

二维热传导方程有限差分区域分解算法^{*1)}

吕桂霞

(北京应用物理与计算数学研究所计算物理实验室 北京 100088)

马富明

(吉林大学数学科学学院 长春 130012)

摘 要

本文讨论了一类数值求解二维热传导方程的并行差分格式. 在这个算法中, 通过引进内界点将求解区域分裂成若干子区域. 在子区域内界点上采用非对称格式计算, 一旦这些点的值被计算出来, 各子区域间的计算可完全并行. 本文得到了稳定性条件和最大模误差估计. 它表明我们的格式有令人满意的稳定性, 并且有着较高的收敛阶.

关键词: 二维热传导方程, 有限差分, 并行计算, 区域分解

FINITE DIFFERENCE DOMAIN DECOMPOSITION ALGORITHM FOR THE TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION

Lü Guixia

(Laboratory of Computational Physics, IAPCM, Beijing 100088)

Ma Fuming

(Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012)

Abstract

In this paper, a parallel finite difference scheme for numerically solving the two-dimensional heat equation is studied. In this procedure, the domain over which the problem is defined is divided into subdomains by introducing interface points. Interface values between subdomains are found by asymmetric schemes, once these values are calculated, subdomain problems can be solved in parallel. Stability conditions and maximum norm error estimates for these procedures are derived, which demonstrate that our schemes have satisfactory stability and higher convergence order.

Key words: Two-dimensional heat equation, finite difference, parallel computing, domain decomposition

* 2005 年 2 月 28 日收到.

1) 国家重点基础研究专项经费 (G1999032802), 国家自然科学基金 (标准号:10076006, 10431050), 中国工程物理研究院基金 (2003Z0603), 计算物理实验室基金 (51479020105ZW0902).

§1. 引言

对于大型科学与工程计算问题, 并行计算是必需的. 构造高效率的数值并行方法一直是人们关心的问题, 并且已有了大量的研究^[1-6]. 文献 [1] 研究了热传导方程的有限差分区域分解算法, 其方法是将求解区域分解成若干子区域. 在子区域间的内界点上, 使用古典显格式求解, 其空间差分步长为 H , 在每个子区域内使用隐格式求解, 空间差分步长为 h , 并且 H 为 h 的整数倍. 文 [1] 给出的稳定性条件为 $\Delta t \leq H^2/2$, 误差为 $O(\Delta t + h^2 + H^3)$. 文献 [4] 和 [5] 使用了与 [1] 相同的思想, 在内界点处分别采用大步长的 Saul'yev 非对称格式的不同组合方式, 得到了相同的稳定性条件 $\Delta t \leq H^2$, 误差 $O(\Delta t + h^2 + H^3)$. 本文针对二维热传导方程给出一类区域分解算法, 该算法考虑两个空间方向同时分裂的情形, 在内边界点处沿一个空间方向使用非对称格式, 沿另一个空间方向采用隐式计算. 分析表明, 本文所给格式的稳定性条件容许时间步长至少取为 [1] 中时间步长的两倍, 误差在最大模意义下为 $O(\Delta t + h^2 + H^3)$.

令 $u(x, y, t)$ 是如下热传导方程初边值问题的解:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad (x, y) \in \Omega, t \in (0, T], \quad (1.1)$$

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, t \in (0, T), \quad (1.3)$$

其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界.

对正整数 N , 令 $h = 1/N$, 取 $x_i = ih$, $y_j = jh$, $i, j = 0, 1, \dots, N$. 假设存在正整数 k_1 和 k_2 满足 $\bar{x}_1 = x_{k_1} > 0$, $\bar{x}_2 = x_{k_2} > \bar{x}_1$, $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = H = Lh$ (其中 L 为某一正整数), $\bar{y}_1 = y_{k_1} > 0$, $\bar{y}_2 = y_{k_2} > \bar{y}_1$, $\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = H = Lh$, 其中 H 不超过 $\min\{\bar{x}_1, 1 - \bar{x}_2, \bar{y}_1, 1 - \bar{y}_2\}$. 取 $\Delta t = T/M$, M 是一个正整数, 令 $t^n = n\Delta t$. 对于一个定义在网点 (x_i, y_j, t^n) 上的函数 $f(x, y, t)$, 令 $f_{i,j}^n = f(x_i, y_j, t^n)$. 定义差分算子如下:

