s)\, ds - \sum_{n \geq 0} 1_{(\gamma \leq \tau^\alpha_n < \theta)}\, e^{-\beta \tau^\alpha_n} c(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}, \zeta^\alpha_{n+1}, Y_{\tau^\alpha_n}) \,|\, \mathcal{G}_\gamma\right] \\ &+ \quad \mathbb{E}\left(W^\alpha_\theta |\, \mathcal{G}_\gamma\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Respectivement pour tout couple (γ,θ), $0 \le \gamma \le \theta$, nous avons p.s.

$$\begin{aligned} W_\gamma^{\alpha^+} &\geq \mathbb{E}\left[\int_{\gamma\wedge\tau^\alpha}^{\theta\wedge\tau^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi_s^\alpha, Y_s^\alpha)\,ds - \sum_{n\geq 0} 1_{(\gamma<\tau_n^\alpha\leq\theta)}\, e^{-\beta\tau_n^\alpha} c(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}, \zeta_{n+1}^\alpha, Y_{\tau_n^\alpha}) \,|\, \mathcal{F}_\gamma\right] \\ &+ \mathbb{E}(W_\theta^{\alpha^+} \,|\, \mathcal{F}_\gamma). \end{aligned} \tag{16}$$

De plus, $\widehat{\alpha}$ est optimale si et seulement si l'égalité (16) a lieu p.s. pour tout couple (θ,γ).

Preuve
D'après la proposition 3.8, la v.a F_θ^α est un $(\mathcal{G},\underline{\tau},\underline{D})$ sur-martingale-système, c'est à dire que pour $\gamma \le \theta$

$$p.s.\;\; F_\gamma^\alpha \geq \mathbb{E}(F_\theta^\alpha \,|\mathcal{G}_\gamma). \tag{17}$$

De plus, en écrivant le gain maximal conditionnel $F_.^\alpha$ sous la forme (12) dans l'inégalité (17), nous obtenons

$$k(\alpha) - k_\gamma(\alpha) + W_\gamma^\alpha \geq \mathbb{E}(k(\alpha) - k_\theta(\alpha) + W_\theta^\alpha \,|\mathcal{G}_\gamma).$$

D'où

$$W_\gamma^\alpha \geq \mathbb{E}(k_\gamma(\alpha) - k_\theta(\alpha) + W_\theta^\alpha \,|\mathcal{G}_\gamma).$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité (15).

Nous appliquons le même raisonnement pour démontrer l'inégalité (16). En effet, D'après la proposition 3.8, la v.a $F_\theta^{\alpha^+}$ est un $(\mathcal{F},\underline{\tau},\underline{D})$ sur-martingale-système, c'est à dire que pour $\gamma \le \theta$

$$p.s.\;\; F_\gamma^{\alpha^+} \geq \mathbb{E}(F_\theta^{\alpha^+} \,|\mathcal{F}_\gamma). \tag{18}$$

De plus, en écrivant le gain maximal conditionnel $F_.^{\alpha^+}$ sous la forme (13) dans l'inégalité (18), nous obtenons

$$k(\alpha) - k_{\gamma^+}(\alpha) + W_\gamma^{\alpha^+} \geq \mathbb{E}(k(\alpha) - k_{\theta^+}(\alpha) + W_\theta^{\alpha^+} \,|\mathcal{F}_\gamma).$$

D'où

$$W_{\gamma^+}^\alpha \geq \mathbb{E}(k_{\gamma^+}(\alpha) - k_{\theta^+}(\alpha) + W_\theta^{\alpha^+} \,|\mathcal{F}_\gamma).$$

Supposons que la stratégie $\widehat{\alpha}$ est optimale. Par suite, d'après le corollaire 3.9, $F_.^{\widehat{\alpha}^+}$ est un $(\mathcal{F},\underline{\tau},\underline{D})$-martingale-système et on a l'égalité

$$F_\gamma^{\widehat{\alpha}^+} = \mathbb{E}(F_\theta^{\widehat{\alpha}^+} \,|\, \mathcal{F}_\gamma).$$

Réécrivons cette égalité en remplaçant $F_\theta^{\widehat{\alpha}^+}$ par l'expression (13):

$$k(\widehat{\alpha}) - k_{\gamma^+}(\widehat{\alpha}) + W_\gamma^{\widehat{\alpha}^+} = \mathbb{E}(k(\widehat{\alpha}) - k_{\theta^+}(\widehat{\alpha}) + W_\theta^{\widehat{\alpha}^+} \,|\mathcal{F}_\gamma).$$

Ainsi $k(\widehat{\alpha}) - k_{\gamma^+}(\widehat{\alpha})$ étant $\mathcal{F}_\gamma$- mesurable, il passe sous l'espérance conditionnelle et

$$W_\gamma^{\widehat{\alpha}^+} = \mathbb{E}\left(k_{\gamma^+}(\widehat{\alpha}) - k_{\theta^+}(\widehat{\alpha}) + W_\theta^{\widehat{\alpha}^+} \mid \mathcal{F}_\gamma\right),$$

l'égalité (16) est vérifiée.

Réciproquement, si α vérifie l'égalité (16) pour tout γ et θ, en prenant $\theta = +\infty$, on obtient

$$W_\gamma^{\alpha^+} = \mathbb{E}(k_{\gamma^+}(\alpha) | \mathcal{F}_\gamma).$$

On déduit de l'expression (13):

$$F_\gamma^{\alpha^+} = \mathbb{E}(k(\alpha) | \mathcal{F}_\gamma).$$

Il s'agit donc d'un $(\mathcal{F}, \underline{\tau}, \underline{D})$-martingale système et le corollaire 3.9 permet de conclure. ■

Le second critère d'optimalité permet d'examiner ce qui se passe entre deux instants de changement de technologie et d'état.

Théorème 3.15. *Pour toute stratégie admissible α et tout couple $(i,x) \in \overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$, nous avons p.s. les inégalités suivantes:*

$$\begin{aligned} W_0^{\alpha^+} &\geq \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_0} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds - e^{-\beta\tau_0} c(\xi_0, Y_{\tau_0^-}, \zeta_1, Y_{\tau_0}) | \mathcal{F}_0\right) \\ &+ \mathbb{E}(W_{\tau_0}^{\alpha^+} | \mathcal{F}_0). \end{aligned} \tag{19}$$

Pour tout $n \geq 0$,

$$W_{\tau_n}^{\alpha} \geq -e^{-\beta\tau_n} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, i, x) r^\alpha(., i, dx) + \mathbb{E}(W_{\tau_n}^{\alpha^+} | \mathcal{G}_{\tau_n}). \tag{20}$$

Pour tout $n \geq -1$,

$$W_{\tau_n}^{\alpha^+} \geq \mathbb{E}\left(\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds | \mathcal{F}_{\tau_n}\right) + \mathbb{E}(W_{\tau_{n+1}}^{\alpha} | \mathcal{F}_{\tau_n}). \tag{21}$$

Où le triplet (τ, ξ, Y) est relatif à la stratégie α et $\mathcal{F}_0 = \sigma(\xi_0, Y_0)$. De plus, la stratégie $\widehat{\alpha}$ est optimale si et seulement si l'égalité a lieu simultanément dans (19), (20) et (21).

Preuve

1. (19) est une conséquence directe de (21) prise en $n = -1$ et (20) prise en $n = 0$ que ce soit inégalité ou égalité.

2. Puisque l'ess-sup est pris sur un ensemble plus restreint, nous pouvons écrire p.s.

$$W_{\tau_n}^{\alpha} \geq ess \sup_{\{\mu_t = \alpha_t,\, t \leq \tau_n^\alpha\}} \mathbb{E}\left(\int_{\tau_n^\mu}^{\tau^\mu} e^{-\beta s} f(\xi_s^\mu, Y_s^\mu)\, ds - \sum_{k\geq n} e^{-\beta\tau_k^\mu} c(\zeta_k^\mu, Y_{(\tau_k^\mu)^-}, \zeta_{k+1}^\mu, Y_{\tau_k^\mu}) | \mathcal{G}_{\tau_n^\mu}\right).$$

Puisque $\mu_t = \alpha_t, \forall t \le \tau_n^\alpha$, nous avons $\tau_n^\mu = \tau_n^\alpha$, $r^\mu = r^\alpha$ et $\mathcal{G}_{\tau_n^\mu} = \mathcal{G}_{\tau_n^\alpha}$. Et donc, nous pouvons écrire l'égalité

$$\mathbb{E}(e^{-\beta\tau_n^\mu} c(\zeta_n^\mu, Y_{(\tau_n^\mu)^-}, \zeta_{n+1}^\mu, Y_{\tau_n}^\mu) |\, \mathcal{G}_{\tau_n^\mu}) = \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} e^{-\beta\tau_n^\alpha} c(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}, i, x) r^\alpha(., i, dx).$$

Cette expression est $\mathcal{G}_{\tau_n}$-mesurable et ne dépend pas de la stratégie μ. Elle peut donc être sortie de l'ess-sup pour obtenir p.s.

$$W_{\tau_n}^\alpha \ge -e^{-\beta\tau_n} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} c(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}, i, x) r^\alpha(., i, dx) + ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, t\le\tau_n\}} \mathbb{E}\left(k_{\tau_n^+}(\mu) |\, \mathcal{G}_{\tau_n^\mu}\right).$$

Du fait que $r^\mu = r^\alpha$ et $\mathcal{F}_{\tau_n^\mu} = \mathcal{F}_{\tau_n^\alpha}$, nous avons:

$$W_{\tau_n}^\alpha \;\;\ge\;\; -e^{-\beta\tau_n} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} c(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}, i, x) r^\alpha(., i, dx) + \mathbb{E}\left(ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, t\le\tau_n\}} \mathbb{E}(k_{\tau_n^+}(\mu) |\, \mathcal{F}_{\tau_n^\mu}) |\, \mathcal{G}_{\tau_n^\alpha} \right).$$

D'où l'inégalité (20).

3. Par définition du gain maximal conditionnel après θ,

$$W_{\tau_n}^{\alpha^+} = ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, t\le\tau_n\}} \mathbb{E}\left(\int_{\tau_n}^{\tau^\mu} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s^\mu)\, ds - \sum_{k>n} e^{-\beta\tau_k^\mu} c(\zeta_k, Y^\mu_{\tau_k^-}, \zeta_{k+1}, Y^\mu_{\tau_k^\mu}) |\, \mathcal{F}_{\tau_n} \right).$$

Soit dans la famille des μ qui vérifient $\{\mu_t = \alpha_t, \forall t \le \tau_n^\alpha\}$ celles qui coincident avec α jusqu'à $(\tau_{n+1}^\alpha)^-$, donc $\tau_{n+1}^\alpha = \tau_{n+1}^\mu$ et $\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}^\mu} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s^\mu)\, ds$ ne dépend pas de μ. Ainsi,

$$W_{\tau_n}^{\alpha^+} \ge \mathbb{E}\left(\int_{\tau_n^\alpha}^{\tau_{n+1}^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds |\, \mathcal{F}_{\tau_n} \right) + \mathbb{E}\left(k_{\tau_{n+1}}(\mu) |\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right)$$

Comme $\mathcal{F}_{\tau_n^\mu} \subset \mathcal{G}_{\tau_{n+1}^\mu}$ la minoration peut se récrire :

$$W_{\tau_n}^{\alpha^+} \ge \mathbb{E}\left(\int_{\tau_n^\alpha}^{\tau_{n+1}^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds |\, \mathcal{F}_{\tau_n} \right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(k_{\tau_{n+1}}(\mu) |\, \mathcal{G}_{\tau_{n+1}}\right) |\, \mathcal{F}_{\tau_n} \right).$$

Puisque μ coincide avec α jusqu'à $(\tau_{n+1}^\alpha)^-$, par essentiel sup il vient:

$$W_{\tau_n}^{\alpha^+} \ge \mathbb{E}\left(\int_{\tau_n^\alpha}^{\tau_{n+1}^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds + ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, t<\tau_{n+1}\}} \mathbb{E}\left(k_{\tau_{n+1}}(\mu) |\, \mathcal{G}_{\tau_{n+1}}\right) |\, \mathcal{F}_{\tau_n} \right).$$

Enfin, l'essentiel sup commute avec la $\mathcal{F}_{\tau_n}$-espérance conditionnelle ce qui implique l'inégalité (21).

