分形几何与分形花形的迭代函数系统方法

柯福军　张方强
(浙江大学电气工程学院,杭州,310027)

摘　要:介绍分形几何生成计算机图形的基本方法,在阐述迭代函数系统 IFS 方法生成分形图形原理的基础上,讨论分形图形算法的实现方法、参数 C 对分形图形的影响及分形理论在纺织品花形设计中的应用。

关键词:分形　分形图形　分形花形　迭代函数　花形设计
中图法分类号:TS 105.11　　文献标识码:A

法国数学家 Mandelbrot 于 20 世纪 70 年代创立的分形几何学,以独特的方法解决整体和部分的关系,以分数维为基础,利用空间结构的对称性、自相似性以及各种真实图像的仿真模型,产生各种细节呈现无穷回归性、色彩丰富、具有奇妙艺术创意的图像。这一被认为是大自然的几何学的分形几何既可以用来描述那些不规则而欧氏几何又无法描述的几何现象和物体[1],又可以创造出很多欧氏几何无法描述的美妙新颖的图像,开始成为纺织品花形设计的一种新手段。

利用传统的 CAD 技术设计花形时,依据欧氏几何和微分几何生成图像的技术,不足以用来逼真地描绘变化万千的自然界,因为传统的基于点、线、弧的几何模型没有反映客观世界所固有的自相似性和无限可分性的特点,而这一点恰好属于分形几何的范畴。

1　利用迭代函数系统 IFS 方法生成图形

IFS(迭代函数系统)[2]的基本出发点是:在仿射变换下,分形集的整体与局部、局部与局部具有自相似结构,从而选定若干个把整体压缩到局部、局部变换到局部的仿射变换进行随机迭代,得到各种各样的分形集。

例如,Julia 集[3]由一个二次复变函数迭代生成,来自非线性映射 $X \rightarrow X^2 + C$。在复平面上,可以表示为:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C (n = 0,1,2,\cdots)$$

式中 Z 和 C 为复数。

对于上述的复迭代过程,分离 Z 及 C 的实部和虚部,记为:

$$Z = x + iy, C = p + iq$$

相应地,第 k 个点 z_k 意味着平面上的点(x_k,y_k),从 z_k 到 z_{k+1} 的迭代过程为:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + p \\ y_{k+1} = 2x_k y_k + q \end{cases} \quad (1)$$

Julia 集是将 C 值固定,即 p 和 q 保持为常数,让 z 作为原始点通过迭代而生成新的 z。以此循环,每选定一个 C 值,就可以在复平面上生成一幅新的计算机图形。其生成算法步骤如下:

第一,固定参数 C,即 p 和 q 的值,选定 x_{min},x_{max},y_{min},y_{max} 和图像显示区域的长 a、宽 b 及最大迭代步数 N,并选定一个用以判断是否趋于无穷的较大的实数 M。

第二,令 $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/(a-1)$,$\Delta y = (y_{max} - y_{min})/(b-1)$,对显示区域内的所有点,按序执行下面的循环操作。

第三,令 $x_0 = x_{min} + \Delta x * x$,$y_0 = y_{min} + \Delta y * y$,循环步数 k 赋初值 0。

第四,由迭代公式(1)从(x_k,y_k)计算出(x_{k+1},y_{k+1}),并令 $k = k+1$。

第五,计算当前点的模 $r = x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2$,判断是否超过预设的值 M,如果 $r > M$,则该点经过迭代后发散,即趋向于无穷定常吸引子;此时根据 k 值将该点以一定的颜色显示在屏幕上,并退出本次循环,进入下一个点的循环迭代;如果 $r \leqslant M$,且 $k < N$,则返回第四步骤,继续进行本次循环;如果 $r \leqslant M$,且 $k = N$,则选择某一特定的颜色,将该点显示在屏幕上,并结束本次循环,进入下一点的循环迭代。

高阶 Julia 分形图形的绘制算法原理同上,只需根据选定的阶数将迭代公式做相应的改变。

2　基于分形理论的纺织品花形设计

将迭代函数系统产生的图形应用到纺织品花形设计中产生分形花形,关键要解决两个问题。第一是颜色聚类问题。计算机生成的图形可以达到真彩色的水平,而纺织品的花形图案中只有有限的几种

颜色。第二个问题是基于迭代函数系统生成的图形与参数的选择有关,具有很大的随机性,因而必须找到参数的选择与产生的图形形状的对应关系。否则,利用分形几何设计的花形就是毫无规律的“涂鸦”,得不到预想的花形图案。

关于颜色聚类问题,可以利用一种简单的算法来解决。如花形需要 5 种颜色,则可以将 1 ~ 5 号色分别假设为红、绿、蓝、白和黑色,将第一步骤中最大执行步数 N 五等分,若实际执行步数 k 落在某一区间就取相应的某一号色,则将实际迭代计算的结果显示出来就可得到一幅颜色数不超过 5 的彩色图案。