$$\partial_{t,\Delta t} f(x, y, t) = \frac{f(x, y, t) - f(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t},$$

$$\partial_{x,H} f(x, y, t) = \frac{f(x, y, t) - f(x - H, y, t)}{H},$$

$$\partial_{y,H} f(x, y, t) = \frac{f(x, y, t) - f(x, y - H, t)}{H},$$

$$\partial_{x,h}^2 f(x, y, t) = \frac{f(x+h, y, t) - 2f(x, y, t) + f(x-h, y, t)}{h^2},$$

$$\partial_{y,h}^2 f(x, y, t) = \frac{f(x, y+h, t) - 2f(x, y, t) + f(x, y-h, t)}{h^2}.$$

如果 $(x_i, y_j) \in \partial\Omega$ 或 $n = 0$, 称 (x_i, y_j, t^n) 为边界点. 如果 $x_i = \bar{x}_1$ 或 \bar{x}_2 , 或者 $y_j = \bar{y}_1$ 或 \bar{y}_2 且 $n > 0$, 称 (x_i, y_j, t^n) 为内界点, 否则, 称之为内点.

设 $u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t^n)$, 定义问题 (1.1)-(1.3) 的近似解为网格函数 $U = \{U_{i,j}^n\}$. 文献 [1] 中的算法为:

算法 1.

$$\begin{aligned}
 U_{i,j}^n &= u_{i,j}^n, && \text{于边界点,} \\
 \partial_{t,\Delta t} U_{i,j}^n - \partial_{x,H}^2 U_{i,j}^{n-1} - \partial_{y,h}^2 U_{i,j}^n &= 0, && \text{于内界点 } \bar{x} = x_k, \\
 \partial_{t,\Delta t} U_{i,j}^n - \partial_{x,h}^2 U_{i,j}^n - \partial_{y,H}^2 U_{i,j}^n &= 0, && \text{于内点.}
 \end{aligned}$$

在时间层 $t = t^{n-1}$ 到 $t = t^n$ 的计算中, 首先沿内边界求解一个三对角方程组得到 U 在内界点处的值, 从而将区域 Ω 分裂为两个子区域, 此后在两个子区域上的计算化为彼此独立的隐式计算. 算法 1 中差分解的先验误差估计为:

定理 1.1^[1]. 设 $\Delta t \leq H^2/2$, 则求解问题 (1.1)-(1.3) 的区域分解算法1给出的近似解满足

$$\max_{i,j,n} |u(x_i, y_j, t^n) - U_{i,j}^n| \leq \frac{1}{8} C_0 [\Delta t + h^2 + 2H(2\Delta t + H^2)],$$

其中

$$C_0 = \sup_{(x,y,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]} \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right|, \frac{1}{12} \left(\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| + \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right) \right\}.$$

文献 [6] 中的算法为:

算法 2.

$$\begin{aligned}
 U_{i,j}^n &= u_{i,j}^n, && \text{于边界点,} \\
 \partial_{t,\Delta t} U_{i,j}^n - \partial_{x,H}^2 U_{i,j}^{n-1} - \partial_{y,H}^2 U_{i,j}^{n-1} &= 0, && \text{于内界点 } (x_k, y_j, t^n) = (\bar{x}, y_j, t^n), \\
 &&& (x_i, y_k, t^n) = (x_i, \bar{y}, t^n), \quad L \leq i \leq N-L, L \leq j \leq N-L, \\
 \partial_{t,\Delta t} U_{i,j}^n - \partial_{x,H}^2 U_{i,j}^{n-1} - \partial_{y,h}^2 U_{i,j}^n &= 0, && \text{于内界点 } (x_k, y_j, t^n) = (\bar{x}, y_j, t^n), \\
 &&& 0 < j < L, N-L < j < N, \\
 \partial_{t,\Delta t} U_{i,j}^n - \partial_{x,h}^2 U_{i,j}^n - \partial_{y,H}^2 U_{i,j}^{n-1} &= 0, && \text{于内界点 } (x_i, y_k, t^n) = (x_i, \bar{y}, t^n), \\
 &&& 0 < i < L, N-L < i < N, \\
 \partial_{t,\Delta t} U_{i,j}^n - \partial_{x,h}^2 U_{i,j}^n - \partial_{y,h}^2 U_{i,j}^n &= 0, && \text{于内点.}
 \end{aligned}$$