4. Supposons que la stratégie $\widehat{\alpha}$ est optimale. D'une part, les inégalités (20) et (21) impliquent

$$
\begin{aligned}
W^{\widehat{\alpha}}_{\tau_n} &\geq -e^{-\beta\tau_n} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, i, x) r^{\widehat{\alpha}}(., i, dx) + \mathbb{E}(W^{\widehat{\alpha}^+}_{\tau_n} |\, \mathcal{G}_{\tau_n}) \\
&\geq -e^{-\beta\tau_n} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, i, x) r^{\widehat{\alpha}}(., i, dx) \\
&+ \mathbb{E}\left(\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds + W^{\widehat{\alpha}}_{\tau_{n+1}} |\, \mathcal{G}_{\tau_n} \right),
\end{aligned}
$$

où (τ, ξ, Y) est relatif à la stratégie $\widehat{\alpha}$.
D'autre part, l'égalité (15) appliquée aux temps d'arrêt τ_n et τ_{n+1} entraîne l'égalité

$$
W^{\widehat{\alpha}}_{\tau_n} = \mathbb{E}\left[\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds - e^{-\beta\tau_n} c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) |\, \mathcal{G}_{\tau_n} \right] + \mathbb{E}\left[W^{\widehat{\alpha}}_{\tau_{n+1}} |\, \mathcal{G}_{\tau_n} \right].
$$

D'où (20) est une égalité.

5. Ci dessous, le triplet (τ, ξ, Y) est relatif à la stratégie $\widehat{\alpha}$. En remplaçant dans l'inégalité (21) le gain maximal conditionnel $W^{\widehat{\alpha}}_{\tau_{n+1}}$ par l'égalité (20) appliquée au temps τ_{n+1}, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
W^{\widehat{\alpha}^+}_{\tau_n} &\geq \mathbb{E}\left[\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds + W^{\widehat{\alpha}}_{\tau_{n+1}} |\, \mathcal{F}_{\tau_n} \right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds + W^{\widehat{\alpha}^+}_{\tau_{n+1}} - e^{-\beta\tau_{n+1}} c(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_{n+1}^-}, \zeta_{n+2}, Y_{\tau_{n+1}}) |\, \mathcal{F}_{\tau_n} \right].
\end{aligned}
$$

De plus, l'égalité (16) appliquée aux temps d'arrêt τ_n et τ_{n+1} entraîne l'égalité

$$
\begin{aligned}
W^{\widehat{\alpha}^+}_{\tau_n} &= \mathbb{E}\left[\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds - e^{-\beta\tau_{n+1}} c(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_{n+1}^-}, \zeta_{n+2}, Y_{\tau_{n+1}}) |\, \mathcal{F}_{\tau_n} \right] \\
&+ \mathbb{E}\left[W^{\widehat{\alpha}^+}_{\tau_{n+1}} |\, \mathcal{F}_{\tau_n} \right].
\end{aligned}
$$

Ce qui entraîne que (21) est une égalité.

6. Supposons qu'il existe une stratégie admissible α pour laquelle il y ait égalité dans (19), (20) et (21) pour tout $n \geq 0$ (respectivement pour tout $n \geq -1$). Nous avons, d'après l'égalité (19) p.s.

$$
W^{\alpha^+}_0 = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi^\alpha_s, Y^\alpha_s)\, ds - e^{-\beta\tau_0} c(\xi_0, Y_{\tau_0^-}, \zeta_1, Y_{\tau_0}) \Big|\, \mathcal{F}_0 \right] + \mathbb{E}\left[W^{\alpha^+}_{\tau_0} \Big|\, \mathcal{F}_0 \right].
$$

Nous posons l'hypothèse de récurrence jusqu'au rang n suivante:

$$W_0^{\alpha^+} = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi_s^\alpha, Y_s^\alpha)\, ds - \sum_{k=0}^{n} e^{-\beta \tau_k^\alpha} c(\zeta_k^\alpha, Y_{(\tau_k^\alpha)^-}, \zeta_{k+1}^\alpha, Y_{\tau_k^\alpha}) + W_{\tau_n}^{\alpha^+} \Big|\, \mathcal{F}_0\right]. \tag{22}$$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Les égalités (21) et (20) (prises en $(n+1)$) impliquent :

$$W_{\tau_n}^{\alpha^+} = \mathbb{E}\left[\int_{\tau_n^\alpha}^{\tau_{n+1}^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds - e^{-\beta \tau_{n+1}^\alpha} c(\zeta_{n+1}^\alpha, Y_{(\tau_{n+1}^\alpha)^-}, \zeta_{n+2}^\alpha, Y_{\tau_{n+1}^\alpha}) + W_{\tau_{n+1}}^{\alpha^+} \Big|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right]. \tag{23}$$

En remplaçant le gain maximal conditionnel $W_{\tau_n}^{\alpha^+}$ par l'égalité (23), l'égalité (22) devient

$$W_0^{\alpha^+} = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_{n+1}^\alpha} e^{-\beta s} f(\xi_s^\alpha, Y_s^\alpha)\, ds - \sum_{k=0}^{n+1} e^{-\beta \tau_k^\alpha} c(\zeta_k^\alpha, Y_{(\tau_k^\alpha)^-}, \zeta_{k+1}^\alpha, Y_{\tau_k^\alpha}) + W_{\tau_{n+1}}^{\alpha^+} \Big|\, \mathcal{F}_0\right].$$

Ainsi l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$. Enfin, lorsque n tend vers l'infini, $W_{\tau_n}^{\alpha^+}$ converge vers 0 p.s. (proposition 3.13) et par suite nous avons

$$W_0^{\alpha^+} = \mathbb{E}(k(\alpha) |\, \mathcal{F}_0),$$

or d'après la remarque 3.4 $F_0^{\alpha^+} = W_0^{\alpha^+}$, soit

$$F_0^{\alpha^+} = \mathbb{E}(k(\alpha)$$

c'est à dire que la stratégie α est optimale.

3.2 Propriétés markoviennes

Le critère d'optimalité présenté par le théorème 3.15 est insuffisant pour aider à la construction d'une stratégie optimale car les variables aléatoires $W_{\tau_n}^\alpha$ et $W_{\tau_n}^{\alpha^+}$ qui interviennent dépendent de la stratégie admissible α. Et donc, en utilisant le caractère markovien et homogène entre deux instants d'impulsion, ainsi que la forme markovienne de chaque renaissance, nous pouvons espérer obtenir que les gains maximaux conditionnels ne dépendent que de l'état de système à l'instant du conditionnement.
D'après le théorème de Doob, $\forall Y$ intégrable il existe une fonction mesurable g telle que:

$$\mathbb{E}\left[Y \big|\, \sigma(\xi_t, Y_t)\right] := g(\xi_t, Y_t).$$

Ainsi, prenons en compte la notation:

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}(Y) := g(i, x). \tag{24}$$

Proposition 3.16. *Introduisons les fonctions ρ et ρ^+ sur l'ensemble probabilisé $(\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{P}(\overline{U})\otimes\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}, \mathbb{P})$:*

$$\rho(i,x) = ess\sup_{\mu\in\underline{D}} \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu)) \quad et \quad \rho^+(i,x) = ess \sup_{\{\mu\in\underline{D},\, \zeta_1^\mu\neq\emptyset\}} \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu)),$$

où l'ess-sup est au sens de Lebesgue. Ces deux fonctions sont $\mathcal{P}(\overline{U})\otimes\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ mesurables.

Preuve
La mesurabilité de ces fonctions, sur l'ensemble probabilisé $(\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{P}(\overline{U})\otimes\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}, \mathbb{P})$, est assurée comme conséquence de la proposition 5.1.1 de J. Neveu [18]:
"Pour toute famille F de fonctions réelles mesurables $f:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ il existe une, et à une équivalence près une seule, fonction mesurable $g:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ telle que

- *$g\geq f$ p.s. pour tout $f\in F$,*
- *si h est une fonction mesurable telle que $h\geq f$ p.s. pour tout $f\in F$, alors $h\geq g$ p.s.*

Cette fonction g, qui est la borne supérieure de la famille F au sens de l'inégalité p.s., est noté $ess\sup(F)$. En outre, il existe au moins une suite $(f_n, n\in\mathbb{N})$ extraite de F telle que $ess\sup(F)=\sup f_n$ p.s.
Si la famille est filtrante croissante, la suite $(f_n, n\in\mathbb{N})$ peut être choisie p.s. croissante et alors

$$ess\sup(F) = \lim_n \uparrow f_n \quad p.s."$$

■

Proposition 3.17. *$\forall f$, $\forall c$, $\forall \mu$, il existe des fonctions mesurables $(F_i)_{1\leq i\leq 4}$ sur $\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}$ telles que:*

$$\mathbb{E}\left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{-\beta(t-\tau_n)} f(\xi_t, Y_t)dt \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right] = F_1(k-n, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}),\ \forall k\geq n\geq -1. \tag{25}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{-\beta(t-\tau_n)} f(\xi_t, Y_t)dt \,\Big|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] = F_2(k-n, \zeta_n, Y_{\tau_n^-}),\ \forall k\geq n\geq 0. \tag{26}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\beta(\tau_k-\tau_n)} c(\zeta_k, Y_{\tau_k^-}, \zeta_{k+1}, Y_{\tau_k}) \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right] = F_3(k-n, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}),\ \forall k> n\geq -1. \tag{27}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\beta(\tau_k-\tau_n)} c(\zeta_k, Y_{\tau_k^-}, \zeta_{k+1}, Y_{\tau_k}) \,\Big|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] = F_4(k-n, \zeta_n, Y_{\tau_n^-}),\ \forall k\geq n\geq 0. \tag{28}$$

Preuve
Pour montrer les assertions précédentes, il suffit de procéder par récurrence. Notons

d'abord par $(\mathcal{F}^n_t, t \geq 0)$ la filtration $(\mathcal{F}_{t+\tau_n}, t \geq 0)$. Ensuite, mentionnons que les processus $Y^n_.$ et $Y_{.+\tau_n}$ ont la même loi $\mathcal{F}_{\tau_n}$-conditionnelle sur l'intervalle $[0, \tau_{n+1} - \tau_n[$ où $Y^n_.$ est un processus de Markov homogène partant de Y_{τ_n} et vérifiant:

$$\begin{cases} dY^n_t = b(\zeta_{n+1})dt + \sigma(\zeta_{n+1})dW^n_t \\ Y^n_0 = Y_{\tau_n}, \end{cases}$$

où W^n est un mouvement brownien indépendant de la filtration $\mathcal{F}_{\tau_n}$.
De plus, le processus $(t, Y^n_.)$ est un processus de Markov non homogène pour la filtration $(\mathcal{F}^n_t, t \geq 0)$.