图形形状的控制问题中指出如果复数 C 是实轴对称,则生成的图形为虚轴对称。

即:设 $C_1 = p + qi$, $C_1' = p - qi$。对于 C_1,若点 (x_0, y_0) 是混沌吸引子,则对于 C_1',点 (x_0', y_0') 也一定是混沌吸引子。其中, $x_0' = -x_0$, $y_0' = y_0$。

证明:对于 C_1,由混沌吸引子的定义可知,点 (x_0, y_0) 经过一定次数的迭代后,其模值趋于一个常数。根据迭代公式(1),有:

$$x_1 = x_0^2 - y_0^2 + p,\quad y_1 = 2x_0 y_0 + q$$

而对于 C_1',有:

$$x_1' = x_0'^2 - y_0'^2 + p,\quad y_1' = 2x_0' y_0' + q$$

因为 $x_0' = -x_0$, $y_0' = y_0$,所以 $x_1' = x_1$, $y_1' = -y_1$;将所得的结果代入,进行第二次迭代可得: $x_2' = x_1$, $y_2' = -y_2$;类推可得: $x_k' = x_k$, $y_k' = -y_k$。

即不管经过多少次迭代,它们的模是相等的,也就是说具有相同的收敛性。所以,对于 C_1,若点 (x_0, y_0) 是混沌吸引子,则对于 C_1',点 (x_0', y_0') 也是混沌吸引子。反之,同样可以证明如果 (x_0, y_0) 是定常吸引子,则点 (x_0', y_0') 也是定常吸引子。

根据上述算法,若对于 C_1,点 (x_0, y_0) 在屏幕上显示,则对于 C_1',点 (x_0', y_0') 也在屏幕上显示,反之也成立,所以结论成立。

这一结论亦可从下述实验取得。以实轴为对称轴选取一组 C 值,用 delphi 编程方法可得图 1 的分形图。

显而易见,这种使用迭代函数系统方法生成的图形,当复数 C 以实轴为对称轴时关于虚轴对称。另外,参数 C 的选择也有一定的规律可循:只有在一定的范围内,才能得到相应的分形图。

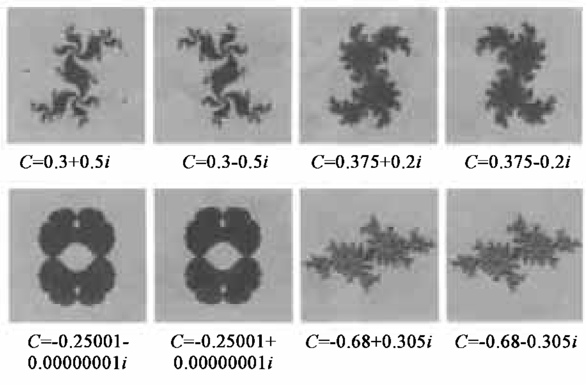

图 1　用 delphi 编程方法得到的分形图

以下是经过大量试验得出的关于参数 C 的取值范围:

$q = 0.0$, $p \in [-2.00, 0.251]$;

$q = 0.1$, $p \in [-1.233, 0.366]$;

$q = 0.2$, $p \in [-0.725, 0.378]$;

$q = 0.3$, $p \in [-0.685, 0.368]$;

$q = 0.4$, $p \in [-0.621, 0.328]$;

$q = 0.5$, $p \in [-0.530, 0.314]$;

$q = 0.6$, $p \in [-0.520, 0.135]$;

$q = 0.7$, $p \in [-0.214, -0.04]$;

$q = 0.8$, $p \in [-0.221, -0.047]$。

显然,对应 q 的上述各值,则 p 在相应范围内取值时都可以得到分形图;而当 $q = 0.9$ 时, p 不管在什么范围内取值都得不到分形图。

如上所述,当 q 增加时, p 取值的区间长度大体上是缩小的。还可以证明,随着 q 的增加,区间基本上是嵌套缩小的。此外花形的变化也不是毫无规律,而具有一定的变化趋势。

3　结束语

利用分形几何的自相似、结构精细、复杂和可迭代的特点,结合传统纺织品花形设计方法,可以快速生成各种精美的、令人叹为观止的分形图形,从而满足人们对纺织品图案个性化及多样性的要求。

参　考　文　献

1　东　旭. 分形及其计算机生成. 北京:科学出版社, 1996:53 ~ 75.

2　王东生等. 混沌、分形及其应用. 合肥:中国科学技术大学出版社, 1995:193 ~ 214.

3　Mandelbrot B. B.. The Fractal Geometry of Nature. San Fransisco: Freeman W. H, 1982:1 ~ 12.