在时间层 $t = t^{n-1}$ 到 $t = t^n$ 的计算中, 首先沿内边界 $x = \bar{x}, y = \bar{y}$ 显式求得函数值 $U_{k,j}^n (L \leq j \leq N-L)$ 和 $U_{i,k}^n (L \leq i \leq N-L)$. 然后可并行求解四个含 $L-1$ 个未知量的三对角方程组得到函数值 $U_{k,j}^n (0 < j < L, N-L < j < N)$ 和 $U_{i,k}^n (0 < i < L, N-L < i < N)$. 此后, 四个子区域上的计算化为彼此独立的隐式计算. 算法 2 中差分解的先验误差估计为:

定理 1.2^[6]. 设 $\Delta t \leq H^2/4$, 则求解问题 (1.1)-(1.3) 的区域分解算法2给出的近似解满足

$$\max_{i,j,n} |u(x_i, y_j, t^n) - U_{i,j}^n| \leq \frac{1}{8} C_0 [\Delta t + h^2 + 4H(2\Delta t + H^2)],$$

其中

$$C_0 = \sup_{(x,y,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]} \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} \right|, \frac{1}{12} \left(\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| + \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right) \right\}.$$

下面给出本文的算法以及理论分析和数值实验的结果.

§2. 差分格式

算法 3.

$$U_{i,j}^n = u_{i,j}^n, \quad \text{于边界点,} \quad (2.1)$$

$$\partial_{t,\Delta t} U_{k_1,j}^n - \frac{1}{H} (\partial_{x,H} U_{k_2,j}^n - \partial_{x,H} U_{k_1,j}^{n-1}) - \partial_{y,h}^2 U_{k_1,j}^n = 0, \quad \text{于内界点 } \bar{x}_1, \quad (2.2)$$

$$\partial_{t,\Delta t} U_{k_2,j}^n - \frac{1}{H} (\partial_{x,H} U_{k_2+L,j}^{n-1} - \partial_{x,H} U_{k_2,j}^n) - \partial_{y,h}^2 U_{k_2,j}^n = 0, \quad \text{于内界点 } \bar{x}_2, \quad (2.3)$$

$$\partial_{t,\Delta t} U_{i,k_1}^n - \partial_{x,h}^2 U_{i,k_1}^n - \frac{1}{H} (\partial_{y,H} U_{i,k_2}^n - \partial_{y,H} U_{i,k_1}^{n-1}) = 0, \quad \text{于内界点 } \bar{y}_1, \quad (2.4)$$

$$\partial_{t,\Delta t} U_{i,k_2}^n - \partial_{x,h}^2 U_{i,k_2}^n - \frac{1}{H} (\partial_{y,H} U_{i,k_2+L}^{n-1} - \partial_{y,H} U_{i,k_2}^n) = 0, \quad \text{于内界点 } \bar{y}_2, \quad (2.5)$$

$$\partial_{t,\Delta t} U_{i,j}^n - \partial_{x,h}^2 U_{i,j}^n - \partial_{y,h}^2 U_{i,j}^n = 0, \quad \text{于内点.} \quad (2.6)$$