1. Commençons par l'assertion (25). Pour $l = k - n = 0$, $n \geq -1$, nous avons:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta(t-\tau_n)} f(\xi_t, Y_t)dt \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right] &= \mathbb{E}\Big[\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta(t-\tau_n)} f\big(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n} + b(\zeta_{n+1})(t - \tau_n) \\ &+ \sigma(\zeta_{n+1})(W_t - W_{\tau_n})\big)\, dt \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\Big] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_{n+1}-\tau_n} e^{-\beta t} f\big(\zeta_{n+1}, Y^n_t\big)\, dt \,\Big|\, \mathcal{F}^n_0\right]. \end{aligned}$$

De plus, $\tau_{n+1} - \tau_n = \tau_0 \circ \phi_{\tau_n}$ et ζ_{n+1} est $\mathcal{G}_{\tau_n}$-mesurable donc $\mathcal{F}_{\tau_n}$-mesurable. Le processus $(t, Y^n_.)$ étant un processus de Markov non homogène pour la filtration $(\mathcal{F}^n_t, t \geq 0)$, on obtient l'existence d'une fonction $F_1(0, ., .)$ telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0\circ\phi_{\tau_n}} e^{-\beta t} f\big(\zeta_{n+1}, Y^n_t\big)\, dt \,\Big|\, \mathcal{F}^n_0\right] = F_1(0, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}),$$

où

$$F_1(0, j, y) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0} e^{-\beta t} f\big(j, Y^y_t\big)\, dt\right]$$

D'où, l'assertion (25) est vérifiée pour $l = 0$.

$\mathcal{G}_{\tau_n}$ étant une sous-tribu de $\mathcal{F}_{\tau_n}$, on conditionne ce dernier résultat, pour tout $n \geq 0$. Ensuite, en se servant du théorème de Fubini et en utilisant la loi conditionnelle r^α de passage de $(\zeta_n, Y_{\tau_n^-})$ à $(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})$ sachant $\mathcal{G}_{\tau_n}$ qui est indépendante de n, nous avons:

$$\mathbb{E}\left[F_1(0, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \,\big|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] = \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} F_1(0, j, y)\, r^\alpha(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, j, dy).$$

Cette dernière expression est effectivement une fonction mesurable de ζ_n et $Y_{\tau_n^-}$. D'où l'existence d'une fonction $F_2(0, ., .)$ définie par

$$F_2(0, i, x) = \int_{\overline{U}\times\mathbb{R}} F_1(0, j, y)\, r^\alpha(i, x, j, dy).$$

Par conséquent, les assertions (25) et (26) sont vérifiées pour $l = k - n = 0$. Supposons qu'elles sont vraies jusqu' à $l = k - n$ et montrons qu'elles sont vraies au rang $l + 1$.

2. D'une part, du fait que $\mathcal{F}_{\tau_n} \subset \mathcal{G}_{\tau_{n+1}}$, nous avons:

$$\mathbb{E}\left[\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_{k+2}} e^{-\beta(t-\tau_n)} f(\xi_t, Y_t) dt \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_{k+2}} e^{-\beta(t-\tau_n)} f(\xi_t, Y_t) dt \,\Big|\, \mathcal{G}_{\tau_{n+1}}\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right].$$

D'après l'hypothèse de récurrence (26) appliquée à $l = (k+1) - (n+1)$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_{k+2}} e^{-\beta(t-\tau_n)} f(\xi_t, Y_t) dt \,\Big|\, \mathcal{G}_{\tau_{n+1}}\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\beta(\tau_{n+1}-\tau_n)} F_2(k-n, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_{n+1}^-}) \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\beta\,\tau_0 \circ \phi_{\tau_n}} F_2(k-n, \zeta_{n+1}, Y^n_{\tau_{n+1}-\tau_n}) \,\Big|\, \mathcal{F}_0^n\right].
\end{aligned}$$

Or $Y^n_.$ est un processus de Markov homogène pour la filtration $(\mathcal{F}_{t+\tau_n}, t \geq 0)$. D'où l'assertion (25) est vérifiée pour $l + 1$ avec

$$F_1(l+1, j, y) = \mathbb{E}\left[e^{-\beta\,\tau_0}\; F_2(l, j, Y^y_{\tau_0^-})\right].$$

D'autre part, $\mathcal{G}_{\tau_n} \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$ et par suite en conditionnant l'assertion (25) par $\mathcal{G}_{\tau_n}$ il vient pour $k + 1 = (l + 1) + n$,

$$\mathbb{E}\left[F_1(l+1, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \,\big|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] \;=\; \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} F_1(l+1, j, y) r^\alpha(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, j, dy).$$

L'expression précédente est bien une fonction de $l+1$ et mesurable pour les v.a. ζ_n et $Y_{\tau_n^-}$ et l'assertion (26) est vraie $\forall k \geq n$ avec

$$F_2(l+1, i, x) = \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} F_1(l+1, j, y) r^\alpha(i, x, j, dy).$$

3. On calcule pour $l = k - n = 0$, $n \geq 0$,:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \,\big|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] &= \mathbb{E}\left[c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, \zeta_{n+1}, \Delta_n + Y_{\tau_n -}) \,\big|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] \\
&= \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} c(\zeta_n, Y_{\tau_n -}, j, y)\, r^\alpha(\zeta_n, Y_{\tau_n -}, j, dy).
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la définition de la loi conditionnelle r^α de passage de $(\zeta_n, Y_{\tau_n^-})$ à $(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})$ sachant $\mathcal{G}_{\tau_n}$. Ainsi, on a l'existence de $F_4(0, ., .)$ définie par

$$F_4(0, i, x) = \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} c(i, x, j, y)\, r^\alpha(i, x, j, dy).$$

Ensuite montrons que l'assertion (27) est vraie pour $k = n+1$, $n \geq -1$. Du fait que $\mathcal{F}_{\tau_n} \subset \mathcal{G}_{\tau_{n+1}}$, on conditionne le dernier résultat pour $(n+1, n+1)$:

$$\mathbb{E}\left[F_4(0, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_{n+1}^-}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right] = \mathbb{E}\left[F_4(0, \zeta_{n+1}, Y^n_{\tau_{n+1}-\tau_n}) \,\middle|\, \mathcal{F}^n_0\right].$$

Or $Y^n_.$ est un processus de Markov homogène pour la filtration $(\mathcal{F}_{t+\tau_n})_{t\geq 0}$. Par suite, il existe $F_3(1,.,.)$ définie par

$$F_3(1, j, y) = \mathbb{E}\left[F_4(0, j, Y^y_{\tau_0^-})\right].$$

Ainsi l'assertion (27) est vérifiée pour $k = n+1$.

Par suite on pose les hypothèses de récurrence (27) et (28) jusqu'au rang $l = k-n$ et on montre qu'elles sont vraies pour $l+1$.

4. D'une part, pour tout $n \geq -1$, $\mathcal{F}_{\tau_n}$ étant une sous-tribu de $\mathcal{G}_{\tau_{n+1}}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\beta(\tau_{k+1}-\tau_n)} c(\zeta_{k+1}, Y_{\tau_{k+1}^-}, \zeta_{k+2}, Y_{\tau_{k+1}}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{-\beta(\tau_{k+1}-\tau_n)} c(\zeta_{k+1}, Y_{\tau_{k+1}^-}, \zeta_{k+2}, Y_{\tau_{k+1}}) \,\middle|\, \mathcal{G}_{\tau_{n+1}}\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right].$$

D'après l'hypothèse de récurrence (28), appliquée à $l = (k+1)-(n+1)$, l'égalité précédente devient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\beta(\tau_{k+1}-\tau_n)} c(\zeta_{k+1}, Y_{\tau_{k+1}^-}, \zeta_{k+2}, Y_{\tau_{k+1}}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\beta(\tau_{n+1}-\tau_n)} F_4(k-n, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_{n+1}^-}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\beta(\tau_{n+1}-\tau_n)} F_4(k-n, \zeta_{n+1}, Y^n_{\tau_{n+1}-\tau_n}) \,\middle|\, \mathcal{F}^n_0\right].
\end{aligned}$$

$(t, Y^n_.)_{t\geq 0}$ étant un processus de Markov non homogène pour la filtration $(\mathcal{F}_{t+\tau_n})_{t\geq 0}$, l'égalité (27) est vérifiée $\forall\, k > n$ avec l'existence de $F_3(l+1,.,.)$ définie par

$$F_3(l+1, j, y) = \mathbb{E}\left[e^{-\beta\tau_0} F_4(l, j, Y^y_{\tau_0^-})\right].$$

D'autre part, $\mathcal{G}_{\tau_n} \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$. Par suite, pour tout $n \geq 0$, en conditionnant l'assertion (27) en $k+1 > n$ par la filtration $\mathcal{G}_{\tau_n}$, nous avons:

$$\mathbb{E}\left[e^{-\beta(\tau_{k+1}-\tau_n)} c(\zeta_{k+1}, Y_{\tau_{k+1}^-}, \zeta_{k+2}, Y_{\tau_{k+1}}) \,\middle|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{-\beta(\tau_{k+1}-\tau_n)} c(\zeta_{k+1}, Y_{\tau_{k+1}^-}, \zeta_{k+2}, Y_{\tau_{k+1}}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right) \,\middle|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F_3(k+1-n, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \,\middle|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right].
\end{aligned}$$

De la définition de la loi conditionnelle r^α de passage de $(\zeta_n, Y_{\tau_n^-})$ à $(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})$ sachant $\mathcal{G}_{\tau_n}$, il vient:

$$\mathbb{E}\left[F_3(k+1-n, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \,\middle|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] = \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} F_3(k+1-n, j, y) r^\alpha(\zeta_n, Y_{\tau_n -}, j, dy),$$

On déduit l'existence de $F_4(l+1, ., .)$ définie par

$$F_4(l+1, i, x) = \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} F_3(l+1, j, y) r^\alpha(i, x, j, dy).$$

■

D'où le corollaire suivant:

Corollaire 3.18. *On a les égalités suivantes:*

$$W^\alpha_{\tau_n} = e^{-\beta\tau_n^\alpha}\rho(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}), \ \forall\, n \geq 0 \qquad p.s. \tag{29}$$

$$W^{\alpha+}_{\tau_n} = e^{-\beta\tau_n^\alpha}\rho^+(\zeta_{n+1}^\alpha, Y_{\tau_n^\alpha}), \ \forall\, n \geq -1 \qquad p.s. \tag{30}$$

Preuve
D'une part, on considère la trajectoire (ξ, Y) à partir de τ_n^α notée $\tilde{\xi}, \tilde{Y}$:

$$\rho(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}) = ess \sup_{\mu\in\underline{D}} \mathbb{E}\left[k(\mu) \,\middle|\, \tilde{\xi}_0 = \zeta_n^\alpha, \tilde{Y}_0 = Y_{(\tau_n^\alpha)^-}\right].$$

Puisque l'on considère les trajectoires partant de τ_n^α, de fait l'essentiel sup est pris sur l'ensemble $\{\mu_t = \alpha_t, \ \forall t < \tau_n^\alpha\}$. Pour de telles stratégies, $\tau_n^\mu = \tau_n^\alpha$ (noté τ_n ci-dessous) il vient :

$$\mathbb{E}\left[k(\mu) \,\middle|\, \tilde{\xi}_0 = \zeta_n, \tilde{Y}_0 = Y_{\tau_n^-}\right] = \mathbb{E}\left[k(\mu) \,\middle|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] = \left[\sum_{j\geq 0} e^{-\beta\tau_n^\alpha} F_2^\mu(j, \zeta_n, Y_{\tau_n^-}) - \sum_{j\geq 0} e^{-\beta\tau_n^\alpha} F_4^\mu(j, \zeta_n, Y_{\tau_n^-})\right].$$

D'autre part, le gain maximal conditionnel après $\tau_n, \ n \geq 0$, est égal p.s. à

$$e^{\beta\tau_n^\alpha}\, W^\alpha_{\tau_n} = ess \sup_{\{\mu_t = \alpha_t, \ \forall t < \tau_n\}} \mathbb{E}\left[e^{\beta\tau_n^\alpha} k_{\tau_n}(\mu) \,\middle|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right],$$

et l'intégrand est détaillé comme suit

$$e^{\beta\tau_n} k_{\tau_n}(\mu) \;=\; \left[\sum_{k\geq n}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{-\beta(s-\tau_n)} f(\xi_s^\mu, Y_s^\mu)\, ds - \sum_{k\geq n} e^{-\beta(\tau_k-\tau_n)} c(\zeta_k^\mu, Y_{\tau_k^-}, \zeta_{k+1}^\mu, Y_{\tau_k})\right].$$

D'après les assertions (26) et (28) de la proposition 3.17, il vient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\beta\tau_n^\alpha} k_{\tau_n}(\mu) \,\middle|\, \mathcal{G}_{\tau_n}\right] &= \sum_{k\geq n} F_2^\mu(k-n, \zeta_n, Y_{\tau_n^-}) - \sum_{k\geq n} F_4^\mu(k-n, \zeta_n, Y_{\tau_n^-}) \\
&= \sum_{j\geq 0} e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, F_2^\mu(j, \zeta_n, Y_{\tau_n^-}) - \sum_{j\geq 0} e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, F_4^\mu(j, \zeta_n, Y_{\tau_n^-}).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité (29) est vérifiée.

De manière analogue, nous vérifions l'égalité (30), pour tout $n \geq -1$,:

$$e^{\beta\tau_n^\alpha}\, W_{\tau_n}^{\alpha^+} = ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\, \forall\, t \leq \tau_n^\alpha\}} \mathbb{E}\left[e^{\beta\tau_n^\alpha} k_{\tau_n^+}(\mu)\,\middle|\mathcal{F}_{\tau_n}\right].$$

Puisque l'on considère les trajectoires partant à droite de τ_n^α, de fait l'essentiel sup est pris sur l'ensemble $\{\mu_t = \alpha_t,\ \forall\, t \leq \tau_n^\alpha\}$. Pour de telles stratégies, $\tau_n^\mu = \tau_n^\alpha$ (noté τ_n) et il vient :

$$e^{\beta\tau_n} k_{\tau_n^+}(\mu) \quad = \quad \left[\sum_{k\geq n} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{-\beta(s-\tau_n)} f(\xi_s^\mu, Y_s^\mu)\, ds - \sum_{k>n} e^{-\beta(\tau_k-\tau_n)} c(\zeta_k^\mu, Y_{\tau_k^-}, \zeta_{k+1}^\mu, Y_{\tau_k})\right].$$

D'après les assertions (26) et (28) de la proposition 3.17, il vient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\beta\tau_n} k_{\tau_n^+}(\mu)\,\middle|\mathcal{F}_{\tau_n}\right] &= \sum_{k\geq n} F_1^\mu(k-n, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) - \sum_{k>n} F_3^\mu(k-n, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \\
&= \sum_{j\geq 0} e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, F_1^\mu(j, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) - \sum_{j>0} e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, F_3^\mu(j, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}).
\end{aligned}$$

De plus,

$$k_{\tau_n^+}(\mu) = k_{\tau_n^+}(\mu)\, \mathbf{1}_{\{\zeta_{n+1}^\mu \neq \emptyset\}}.$$

En effet $\zeta_{n+1}^\mu = \emptyset$ implique que $\tau = \tau_n$ et ainsi $k_{\tau_n^+}(\mu)\, \mathbf{1}_{\{\zeta_{n+1}^\mu = \emptyset\}} = 0$.
Par suite, sachant $\mathcal{F}_{\tau_n}$, $(\zeta_{n+1}^\mu, Y_{\tau_n})$ devient une condition initiale avec $\zeta_{n+1}^\mu \neq \emptyset$ et μ décrit l'ensemble des stratégies admissibles partant de τ_n telles que $\zeta_{n+1}^\mu \neq \emptyset$ et nous avons:

$$e^{\beta\tau_n^\alpha}\, W_{\tau_n}^{\alpha^+} = ess \sup_{\mu\in\underline{D},\, \zeta_{n+1}^\mu\neq\emptyset} \left[\sum_{j\geq 0} e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, F_1^\mu(j, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) - \sum_{j>0} e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, F_3^\mu(j, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})\right].$$

Par ailleurs, considérant la trajectoire (ξ, Y) qui part à droite de τ_n notée $(\tilde{\xi}, \tilde{Y})$:

$$\rho^+(\zeta_{n+1}^\alpha, Y_{\tau_n}) = ess \sup_{\mu\in\underline{D},\, \zeta_{n+1}^\mu\neq\emptyset} \mathbb{E}\left[k(\mu)\,\middle|\tilde{\xi}_0 = \zeta_{n+1}^\alpha, \tilde{Y}_0 = Y_{\tau_n}\right].$$

L'essentiel sup est pris sur l'ensemble $\{\mu_t = \alpha_t,\ \forall\, t \leq \tau_n\}$ et il vient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[k(\mu)\,\middle|\tilde{\xi}_0 = \zeta_{n+1}, \tilde{Y}_0 = Y_{\tau_n}\right] &= \mathbb{E}\left[k(\mu)\,\middle|\mathcal{F}_{\tau_n}\right] \\
&= \left[\sum_{j\geq 0} e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, F_1^\mu(j, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) - \sum_{j>0} e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, F_3^\mu(j, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})\right].
\end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité (30) est vérifiée. ■

A la suite de Lepeltier et Marchal [12] nous introduisons l'application sur $\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$:

$$(i,x) \longrightarrow m\rho^+(i,x) = ess \sup_{\nu \in M_{(i,x)}} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} \nu(i,x;j,dy) \left(-c(i,x,j,y) + \rho^+(j,y)\right).$$

Posons, de plus, pour tout ensemble $M^*_{(i,x)} = M_{(i,x)} - \delta_{(i,x)}$

$$(i,x) \longrightarrow m^*\rho^+(i,x) = ess \sup_{\nu \in M^*_{(i,x)}} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} \nu(i,x;j,dy)(-c(i,x,j,y) + \rho^+(j,y)).$$

Proposition 3.19. *Si $M_{(i,x)}$ est séparable pour la topologie définie par (5), alors les applications $m\rho^+$ et $m^*\rho^+$ sont mesurables.*

Preuve
L'ensemble $M_{(i,x)}$ est séparable, ce qui implique qu'il existe un sous-ensemble $M^0_{(i,x)}$ dense dans $M_{(i,x)}$ tel que $\overline{M}^0_{(i,x)} = M_{(i,x)}$. De plus, pour toute loi $\nu \in M_{(i,x)}$, il existe $\nu_n \in M^0_{(i,x)}$ tel que ν_n converge vers ν lorsque n converge vers l'infini.
La mesurabilité de l'application

$$(i,x) \longrightarrow ess \sup_{\nu_n \in M_{0_{(i,x)}}} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} \nu_n(i,x;j,dy)(-c(i,x,j,y) + \rho^+(j,y))$$

est assurée comme conséquence de la mesurabilité de la fonction ρ^+ et des propriétés de l'essentiel sup sur un ensemble dense.
La loi ν_n convergeant vers ν, l'application précédente converge vers $m\rho^+(i,x)$. Par conséquent, $m\rho^+$ est mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables.
Nous procédons d'une manière analogue pour montrer la mesurabilité de l'application $m^*\rho^+$. ■

Remarque 3.20. *Les applications $m\rho^+$, $m^*\rho^+$ et $m\rho$, $m^*\rho$ sont liées par les relations suivantes*

$$\begin{cases} m\rho^+(i,x) = \rho^+(i,x) \vee m^*\rho^+(i,x), \\ m\rho(i,x) = \rho(i,x) \vee m^*\rho(i,x). \end{cases}$$

Proposition 3.21. *Sous l'hypothèse que $M_{(i,x)}$ est faiblement compact faiblement fermé (hypothèse 1), il existe un noyau borélien $r^* \in M$ vérifiant,*

$$m\rho^+(i,x) = \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} r^*(i,x;j,dy)(-c(i,x,j,y) + \rho^+(j,y)). \tag{31}$$

Preuve
D'après la définition de l'opérateur $m\rho^+$ et les propriétés de l'essentiel supremum il existe, $\forall (i,x)\ \forall n$, un noyau borélien $r^n_{(i,x)} \in M_{(i,x)}$ tel que,

$$\frac{1}{n} + m\rho^+(i,x) \leq \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} r^n_{(i,x)}(i,x;j,dy) \left(-c(i,x;j,y) + \rho^+(j,y)\right) \leq m\rho^+(i,x). \tag{32}$$

L'ensemble $M_{(i,x)}$ est un ensemble faiblement compact faiblement fermé pour la topologie faible, ainsi il existe une suite extraite $(r^{n_j}_{(i,x)})_{n\geq 0}$ tel que

$$r^*_{(i,x)} = \lim_{n\to+\infty} r^{n_j}_{(i,x)} \in M_{(i,x)}.$$

D'après le théorème de selection mesurable, $r^*_{(i,x)}$ est un noyau borélien obtenu comme limite d'une suite extraite $(r^{n_j}_{(i,x)})_{n\geq 0}$ de noyaux boréliens. Par suite, en passant à la limite dans (32),

$$m\rho^+(i,x) = \int_{\overline{U}\times\mathbb{R}} r^*_{(i,x)}(i,x;j,dy)\left(-c(i,x;j,y)+\rho^+(j,y)\right).$$

Par conséquent, nous définissons $r^* \in M$ comme suit:

$$\forall\ (i,x),\ r^*(i,x,j,dy) = r^*_{(i,x)}(i,x,j,dy).$$

■

Proposition 3.22. *Pour toute stratégie admissible α et tout $n \geq 0$, on a*

$$W^\alpha_{\tau_n} = e^{-\beta\tau^\alpha_n}\, m\rho^+(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}) \quad p.s. \tag{33}$$

De plus, le gain moyen $\rho(i,x)$ est égal à $m\rho^+(i,x)$.