已知 $t = t^{n-1}$ 层的 U 值, 计算 $t = t^n$ 的解 U 时, 先联立 (2.2), (2.3) 和 (2.4), (2.5) 解出沿内边界处的值. 具体地, 若设 $R = \Delta t / H^2$, $r = \Delta t / h^2$, $\mathbf{U}_{k_i}^n = (U_{k_i,1}^n, \dots, U_{k_i,N-1}^n)^T$, $i = 1, 2$, 则 (2.2) 和 (2.3) 联立的向量形式为

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{k_1}^n \\ \mathbf{U}_{k_2}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{n-1} \\ f_2^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

其中 f_1^{n-1} 和 f_2^{n-1} 分别为 (2.2) 和 (2.3) 中与 $n-1$ 时间层及边界条件有关的 $N-1$ 阶列向量,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -RI \\ -RI & A_1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 + R + 2r & -r & & & & & \\ -r & 1 + R + 2r & -r & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -r & 1 + R + 2r & -r & \\ & & & -r & & 1 + R + 2r & \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

I 为 $N-1$ 阶单位阵. 注意到 $R \neq 0$, A_1 是严格对角占优矩阵, 从而可逆, 用块消元法可得与 (2.7) 等价的方程组 (O 为 $N-1$ 阶零方阵), 为此只需在 (2.7) 等式的两边同时左乘矩阵 B ,

$$B = \begin{bmatrix} I & O \\ RI & A_1 \end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix} A_1 & -RI \\ O & A_1^2 - R^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{k_1}^n \\ \mathbf{U}_{k_2}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{n-1} \\ Rf_1^{n-1} + A_1 f_2^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

易见 (2.8) 可化成两个方程组求解, 即

$$A_1 U_{k_1}^n - R U_{k_2}^n = f_1^{n-1}, \quad (2.9)$$

和

$$(A_1^2 - R^2 I) U_{k_2}^n = R f_1^{n-1} + A_1 f_2^{n-1}. \quad (2.10)$$

由 (2.10) 即可解出 $U_{k_2}^n$, 为此将 (2.10) 化为

$$(A_1 + R I)(A_1 - R I) U_{k_2}^n = R f_1^{n-1} + A_1 f_2^{n-1}. \quad (2.11)$$

由于 (2.11) 的系数矩阵是两个三对角矩阵之积, 故求解两个三对角方程组即可解出 $U_{k_2}^n$, 然后再由 (2.9) 式解出 $U_{k_1}^n$, 这只需再求解一个三对角方程组. 在上述求解过程的同时, 可以并行求解沿内边界 (x_i, \bar{y}_1, t^n) 和 (x_i, \bar{y}_2, t^n) 的值, 为此只需联立 (2.4) 和 (2.5) (其中有两组 $U_{k_1, k_1}^n, U_{k_1, k_2}^n, U_{k_2, k_1}^n, U_{k_2, k_2}^n$ 值, 可任选其一). 以上在内界点的计算量远远小于在子区域上求解 (2.6) 的计算量. 此后, 可在 9 个子区域上并行求解其余内点的值. 具体区域划分见下图:

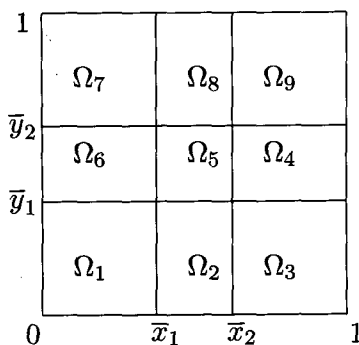


图 1

§3. 格式的稳定性与近似解的收敛性

本节讨论由 (2.1)-(2.6) 给出的差分格式的稳定性条件及近似解的收敛性. 我们首先做下面的准备.

定义 3.1^[7]. 设 $A = (a_{ij})_{m \times m}$, $u = (u_k)_{m \times 1}$, 若所有 $u_k \geq 0$, 则记 $u \geq 0$; 若 $Au \geq 0$ 蕴涵了 $u \geq 0$, 则称 A 是单调阵.