Preuve

1. Il s'agit d'établir $\forall\alpha \in \underline{D}$ l'égalité

$$e^{-\beta\tau^\alpha_n}\, m\rho^+(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}) = ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\ \forall\, t<\tau^\alpha_n\}} \mathbb{E}(k_{\tau^\alpha_n}(\mu)|\, \mathcal{G}_{\tau^\alpha_n}) \quad \text{p.s.} \tag{34}$$

Soit une stratégie μ vérifiant $\{\mu_t = \alpha_t,\ \forall\, t < \tau_n\}$, alors $r^\mu = r^\alpha$, $\zeta^\mu_n = \zeta^\alpha_n$, $\tau^\mu_n = \tau^\alpha_n$ et $r^\mu(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}, ., .) \in M_{\{\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}\}}$, donc l'opérateur $m\rho^+(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-})$ vérifie:

$$e^{-\beta\tau^\alpha_n}\, m\rho^+(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}) \geq e^{-\beta\tau^\alpha_n} \int_{\overline{U}\times\mathbb{R}} r^\mu(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}, i, dx)(-c(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}, i, x)+\rho^+(i,x)).$$

De plus pour toutes ces stratégies μ on a

$$\begin{aligned} & e^{-\beta\tau^\alpha_n} \int_{\overline{U}\times\mathbb{R}} r^\mu(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}, i, dx)(-c(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}, i, x) + \rho^+(i,x)) \\ = \ & e^{-\beta\tau^\alpha_n}\mathbb{E}\big(-c(\zeta^\mu_n, Y_{(\tau^\mu_n)^-}, \zeta^\mu_{n+1}, Y_{\tau^\mu_n}) + \rho^+(\zeta^\mu_{n+1}, Y_{\tau^\mu_n})|\, \mathcal{G}_{\tau^\alpha_n}\big). \end{aligned}$$

Grâce à l'égalité (30), on peut remplacer $e^{-\beta\tau^\alpha_n}\rho^+(\zeta^\mu_{n+1}, Y_{\tau^\mu_n})$:

$$e^{-\beta\tau^\alpha_n}\, m\rho^+(\zeta^\alpha_n, Y_{(\tau^\alpha_n)^-}) \geq \mathbb{E}\left(-e^{-\beta\tau_n}c(\zeta^\mu_n, Y_{(\tau^\mu_n)^-}, \zeta^\mu_{n+1}, Y_{\tau^\mu_n}) + W^{\mu+}_{\tau_n}|\, \mathcal{G}_{\tau^\alpha_n}\right).$$

Soit encore, puisque $W^{\mu+}_{\tau_n} \geq \mathbb{E}(k_{\tau_n^+}(\mu) | \mathcal{F}_{\tau_n^\mu})$, pour cette stratégie μ qui vérifie $\{\mu_t = \alpha_t,\ \forall\, t < \tau_n\}$:

$$e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, m\rho^+(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}) \geq \mathbb{E}\left[-e^{-\beta\tau_n} c(\zeta_n^\mu, Y_{(\tau_n^\mu)^-}, \zeta_{n+1}^\mu, Y_{\tau_n^\mu}) + \mathbb{E}(k_{\tau_n^+}(\mu) | \mathcal{F}_{\tau_n^\mu}) \,\middle|\, \mathcal{G}_{\tau_n^\alpha}\right].$$

La tribu $\mathcal{G}_{\tau_n}$ étant une sous-tribu de $\mathcal{F}_{\tau_n}$, $\forall \mu \in \{\mu_t = \alpha_t,\ \forall\, t < \tau_n\}$:

$$e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, m\rho^+(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}) \geq \mathbb{E}\left[-e^{-\beta\tau_n} c(\zeta_n^\mu, Y_{(\tau_n^\mu)^-}, \zeta_{n+1}^\mu, Y_{\tau_n^\mu}) + k_{\tau_n^+}(\mu) | \mathcal{G}_{\tau_n^\alpha}\right].$$

Par suite, nous avons:

$$e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, m\rho^+(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}) \geq ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\ \forall\, t<\tau_n\}} \mathbb{E}\left[-e^{-\beta\tau_n} c(\zeta_n^\mu, Y_{(\tau_n^\mu)^-}, \zeta_{n+1}^\mu, Y_{\tau_n^\mu}) + k_{\tau_n^+}(\mu) | \mathcal{G}_{\tau_n^\alpha}\right].$$

Nous en déduisons donc l'inégalité

$$e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, m\rho^+(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}) \geq W^\alpha_{\tau_n}.$$

Inversement, d'après l'expression (31) prise en $(i,x) = (\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-})$, il existe un noyau borélien $r^*_{(i,x)} \in M$ tel que p.s.

$$e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, m\rho^+(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}) \;=\; e^{-\beta\tau_n^\alpha} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} r^*(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}; dy) \left(-c(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}, j, y) + \rho^+(j,y)\right).$$

Le noyau borélien $r^*_{(i,x)}$ est une loi conditionnelle de passage de la technologie ζ_n à ζ_{n+1} et de $Y_{\tau_n^-}$ à Y_{τ_n}. Ainsi il existe une stratégie μ^* qui vérifie $\{\mu^*_t = \alpha_t,\ \forall\, t < \tau_n\}$ telle que p.s.

$$e^{-\beta\tau_n^\alpha}\, m\rho^+(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)^-}) \;=\; e^{-\beta\tau_n}\, \mathbb{E}\left(-c(\zeta_n^{\mu^*}, Y_{(\tau_n^{\mu^*})^-}, \zeta_{n+1}^{\mu^*}, Y_{\tau_n^{\mu^*}}) + \rho^+(\zeta_{n+1}^{\mu^*}, Y_{\tau_n^{\mu^*}}) | \mathcal{G}_{\tau_n^{\mu^*}}\right).$$

De plus, d'après l'égalité (30), nous avons p.s.:

$$e^{-\beta\tau_n}\, m\rho^+(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}) = \mathbb{E}\left(-e^{-\beta\tau_n} c(\zeta_n^{\mu^*}, Y_{(\tau_n^{\mu^*})^-}, \zeta_{n+1}^{\mu^*}, Y_{\tau_n^{\mu^*}}) + W^{\mu^+_*}_{\tau_n} | \mathcal{G}_{\tau_n^{\mu^*}}\right).$$

En appliquant l'inégalité (20), nous obtenons l'inégalité:

$$e^{-\beta\tau_n}\, m\rho^+(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}) \leq W^{\mu^*}_{\tau_n} = ess \sup_{\{\nu_t=\mu_t^*, t<\tau_n\}} \mathbb{E}(k_{\tau_n}(\nu) | \mathcal{G}_{\tau_n^\nu}).$$

Parce que $\mu^*_t = \alpha_t,\ \forall\, t < \tau_n$, les deux ensembles $\{\nu_t = \mu^*_t, t < \tau_n\}$ *et* $\{\nu_t = \alpha_t, t < \tau_n\}$ coïncident. Ainsi

$$ess \sup_{\{\nu_t=\mu_t^*, t<\tau_n\}} \mathbb{E}(k_{\tau_n}(\nu) | \mathcal{G}_{\tau_n^\nu}) = ess \sup_{\{\nu_t=\alpha_t, t<\tau_n\}} \mathbb{E}(k_{\tau_n}(\nu) | \mathcal{G}_{\tau_n^\nu}).$$

Par suite,

$$e^{-\beta\tau_n}\, m\rho^+(\zeta_n, Y_{\tau_n^-})) \leq W^{\mu^*}_{\tau_n} = W^\alpha_{\tau_n}.$$

Ainsi nous obtenons l'inégalité inverse et donc l'égalité (34).

2. Il reste à montrer l'égalité

$$\rho(i,x) = m\rho^+(i,x).$$

Pour tout $n \geq 0$, des égalités (29) et (33), il vient :

$$m\rho^+(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)-}) = \rho(\zeta_n^\alpha, Y_{(\tau_n^\alpha)-}) \quad \text{p.s.}$$

En particulier, pour $n = 0$ et toute stratégie α qui démarre avec $\xi_0 = i$ telle que $\tau_0 = t$, $t > 0$, nous avons p.s.

$$m\rho^+(i, Y_{t-}) = \rho(i, Y_{t-}).$$

Or,

$$Y_{t-} = x + b(i)t + \sigma(i)W_t,$$

est une variable aléatoire gaussienne qui peut prendre toutes les valeurs de $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, $\forall (i,x) \in U \times \mathbb{R}$,

$$\rho(i,x) = m\rho^+(i,x).$$

■

Proposition 3.23. *L'application ρ^+ satisfait à l'égalité suivante:*

$$\rho^+(i,x) = ess \sup_{T>0, T\in \underline{R}_{-1}} \mathbb{E}_{\{i,x\}} \left(\int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + e^{-\beta T((i,x),.)} m\rho^+(i, Y_{T^-((i,x),.)}) \right), \tag{35}$$

où $\underline{R}_{-1}$ est l'ensemble des applications mesurables T de $(\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega, \mathcal{P}(\overline{U}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+})$, tel que pour $(i,x) \in \overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$, $T((i,x),.)$ est un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt.

Preuve

1. On rappelle que

$$\rho^+(i,x) = ess \sup_{\mu \in \underline{D}, \zeta_1^\mu \neq \emptyset} \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu)).$$

Soit $T((i,x),.) \in \underline{R}_{-1}$. Pour toute stratégie μ qui démarre avec la technologie $\xi_0 = i$ et telle que $\tau_0^\mu = T((i,x),.) > 0$, $\zeta_1^\mu \neq \emptyset$ on a la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
k(\mu) &= \mathbb{E}_{\{i,x\}}\Big(\int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s^\mu)\, ds + \int_{T((i,x),.)}^{\tau} e^{-\beta s} f(i, Y_s^\mu)\, ds \\
&- e^{-\beta T((i,x),.)} c\big(i, Y^\mu_{T^-((i,x),.)}, \zeta_1^\mu, Y^\mu_{T((i,x),.)}\big) - \sum_{n\geq 1} 1_{(\tau_n > T((i,x),.))}\, e^{-\beta\tau_n} c\big(\zeta_n^\mu, Y^\mu_{(\tau_n)-}, \zeta_{n+1}^\mu, Y^\mu_{\tau_n}\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}_{\{i,x\}}\big[- e^{-\beta T((i,x),.)} c\big(i, Y^\mu_{T^-((i,x),.)}, \zeta_1^\mu, Y^\mu_{T((i,x),.)}\big) + \int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s^\mu)\, ds \\
&+ \mathbb{E}\left(k_{T^+((i,x),.)}(\mu) \middle| \mathcal{F}_{T((i,x),.)} \right) \big].
\end{aligned}$$

D'où, en prenant l'essentiel sup sur le dernier terme

$$\rho^+(i,x) \geq \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(-e^{-\beta T((i,x),.)}c\big(i, Y^{\mu}_{T^-((i,x),.)}, \zeta^{\mu}_1, Y^{\mu}_{T((i,x),.)}\big) + \int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y^{\mu}_s)\, ds + W^{\mu^+}_{T((i,x),.)}\right).$$