定义 3.2^[7]. 所谓正型矩阵 A 是指满足下列条件的矩阵:

- (i) 非负性, 即对一切 l , $a_{ll} > 0$, 而当 $l \neq j$ 时, $a_{lj} \leq 0$.
- (ii) 对角线占优势, 即对一切 l ,

$$d_l = \frac{a_{ll}}{\sum_{j=1, \dots, N, j \neq l} a_{lj}} \leq 1,$$

并且集合 $R(A) = \{l | d_l < 1\}$ 非空.

(iii)不可约性, 即对任意 $l_1 \in R(A)$, 一定存在 $l_2 \in R(A)$, 使得

$$a_{l_1 j_1} a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_q l_2} \neq 0.$$

引理 3.1^[7]. 正型矩阵是单调阵.

引理 3.2. 假设 $\Delta t \leq H^2$, 且网格函数 $Z = \{z_{i,j}^n\}$ 满足如下条件:

$$z_{i,j}^n \leq 0, \quad \text{于边界点处}, \quad (3.1)$$

$$\partial_{t,\Delta t} z_{k_1,j}^n - \frac{1}{H} (\partial_{x,H} z_{k_2,j}^n - \partial_{x,H} z_{k_1,j}^{n-1}) - \partial_{y,h}^2 z_{k_1,j}^n \leq 0, \quad \text{于内界点 } \bar{x}_1 \text{ 处}, \quad (3.2)$$

$$\partial_{t,\Delta t} z_{k_2,j}^n - \frac{1}{H} (\partial_{x,H} z_{k_2+L,j}^{n-1} - \partial_{x,H} z_{k_2,j}^n) - \partial_{y,h}^2 z_{k_2,j}^n \leq 0, \quad \text{于内界点 } \bar{x}_2 \text{ 处}, \quad (3.3)$$

$$\partial_{t,\Delta t} z_{i,k_1}^n - \partial_{x,h}^2 z_{i,k_1}^n - \frac{1}{H} (\partial_{y,H} z_{i,k_2}^n - \partial_{y,H} z_{i,k_1}^{n-1}) \leq 0, \quad \text{于内界点 } \bar{y}_1 \text{ 处}, \quad (3.4)$$

$$\partial_{t,\Delta t} z_{i,k_2}^n - \partial_{x,h}^2 z_{i,k_2}^n - \frac{1}{H} (\partial_{y,H} z_{i,k_2+L}^{n-1} - \partial_{y,H} z_{i,k_2}^n) \leq 0, \quad \text{于内界点 } \bar{y}_2 \text{ 处}, \quad (3.5)$$

$$\partial_{t,\Delta t} z_{i,j}^n - \partial_{x,h}^2 z_{i,j}^n - \partial_{y,h}^2 z_{i,j}^n \leq 0, \quad \text{于内点处}, \quad (3.6)$$

则对任意的 $0 \leq i, j \leq N$ 和 $0 \leq n \leq M$, 有

$$z_{i,j}^n \leq 0.$$

证明. 使用数学归纳法. 显然, 当 $n = 0$ 时结论成立. 现在假设对第 $n - 1$ 时间层结论成立. 设 $\mathbf{z}_{k_i}^n = (z_{k_i,1}^n, \dots, z_{k_i,N-1}^n)^T, i = 1, 2$. 将 (3.2), (3.3) 表示为如下形式:

$$(1 + R + 2r)z_{k_1,j}^n - Rz_{k_2,j}^n - rz_{k_1,j-1}^n - rz_{k_1,j+1}^n \leq (1 - R)z_{k_1,j}^{n-1} + Rz_{k_1-L,j}^{n-1}, \quad (3.7)$$

$$(1 + R + 2r)z_{k_2,j}^n - Rz_{k_1,j}^n - rz_{k_2,j-1}^n - rz_{k_2,j+1}^n \leq (1 - R)z_{k_2,j}^{n-1} + Rz_{k_2+L,j}^{n-1}, \quad (3.8)$$

其矩阵形式为

$$A \begin{pmatrix} z_{k_1}^n \\ z_{k_2}^n \end{pmatrix} \leq \mathbf{g}^{n-1},$$