D'après l'égalité (30) prise en $T((i,x),.)$, nous avons:

$$\begin{aligned}\rho^+(i,x) &\geq \mathbb{E}_{\{i,x\}}\big(-e^{-\beta T((i,x),.)}c\big(i, Y^{\mu}_{T^-((i,x),.)}, \zeta^{\mu}_1, Y^{\mu}_{T((i,x),.)}\big) + \int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y^{\mu}_s)\, ds \\ &+ e^{-\beta T((i,x),.)}\rho^+\big(\zeta^{\mu}_1, Y^{\mu}_{T((i,x),.)}\big)\big).\end{aligned}$$

Le processus Y est $\mathcal{G}$-adapté et $T((i,x),.)$ est un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt. D'où en conditionnant par la tribu $\mathcal{G}_{T((i,x),.)}$, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}\rho^+(i,x) &\geq \mathbb{E}_{\{i,x\}}\big[e^{-\beta T((i,x),.)}\mathbb{E}\left[-c\big(i, Y_{T^-((i,x),.)}, \zeta^{\mu}_1, Y^{\mu}_{T((i,x),.)}\big) + \rho^+(i, Y^{\mu}_{T((i,x),.)}) |\, \mathcal{G}_{T((i,x),.)}\right] \\ &+ \int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds\big].\end{aligned}$$

A toute stratégie μ qui démarre avec $\xi_0 = i$ et $\tau_0 = T((i,x),.)$, on associe le noyau $r^{\mu} \in M$, nous avons:

$$\mathbb{E}\left[-c\big(i, Y^{\mu}_{T^-((i,x),.)}, \zeta^{\mu}_1, Y^{\mu}_{T((i,x),.)}\big) + \rho^+(i, Y^{\mu}_{T((i,x),.)}) |\, \mathcal{G}_{T((i,x),.)}\right] =$$

$$\int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} r^{\mu}(i, Y^{\mu}_{T^-((i,x),.)}, j, dy)(-c(i, Y^{\mu}_{T^-((i,x),.)}, j, y) + \rho^+(j,y))$$

où l'on reconnait la définition de l'opérateur $m\rho^+(i, Y_{T((i,x),.)})$, et en passant à l'ess sup sur les $T((i,x),.) \in \underline{R}_{-1}$, il vient:

$$\rho^+(i,x) \geq ess \sup_{T>0,\, T\in\underline{R}_{-1}} \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + e^{-\beta T((i,x),.)} m\rho^+(i, Y_{T^-((i,x),.)})\right).$$

2. D'après l'égalité (33) prise en $n = 0$ avec $\alpha = \mu$ déjà utilisée dans le 1. qui vérifie $\xi_0 = i,\ \tau^{\mu}_0 = T((i,x),.)$:

$$W^{\mu}_{T((i,x),.)} = e^{-\beta T((i,x),.)} m\rho^+(i, Y_{T^-((i,x),.)}),$$

soit

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + e^{-\beta T((i,x),.)} m\rho^+(i, Y_{T^-((i,x),.)})\right) =$$

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + W^{\mu}_{T((i,x),.)}\right).$$

De plus, sur l'ensemble $\{\zeta_1^\mu = \emptyset\}$, nous avons $k_{T((i,x),.)}(\mu) = 0$. En effet, $\zeta_1^\mu = \emptyset$ implique que $\tau = T((i,x),.)$ et donc le gain donné par l'expression suivante

$$k_{T((i,x),.)}(\mu)\, 1_{\{\zeta_1^\mu=\emptyset\}} = \int_{T((i,x),.)}^{\tau^\mu} e^{-\beta s} f(\emptyset, Y_s^\mu)\, ds - \sum_{k\geq n} e^{-\beta T((i,x),.)}\, c(i, Y_{\tau_0^-}, \emptyset, Y_{\tau_0})$$

est nul. Par suite:

$$W^\mu_{T((i,x),.)} = W^\mu_{T((i,x),.)}\, \mathbf{1}_{\{\zeta_1\neq\emptyset\}}.$$

Par définition du gain maximal conditionnel, nous avons, pour la stratégie μ qui démarre avec $\xi_0 = i$, $\tau_0 = T((i,x),.) > 0$ et $\zeta_1 \neq \emptyset$:

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + W^\mu_{T((i,x),.)}\right) \geq \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(k(\mu) - k_{T((i,x),.)}(\mu) + \mathbb{E}[k_{T(i,.)}(\mu)|\, \mathcal{G}_{T((i,x),.)}]\right).$$

L'expression $(k(\mu) - k_{T((i,x),.)}(\mu))$ étant $\mathcal{G}_{T((i,x),.)}$-mesurable, nous avons

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(k(\mu) - k_{T((i,x),.)}(\mu) + \mathbb{E}[k_{T((i,x),.)}(\mu)|\, \mathcal{G}_{T((i,x),.)}]\right) = \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu)).$$

D'où, pour toute stratégie μ qui démarre avec $\xi_0 = i$, $\tau_0 = T((i,x),.) > 0$ et $\zeta_1 \neq \emptyset$:

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + W^\mu_{T((i,x),.)}\right) \geq \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu)).$$

Par définition de l'ess sup (cf. [18]), il en suit:

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + W^\mu_{T((i,x),.)}\right) \geq ess \sup_{\mu\in \underline{D}, \zeta_1\neq\emptyset} \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu)) = \rho^+(i,x).$$

D'où l'égalité (35). ∎

Nous pouvons, par suite, exprimer le critère d'optimalité établi dans le théorème 3.15 à l'aide de l'application ρ^+ qui, par définition, est indépendante de toute stratégie admissible.

Théorème 3.24. *Pour toute stratégie admissible $\alpha = (\tau, \xi, Y)$, nous avons les inégalités suivantes p.s.:*

$$\rho^+(i,x) \;\geq\; \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{\tau_0} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + e^{-\beta\tau_0} m\rho^+(i, Y_{\tau_0^-})\right). \tag{36}$$

Pour tout $n \geq 0$,

$$m\rho^+(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}) \;\geq\; \int_{\overline{U}\times\mathbb{R}} r^\alpha(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, i, dx)\left(-c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, j, y) + \rho^+(j,y)\right). \tag{37}$$

Pour tout $n \geq -1$,

$$e^{-\beta\tau_n}\, \rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \;\geq\; \mathbb{E}_{\{\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}\}}\left(\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta s} f(\zeta_{n+1}, Y_s)\, ds + e^{-\beta\tau_{n+1}} m\rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_{n+1}^-})\right), \tag{38}$$

De plus, $\widehat{\alpha}$ est optimale si et seulement si l'égalité a lieu simultanément dans (36), (37) et (38).

Preuve
Soit une stratégie $\alpha \in \underline{D}$.
Grâce à la proposition 3.23 appliquée au temps $T((i,x),.) = \tau_0^\alpha \in \underline{R}_{-1}$, on obtient:

$$\rho^+(i,x) \geq \mathbb{E}_{\{i,x\}} \left(\int_0^{\tau_0^\alpha} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + e^{-\beta \tau_0^\alpha} m \rho^+(i, Y_{\tau_0^-}) \right).$$

Ainsi l'inégalité (36) est vérifiée.

Quant à l'inégalité (37), pour tout $n \geq 0$, elle est tirée de l'inégalité (20) du théorème 3.15 en remplaçant $W_{\tau_n}^\alpha$ par $e^{-\beta\tau_n} m\rho^+(\zeta_n, Y_{\tau_n^-})$ (égalité (33)) et $W_{\tau_n}^{\alpha^+}$ par $e^{-\beta\tau_n} \rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})$ (égalité (30)).

Puis, pour tout $n \geq -1$, l'inégalité (38) s'obtient immédiatement à partir de l'inégalité (21) en remplaçant $W_{\tau_n}^{\alpha^+}$ par $e^{-\beta\tau_n} \rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})$ (égalité (30)) et $W_{\tau_{n+1}}^\alpha$ par $e^{-\beta\tau_{n+1}} m\rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_{n+1}^-})$ (égalité (33)).

Ensuite, supposons que la stratégie $\widehat{\alpha}$ est optimale : dans ce cas, les égalités (19),(20) et (21) du théorème 3.15 sont vérifiées . Ce qui entraîne que (37) et (38) sont des égalités. L'égalité (36) c'est exactement l'égalité (38) en $n = -1$.

Inversement, supposons que les inégalités (36), (37) et (38) sont des égalités.
L'égalité (20) s'obtient, pour tout $n \geq 0$, de l'égalité (37) en remplaçant $e^{-\beta\tau_n} m\rho^+(\zeta_n, Y_{\tau_n^-})$ par $W_{\tau_n}^\alpha$ (égalité (33)) et $e^{-\beta\tau_n} \rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})$ par $W_{\tau_n}^{\alpha^+}$ (égalité (30)).

Quant à l'égalité (21), elle est tirée, pour tout $n \geq -1$, de l'égalité (38) en remplaçant $e^{-\beta\tau_n} \rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})$ par $W_{\tau_n}^{\alpha^+}$ (égalité (30)) et $e^{-\beta\tau_{n+1}} m\rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_{n+1}^-})$ par $W_{\tau_{n+1}}^\alpha$ (égalité (33)).

Par suite les égalités (20) et (21) donc (19) sont vérifiées. Ainsi, d'après le théorème 3.15, la stratégie α est optimale.

■

4 Résolution

Suivant la technique déjà utilisée en contrôle impulsionnel (voir [5]), posons:

Définition 4.1. *Nous appelons ensemble optimal de continuation le sous-ensemble de* $\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$*:*

$$C = \Big\{ (i,x) : \rho(i,x) > m^* \rho^+(i,x) \Big\}.$$

Supposons que $(i,x) \in C$, il n'est pas intéressant de changer de stratégie à cet instant. En effet $\rho(i,x)$, le meilleur gain en partant de x est strictement supérieur

au meilleur gain quand on réalise au moins un changement. Il faut donc laisser le système évoluer librement, on voit que le premier instant de changement de technologie est celui où le système atteint la frontière de C.
Nous noterons par I son complémentaire dans $\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$ qui est l'ensemble d'impulsion. Il est défini comme suit:

$$I = \big\{(i,x) : \rho(i,x) = m^*\rho^+(i,x)\big\}.$$

En effet, de la remarque 3.20, il vient:

$$m\rho^+(i,x) = \rho^+(i,x) \vee m^*\rho^+(i,x).$$

En remplaçant $m\rho^+(i,x)$ par $\rho(i,x)$ (proposition 3.22),

$$\rho(i,x) = \rho^+(i,x) \vee m^*\rho^+(i,x).$$

On en déduit que $\rho(i,x) \geq m^*\rho^+(i,x)$, pour tout $(i,x) \in \overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$.