其中 A 如 §2 中定义, \mathbf{g}^{n-1} 为由 (3.7), (3.8) 的右端及边界条件构成的向量. 易见 A 是正型矩阵, 从而由引理 3.1 可知 A 是单调阵, 又由已知条件 $\Delta t \leq H^2$, 以及对第 $n - 1$ 时间层解的假设条件知 $\mathbf{g}^{n-1} \leq 0$, 因而由单调阵的定义立即得到 $z_{k_1}^n \leq 0, z_{k_2}^n \leq 0$, 即 $z_{k_1,j}^n \leq 0, z_{k_2,j}^n \leq 0, j = 1, \dots, N - 1$. 同理可证 $z_{i,k_1}^n \leq 0, z_{i,k_2}^n \leq 0, i = 1, \dots, N - 1$. 再由极值原理及 (3.6) 适用于 9 个子域, 可知在内点有 $z_{i,j}^n \leq 0$.

使用上述引理, 可得如下的先验误差估计:

定理 3.1. 假设

$$C_0 = \sup_{(x,y,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]} \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right|, \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right|, \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \right|, \frac{1}{12} \left(\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| + \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right) \right\},$$

且 $\Delta t \leq H^2$, 则

$$\max_{i,j,n} |u(x_i, y_j, t^n) - U_{i,j}^n| \leq C_0 \left(\frac{1}{8} (\Delta t + h^2) + \Delta t + 2H\Delta t + H^3 \right).$$

证明. 令 $e_{i,j}^n = u_{i,j}^n - U_{i,j}^n$, 则 $\{e_{i,j}^n\}$ 满足差分方程

$$e_{i,j}^n = 0, \quad \text{于边界点处,}$$

$$\begin{aligned} \partial_{t,\Delta t} e_{k_1,j}^n - \frac{1}{H} (\partial_{x,H} e_{k_2,j}^n - \partial_{x,H} e_{k_1,j}^{n-1}) - \partial_{y,h}^2 e_{k_1,j}^n \\ = K_{k_1,j}^n \left(\frac{\Delta t}{H} + 2\Delta t + H^2 \right), \quad \text{于内界点 } \bar{x}_1 \text{ 处,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{t,\Delta t} e_{k_2,j}^n - \frac{1}{H} (\partial_{x,H} e_{k_2+L,j}^{n-1} - \partial_{x,H} e_{k_2,j}^n) - \partial_{y,h}^2 e_{k_2,j}^n \\ = K_{k_2,j}^n \left(\frac{\Delta t}{H} + 2\Delta t + H^2 \right), \quad \text{于内界点 } \bar{x}_2 \text{ 处,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{t,\Delta t} e_{i,k_1}^n - \partial_{x,h}^2 e_{i,k_1}^n - \frac{1}{H} (\partial_{y,H} e_{i,k_2}^n - \partial_{y,H} e_{i,k_1}^{n-1}) \\ = K_{i,k_1}^n \left(\frac{\Delta t}{H} + 2\Delta t + H^2 \right), \quad \text{于内界点 } \bar{y}_1 \text{ 处,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{t,\Delta t} e_{i,k_2}^n - \partial_{x,h}^2 e_{i,k_2}^n - \frac{1}{H} (\partial_{y,H} e_{i,k_2+L}^{n-1} - \partial_{y,H} e_{i,k_2}^n) \\ = K_{i,k_2}^n \left(\frac{\Delta t}{H} + 2\Delta t + H^2 \right), \quad \text{于内界点 } \bar{y}_2 \text{ 处,} \end{aligned}$$

$$\partial_{t,\Delta t} e_{i,j}^n - \partial_{x,h}^2 e_{i,j}^n - \partial_{y,h}^2 e_{i,j}^n = K_{i,j}^n (\Delta t + h^2), \quad \text{于内点处,}$$

其中

$$|K_{i,j}^n| \leq C_0.$$

令

$$\theta_{i,j} = \frac{1}{2} x_i (1 - x_i),$$

易验证, $\theta_{0,j} = \theta_{N,j} = 0$, $0 \leq j \leq N$, 且对 $0 < i < N$, $0 < j < N$,

$$-\partial_{x,h}^2 \theta_{i,j} - \partial_{y,h}^2 \theta_{i,j} = 1,$$

并且

$$0 \leq \theta_{i,j} \leq \frac{1}{8}.$$

进一步, 构造网格函数

$$\beta_i = \begin{cases} H(2 - x_{k_1} - x_{k_2})x_i, & 0 \leq x_i \leq x_{k_1}, \\ H(1 - x_{k_1} - x_{k_2})x_i + Hx_{k_1}, & x_{k_1} \leq x_i \leq x_{k_2}, \\ H(x_{k_1} + x_{k_2})(1 - x_i), & x_{k_2} \leq x_i \leq 1, \end{cases}$$

$$\gamma_j = \begin{cases} H(2 - y_{k_1} - y_{k_2})y_j, & 0 \leq y_j \leq y_{k_1}, \\ H(1 - y_{k_1} - y_{k_2})y_j + Hy_{k_1}, & y_{k_1} \leq y_j \leq y_{k_2}, \\ H(y_{k_1} + y_{k_2})(1 - y_j), & y_{k_2} \leq y_j \leq 1, \end{cases}$$

则它们分别满足

$$\begin{cases} \beta_0 = \beta_N = 0, \\ \partial_{x,h}^2 \beta_i = 0, & 0 < i < N, i \neq k_1, k_2, \\ -\partial_{x,H}^2 \beta_{k_1} = 1, & -\partial_{x,H}^2 \beta_{k_2} = 1, \\ -\partial_{x,h}^2 \beta_{k_1} = H/h, & -\partial_{x,h}^2 \beta_{k_2} = H/h, \\ 0 \leq \beta_i \leq H/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = \gamma_N = 0, \\ \partial_{y,h}^2 \gamma_j = 0, & 0 < j < N, j \neq k_1, k_2, \\ -\partial_{y,H}^2 \gamma_{k_1} = 1, & -\partial_{y,H}^2 \gamma_{k_2} = 1, \\ -\partial_{y,h}^2 \gamma_{k_1} = H/h, & -\partial_{y,h}^2 \gamma_{k_2} = H/h, \\ 0 \leq \gamma_j \leq H/2. \end{cases}$$

令

$$\xi_{i,j} = C_0[\theta_{i,j}(\Delta t + h^2) + (\beta_i + \gamma_j)(\frac{\Delta t}{H} + 2\Delta t + H^2)].$$

设

$$z_{i,j}^n = e_{i,j}^n - \xi_{i,j},$$

由于 $z_{i,j}^n$ 满足引理 3.2 的条件, 故对任意的 $0 \leq i, j \leq N$ 和 $0 \leq n \leq M$, $z_{i,j}^n \leq 0$, 因而

$$e_{i,j}^n \leq \xi_{i,j}$$

对任意的 $0 \leq i, j \leq N$ 和 $0 \leq n \leq M$ 成立. 类似地, 若令 $z_{i,j}^n = -e_{i,j}^n - \xi_{i,j}$, 同样有

$$-e_{i,j}^n \leq \xi_{i,j}$$

对任意的 $0 \leq i, j \leq N$ 和 $0 \leq n \leq M$ 成立. 我们得出结论: 对任意的 $0 \leq i, j \leq N$ 和 $0 \leq n \leq M$,

$$|e_{i,j}^n| \leq \xi_{i,j}.$$

由 $\xi_{i,j}$ 的构造, 我们得到

$$0 \leq \xi_{i,j} \leq C_0(\frac{1}{8}(\Delta t + h^2) + \Delta t + 2H\Delta t + H^3).$$

定理证毕.

注 3.1. 由于本文所考虑的问题 (1.1)-(1.3) 是线性初边值问题, 并且由定理 3.1 的证明过程可知算法 3 中的差分格式具有相容性, 所以算法 3 的稳定性与收敛性是等价的, 从而当 $\Delta t \leq H^2$ 时, 算法 3 是稳定的. 同算法 1 和算法 2 相比, 算法 3 的稳定性条件都有不同程度的放宽.