Pour construire la suite de temps d'impulsion, on introduit le temps

$$T^*((i,x),.) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : e^{-\beta t}\rho(i,Y_t^x) = e^{-\beta t} m^*\rho^+(i,Y_t^x)\}. \\ +\infty \qquad \text{si l'ensemble est vide.} \end{cases}$$

Lemme 4.2. *1. T^* est une application mesurable de $(\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega, \mathcal{P}(\overline{U}) \times \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \times \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+})$ telle que pour tout (i,x), $T^*((i,x),.)$ soit un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt.*
2. Celui-ci vérifie pour toute loi ν sur $(\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega, \mathcal{P}(\overline{U}) \times \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \times \mathcal{F})$:

$$e^{-\beta T^*((i,x),.)}\,\rho(i,Y^x_{T^*((i,x),.)}) = e^{-\beta T^*((i,x),.)}\,m^*\rho^+(i,Y^x_{T^*-((i,x),.)}) \quad \nu\ p.s. \tag{39}$$

3. Pour tout (i,x) de C et $T^*((i,x),.) > 0$:

$$\rho^+(i,x) = \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{T^*((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i,Y_s)\,ds + e^{-\beta T^*((i,x),.)} m\rho^+(i,Y_{T^*-(i,.)})\right). \tag{40}$$

4. Pour tout $(i,x) \in I$, $T^*((i,x),.) = 0$.

Preuve
1. Commençons par montrer la mesurabilité de l'application T^*, i.e. montrer

$$\big\{(i,x,\omega) \in \overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega : \quad \{T^*((i,x),\omega) > t\}\big\} \in \mathcal{P}(\overline{U}) \times \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \times \mathcal{F}.$$

Pour tout $(i,x,\omega) \in \overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega$, nous avons

$$\begin{aligned} \{T^*((i,x),\omega) > t\} &= \big\{\forall s \leq t, e^{-\beta s}\,\rho(i,Y_s^x(\omega)) > e^{-\beta s}\,m^*\rho^+(i,Y_s^x(\omega))\big\} \\ &= \bigcap_{s<t, s\in\mathbb{Q}} \big\{e^{-\beta s}\,(\rho - m^*\rho^+)(i,Y_s^x(\omega)) > 0\big\}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité provient du fait que le processus Y^x est continu à droite et on peut donc se contenter des instants rationnels.
Les applications ρ et $m\rho^+$ sont mesurables et le processus Y est $\mathcal{G}$-adapté ce qui entraîne que T^* est une application mesurable sur $(\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega, \mathcal{P}(\overline{U}) \times \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \times \mathcal{F})$.

Il reste à prouver que pour tout (i,x), $T^*((i,x),.)$ est un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt.
Pour tout $(i,x) \in \overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} \{\omega : T^*((i,x),\omega) > t\} &= \left\{\forall s \leq t, e^{-\beta s}\, \rho(i, Y_s^x) > e^{-\beta s}\, m^* \rho^+(i, Y_s^x)\right\} \\ &= \bigcap_{s<t, s\in\mathbb{Q}} \left\{e^{-\beta s}\, \rho(i, Y_s^x) > e^{-\beta s}\, m^* \rho^+(i, Y_s^x)\right\}. \end{aligned}$$

Les applications ρ et $m\rho^+$ sont mesurables et pour (i,x) fixé, le processus Y est continu à droite et aussi $\mathcal{G}$-adapté ce qui implique que $T^*((i,x),.)$ est un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt qui satisfait à l'égalité (39).

2. Le processus Y^x est continu à droite. Par suite, pour toute loi ν sur$(\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega, \mathcal{P}(\overline{U}) \times \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \times \mathcal{F})$:

$$\forall (i,x,.) \in \overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega, \quad \rho(i, Y^x_{T^*((i,x),\omega)}) = m^* \rho^+(i, Y^x_{T^*-((i,x),.)}) \qquad \nu \text{ p.s..}$$

D'où l'égalité (39).

3. Soit (i,x) dans C, $T^*((i,x),.)$ est strictement positif car sinon il existerait ω_0 tel que $T^*((i,x),\omega_0) = 0$. Cela voudrait dire que pour $x = Y_0(\omega_0)$, nous aurions $\rho(i,x) = m^*\rho^+(i,x)$ soit $(i,x) \in I$. Ce qui contredirait $(i,x) \in C$, donc $\forall \omega,\ T^*((i,x),.) > 0$.
Donc $T^*((i,x),.)$ est un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt strictement positif : il appartient à $\underline{R}_{-1}$.
D'où, d'après la proposition 3.23,

$$\rho^+(i,x) \geq \mathbb{E}_{\{i,x\}} \left(\int_0^{T^*((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + e^{-\beta T^*((i,x),.)} m \rho^+(i, Y_{T^*-((i,x),.)}) \right)$$

Pour toute stratégie $\mu \in \underline{D}$ telle que $\tau_0^\mu = T^*((i,x),.)$, nous avons, d'après l'égalité (33) :

$$\rho^+(i,x) \geq \mathbb{E}_{\{i,x\}} \left(\int_0^{T^*((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + W^\mu_{T^*((i,x),.)} \right).$$

Par définition du gain maximal conditionnel, nous avons, pour toute stratégie μ qui démarre avec $\xi_0 = i$ et $\tau_0 = T^*((i,x),.) > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\{i,x\}} \left(\int_0^{T^*((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + W^\mu_{T^*((i,x),.)} \right) &\geq \mathbb{E}_{\{i,x\}}\big(k(\mu) - k_{T^*((i,x),.)}(\mu) \\ &+ \mathbb{E}[k_{T^*((i,x),.)}(\mu) |\ \mathcal{G}_{T^*((i,x),.)}]\big). \end{aligned}$$

L'expression $(k(\mu) - k_{T^*((i,x),.)}(\mu))$ étant $\mathcal{G}_{T^*((i,x),.)}$-mesurable, nous avons

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(k(\mu) - k_{T^*((i,x),.)}(\mu) + \mathbb{E}[k_{T^*((i,x),.)}(\mu) |\, \mathcal{G}_{T^*((i,x),.)}]\right) = \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu)).$$

D'où, pour toute stratégie μ qui démarre avec $\xi_0 = i$ et $\tau_0 = T^*((i,x),.) > 0$, nous avons

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{T^*((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + W^{\mu}_{T^*((i,x),.)}\right) \geq \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu)).$$

Par définition de l'ess sup (cf. [18]), il en suit:

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{T^*((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds + W^{\mu}_{T^*((i,x),.)}\right) \geq ess \sup_{\mu \in \underline{D}, \zeta_1 \neq \emptyset} \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu)) = \rho^+(i,x),$$

d'où l'égalité. Ce qui entraîne (40).

4. Soit $(i,x) \in I$, alors :

$$\rho(i,x) = m^* \rho^+(i,x).$$

Le processus Y étant continu à droite, $T^*((i,x),.) = 0$. ∎

Lemme 4.3. *Pour toute loi ν sur $(\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega, \mathcal{P}(\overline{U}) \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \times \mathcal{F})$, le noyau borélien $r^*_{(i,x)} \in M$ qui réalise le maximum (cf. Proposition 3.21), c'est à dire que pour tout (i,x) de I*

$$m\rho^+(i,x) = m^*\rho^+(i,x) = \int_{\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}} r^*_{(i,x)}(i,x;j,dy)\, \left(-c(i,x,j,y) + \rho^+(j,y)\right) \qquad \nu \ p.s.. \tag{41}$$

Preuve
De la proposition 3.21, nous avons l'égalité $\forall\,(i,x)$

$$m\rho^+(i,x) = \int_{\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}}} r^*_{(i,x)}(i,x;j,dy) \left(-c(i,x;j,y) + \rho^+(j,y)\right).$$

Ensuite, $\forall\,(i,x) \in I$, nous avons $\rho(i,x) = m^*\rho^+(i,x)$. De plus, de la proposition 3.22, nous avons $\rho(i,x) = m\rho^+(i,x)$. D'où

$$\forall (i,x) \in I, \quad m\rho^+(i,x) = m^*\rho^+(i,x).$$

∎

Posons

$$\begin{cases} \widehat{\tau}_0 := \begin{cases} T^*((\xi_0, Y_{\tau_0^-}), \omega) & \text{sur} \quad (\xi_0 \neq \emptyset) \cap (T^*((\xi_0, Y_{\tau_0^-}), \omega) > 0) \\ +\infty & \text{sur} \quad (\xi_0 \neq \emptyset) \cap (T^*((\xi_0, Y_{\tau_0^-}), \omega) = 0) \\ 0 & \text{sur} \quad (\xi_0 = \emptyset), \end{cases} \\ r^*_{(i,x)}(\xi_0, Y_{\tau_0^-}, \zeta_1, Y_{\tau_0}) \ \text{ est la loi de passage sur } \mathcal{G}_{\widehat{\tau}_0} \text{ du couple } (\xi_0, Y_{\tau_0^-}) \text{ au couple } (\zeta_1, Y_{\tau_0}), \end{cases}$$

puis par récurrence pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{cases} \widehat{\tau}_n = \widehat{\tau}_{n-1} + T^*((\zeta_n, Y_{\tau_{n-1}}), .), \\ r^*_{(i,x)}(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}, \zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}) \text{ est la loi de passage sur } \mathcal{G}_{\widehat{\tau}_n} \text{ du couple } (\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}) \text{ au couple } (\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}). \end{cases}$$

Par suite,

$$\widehat{\Delta}_n := \begin{cases} r^*(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}; ., .) & \text{sur} \quad (\zeta_{n+1} \neq \emptyset) \cap (0 < T^*((\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}), \omega) < +\infty) \\ \delta_{\{\emptyset, \Delta\}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

est $\mathcal{G}_{\widehat{\tau}_n}$-mesurable.

Théorème 4.4. *La famille*

$$\widehat{\alpha} = (\widehat{\tau}_n, \zeta_{n+1}, \widehat{\Delta}_n)$$

est une stratégie admissible qui réalise l'optimalité conditionnelle.
Si de plus la fonction c vérifie $c(i, x; j, y) \geq l > 0$ lorsque $(i, x) \neq (j, y)$ cette stratégie vérifie de plus la propriété

$$\mathbb{P}(\tau_n^\alpha < \tau^\alpha < +\infty, \ \forall n) = 0. \tag{42}$$

Preuve
1. Si $(i, x) \in I$, alors $T^*((i, x), .) = 0$, alors $\xi_0 = i$, $\tau_0^{\widehat{\alpha}} = T^*((i, x), .) = 0$ et $r^{\widehat{\alpha}} = \delta_{(i,x)}$.
Ainsi la stratégie $\widehat{\alpha}$ constitue un contrôle impulsionnel.
Ensuite, nous somme ramenés à établir que la stratégie $\widehat{\alpha}$ satisfait les égalités (36), (37) et (38) du théorème 3.24.
L'égalité (36) s'obtient immédiatement du fait que $\tau_0^{\widehat{\alpha}} = T^*((i, x), .) = 0$.

Puis, l'égalité (41) prise au point $(i, x) = (\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}) \in I$ implique:

$$\begin{aligned} m\rho^+(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}) &= m^*\rho^+(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}) \\ &= \int_{\overline{U} \times \mathbb{R}} r^*_{(i,x)}(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}, \zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}) \left(-c(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}, \zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}) + \rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n})\right), \end{aligned}$$

où $r^* = r^{\widehat{\alpha}} = \delta_{(i,x)}$. Et donc l'égalité (37) est vérifiée.

Enfin, sur l'événement $\{(\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}) \in I\}$, l'égalité (38) est tirée de l'égalité (40) appliquée au point $(i, x) = (\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n})$ en remarquant que $\widehat{\tau}_{n+1} = \widehat{\tau}_n$ et $Y_{\widehat{\tau}_{n+1}^-} = Y_{\widehat{\tau}_n}$ et que

$$m\rho^+((\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n})) \geq \rho^+((\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n})) \geq m\rho^+((\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n})).$$

Les égalités (36), (37) et (38) étant satisfaites, la stratégie $\widehat{\alpha}$ est optimale pour tout $(i, x) \in I$.

2. Soit $(i, x) \in C$. Commençons par montrer que la famille $\widehat{\alpha}$ constitue un contrôle impulsionnel c'est à dire qu'elle vérifie les propriétés de la définition 2.5.

$T^*((i,x),.)$ est un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt appartenant à l'ensemble $\underline{R}_{-1}$. Soit la stratégie $\widehat{\alpha}$ qui démarre avec la technologie $\xi_0 = i$ et $\tau_0^{\widehat{\alpha}} = T^*((i,x),.) > 0$ puisque $(i,x) \in C$. Grâce à l'expression de récurrence de définition , nous avons, pour $(\zeta_n, Y_{\tau_{n-1}}) \in C$:

$$\widehat{\tau}_n - \widehat{\tau}_{n-1} = T^*((\zeta_n, Y_{\tau_{n-1}}),.) > 0.$$

Par suite, $(\widehat{\tau}_n)$ est une suite strictement croissante de $\mathcal{G}$-temps d'arrêt sur l'ensemble $\bigcap_n \{(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \in C\}$. Tandis que sur l'ensemble $\bigcup_{n(\omega)} \{(\zeta_{n(\omega)}, Y_{\tau^-_{n(\omega)}}) \in I\}$, il existe un rang $n(\omega)$ à parir du quel cette suite est constante.
De plus, au point $(\zeta_n, Y_{\tau_{n-1}})$, nous avons:

$$\tau_0(\phi_{\tau_{n-1}}) = T^*((\zeta_n, Y_{\tau_{n-1}}),.) = T^*((i,x) \circ \phi_{\tau_{n-1}},.).$$

Ainsi, de la relation de récurrence, nous avons:

$$\widehat{\tau}_n - \widehat{\tau}_{n-1} = T^*((i,x),.) \circ \phi_{\tau_{n-1}},$$

et $\widehat{\tau}_n$ vérifie l'expression (1).
Ensuite, $r^*(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}, .,.)$ est la loi de passage du couple $(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-})$ au couple $(\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n})$ qui est $\mathcal{G}_{\widehat{\tau}_n}$-mesurable. Ainsi, par construction de la famille $\widehat{\alpha}$, nous voyons que c'est un contrôle impulsionnel.

3. Ensuite, du théorème 3.24, nous sommes ramenés à établir que la stratégie $\widehat{\alpha}$ satisfait les égalités (36), (37) et (38).
D'une part, comme $(i,x) \in C$, l'égalité (36) est exactement l'égalité (40) appliquée au temps $\widehat{\tau}_0 = T^*((i,x),.) > 0$.
D'autre part, l'égalité (41) prise au point $(i,x) = (\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}) \in I$ implique

$$m\rho^+(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}) = \int_{\overline{U}\times\mathbb{R}} r^*_{(i,x)}(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}; j, dy) \left(-c(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}, j, y) + \rho^+(j,y)\right).$$

D'où l'égalité (37) est obtenue sur I.
En remarquant que sur l'événement $\{(\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}) \in C\}$, nous avons $\widehat{\tau}_n = \widehat{\tau}_{n+1}$, $Y_{\widehat{\tau}_n^-} = Y_{\widehat{\tau}_n}$, l'égalité (37) a lieu aussi sur cet événement.

4. Ensuite, sur l'événement $\{(\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}) \in C\}$, l'égalité (40) appliquée au point $(i,x) = (\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n})$ entraîne:

$$\begin{aligned}\rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}) &= \mathbb{E}_{\{\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}\}}\Big(\int_0^{T^*((\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}),.)} e^{-\beta s} f(\zeta_{n+1}, Y_s)\, ds \\ &\quad + e^{-\beta T^*((\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}),.)} m\rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{T^*((\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}),.)^-})\Big).\end{aligned}$$

De la relation de récurrence, nous avons

$$T^*((\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}),.) = \widehat{\tau}_{n+1} - \widehat{\tau}_n$$

D'où l'égalité (38) est vérifiée. Si $(\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}) \in I$, nous sommes ramenés à 1.
Les égalités (36), (37) et (38) étant satisfaites, la stratégie $\widehat{\alpha}$ est optimale.

5. Il reste donc à établir que la stratégie $\widehat{\alpha}$ vérifie l'expression (42).
Sur les ensembles $\bigcup_n \big((\zeta_{n+1} \neq \emptyset) \cap (T^*(\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n^-}) = 0)\big)$ et $\cup_n(\zeta_{n+1} = \emptyset)$, il existe n tel que $\widehat{\tau}_k = \widehat{\tau}$, $\forall\, k \geq n$.
Sinon, sur l'ensemble complémentaire de la réunion des précédents, soit $\bigcap_n ((\zeta_{n+1} \neq \emptyset) \cap \big(T^*(\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n^-}) > 0)\big)$, nous avons, pour la stratégie $\widehat{\alpha}$, $\forall n$:

$$\begin{aligned} \rho(i,x) &= \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(k(\widehat{\alpha})\right) \\ &= \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(-\sum_{0\leq k\leq n} e^{-\beta\widehat{\tau}_k^{\widehat{\alpha}}} c(\zeta_k, Y_{\widehat{\tau}_k^-}, \zeta_{k+1}, Y_{\widehat{\tau}_k}) + \int_0^{\widehat{\tau}_n} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds + k_{\widehat{\tau}_n^+}(\widehat{\alpha})\right). \end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\sum_{0\leq k\leq n} e^{-\beta\widehat{\tau}_k^{\widehat{\alpha}}} c(\zeta_k, Y_{\widehat{\tau}_k^-}, \zeta_{k+1}, Y_{\widehat{\tau}_k})\right) &\leq \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds + k_{\widehat{\tau}_n^+}(\widehat{\alpha})\right) - \rho(i,x) \\ &= A. \end{aligned}$$

Puisque l' application f est bornée et $k_{\tau_n^+}(\alpha)$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini, A est fini.
D'autre part, en utilisant l'inégalité $c(i,x,j,y) \geq l > 0$ et le fait que $(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}) \neq (\zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n})$, nous avons:

$$c(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}, \zeta_{n+1}, Y_{\widehat{\tau}_n}) \geq l > 0.$$

Par suite,

$$(n+1)\, l\, \mathbb{E}_{\{i,x\}}(e^{-\beta\widehat{\tau}_n}) \leq \mathbb{E}_{\{i,x\}}\left(\sum_{0\leq k\leq n} e^{-\beta\widehat{\tau}_k} c(\zeta_k, Y_{\widehat{\tau}_k^-}, \zeta_{k+1}, Y_{\widehat{\tau}_k})\right) \leq A.$$

D'où,

$$\mathbb{E}_{\{i,x\}}(e^{-\beta\widehat{\tau}_n}) \leq \frac{C}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Ce qui signifie

$$\tau_n \longrightarrow_{n\to\infty} \tau = +\infty \quad p.s..$$

Ce qui entraîne la propriété attendue. ■

References

[1] **T. Arnarson, B. Djehiche, M. Poghosyan and H. Shahgholian:** *A PDE Approach to Regularity of Solutions to Finite Horizon Optimal Switching Problems*. Nonlinear Analysis. 2009.

[2] **S. Bahlali, B. Djehiche and B. Mezerdi:** *The Relaxed Stochastic Maximum Principle in Singular Optimal Control of Diffusions*. SIAM J. Control Optim. Volume 46, No. 2, pp. 427-444, 2007.

[3] **Ph. Barbe et M. Ledoux:** *Probabilités* . Collection mathématiques, éditions Bellin, Paris, 1998

[4] **M. Bardi et I.C. Dolcetta:** *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Collection méthodes mathématiques de l'informatique.

[5] **A. Bensoussan et J.L. Lions:** *Contrôle Impulsionnel et Inéquations quasi-variationnelles*. Dunod, Paris, 1982

[6] **P. Billingsley:** *Convergence of Probability Measures*. John Willey and sons, USA, 1968.

[7] **M.H.A. Davis:** *Markov Models and Optimization*. Chapman et Hall,1993.

[8] **B. Djehiche, S. Hamadène and A. Popier:** *A Finite Horizon Optimal Multiple Switching Problem*. SIAM J. Control Optim. Volume 48, Issue 4, pp. 2751-2770, 2009.

[9] **C. Dellacherie et P.A. Meyer:** *Probabilités et Potentiel*. Chapitre I à IV, Hermann, 1975.

[10] **N. El Karoui:** *Les Aspects Probabilistes du Contrôle Stochastique*. Lecture Notes in Mathematics 876, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[11] **M. Jeanblanc and S. Hamadène:** *On the Starting and Stopping Problem: Application in Reversible Investments*. Mathematics of Operations Research, vol.32, No.1, pp.182-192. 2007.

[12] **P.A. Lepeltier et B. Marchal:** *Théorie Générale du Contrôle Impulsionnel Markovien*. SIAM J.Control and optimization, Vol.22, No.4, 1984.

[13] **P.A. Lepeltier et B. Marchal:** *Théorie Générale du Contrôle Impulsionnel*. Thèse d'état.

[14] **P.A. Lepeltier et B. Marchal:** *Techniques Probabilistes dans le Contrôle Impulsionnel*. Stochastics, Vol.2, pp. 243-286, 1979.

[15] **G. Mazziotto et J. Szpirglas:** *Un Théorème de Séparation pour le Contrôle Impulsionnel en Information Incomplète*. C.R. Acad.Sc. t.290, p. 769-772, Paris, 1980.

[16] **P.A. Meyer:** *Renaissance, Recollements, Mélanges, Ralentissement de Processus de Markov*. Ann.Inst., Fourier Grenoble, XXV 3-4,p. 464-495, 1975.

[17] **P.A. Meyer:** *Réduites et Jeux de Hasard*. Séminaire probabilités VII, lecture notes in Mathematics, vol 321,p. 155-171, 1973.

[18] **J. Neveu:** *Martingales à temps discret*. Masson et Cie, Paris, 1972.

[19] **J. Neveu:** *Bases Mathématiques du Calcul de Probabilités*. Masson et Cie, 1970.

[20] **T. Parthasarathy:** *Selections Theorems and their Applications*. Lecture notes in Mathematics, vol 263, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[21] **H. Pham:** *Optimisation et Contrôle Stochstique Appliqués à la Finance*. Springer, 2000.

[22] **H. Pham, M. Mnif et V. Vath:** *A Model of Optimal Portfolio Selection under Liquidity Risk and Price Impact*. Finance and Stochastics, Vol.11, No.1, January 2007, p. 51-90.

[23] **M. Robin:** *Contrôle Impulsionnel des Processus de Markov*. Thèse, Paris IX, 1978.