§4. 数值实验

在 (1.2) 中取 $u^0(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$, 则问题 (1.1)-(1.3) 的精确解为

$$u(x, y, t) = e^{-2\pi^2 t} \sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

通过这个算例, 下面我们将算法 1, 算法 2, 算法 3 及纯隐式算法的计算精度和数值稳定性作一比较. 这里, 取 $N = 40, h = 0.025, T = 0.25, r = \Delta t/h^2$. 在算法 1-2 中取 $k = 20$, 在算法 3 中, 当 $L = 2$ 时, 取 $k_1 = 19$, 当 $L = 4$ 时, 取 $k_1 = 18$. fail 表示算法不稳定, 计算失败. 从数值结果容易得到如下结论: 在稳定性条件下, 算法 1-3 的精度总好于纯隐式算法; 算法 3 的稳定性和精度均优于算法 1; 与算法 2 相比, 算法 3 与算法 2 精度相近, 而稳定性条件比算法 2 放宽了 3 倍. 另外, 结合文献 [4] 和 [5], 我们不难发现, 在区域内界点处恰当地使用非对称格式不仅可以提高算法的稳定性, 而且还可以保证算法具有较高的精度.

表 1 $r=1, \Delta t=6.25e-4, L=2, y=0.5$

x_i 精确解 (e-3)	数值解 (e-3)				相对误差 (e-2)			
	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3
0.1 2.2224	2.2963	2.2909	2.2736	2.2750	3.3252	3.0823	2.3038	2.3668
0.3 5.8184	6.0117	5.9967	5.9510	5.9549	3.3222	3.0644	2.2790	2.3460
0.5 7.1919	7.4309	7.4096	7.3523	7.3583	3.3232	3.0270	2.2303	2.3137
0.7 5.8184	6.0117	5.9967	5.9510	5.9549	3.3222	3.0644	2.2790	2.3460
0.9 2.2224	2.2963	2.2909	2.2736	2.2750	3.3252	3.0823	2.3038	2.3668

表 2 $r=4, \Delta t=2.5e-3, L=2, y=0.5$

x_i 精确解 (e-3)	数值解 (e-3)				相对误差 (e-1)			
	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3
0.1 2.2224	2.5066	2.4821	fail	2.4103	1.2788	1.1686	fail	0.8455
0.3 5.8184	6.5622	6.4941	fail	6.3044	1.2784	1.1613	fail	0.8353
0.5 7.1919	8.1114	8.0145	fail	7.7815	1.2785	1.1438	fail	0.8198
0.7 5.8184	6.5622	6.4941	fail	6.3044	1.2784	1.1613	fail	0.8353
0.9 2.2224	2.5066	2.4821	fail	2.4103	1.2788	1.1686	fail	0.8455

表 3 $r=8, \Delta t=5.0e-3, L=2, y=0.5$

x_i 精确解 (e-3)	数值解 (e-3)				相对误差 (e-1)			
	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3
0.1 2.2224	2.7997	fail	fail	2.5984	2.5976	fail	fail	1.6919
0.3 5.8184	7.3296	fail	fail	6.7900	2.5973	fail	fail	1.6699
0.5 7.1919	9.0599	fail	fail	8.3688	2.5974	fail	fail	1.6364
0.7 5.8184	7.3296	fail	fail	6.7900	2.5973	fail	fail	1.6699
0.9 2.2224	2.7997	fail	fail	2.5984	2.5976	fail	fail	1.6919

表 4 $r=1, \Delta t=6.25e-4, L=4, y=0.5$

x_i 精确解 (e-3)	数值解 (e-3)				相对误差 (e-2)			
	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3
0.1 2.2224	2.2963	2.2917	2.2782	2.2807	3.3252	3.1183	2.5108	2.6233
0.3 5.8184	6.0117	5.9989	5.9634	5.9702	3.3222	3.1022	2.4921	2.6090
0.5 7.1919	7.4309	7.4128	7.3690	7.3786	3.3232	3.0715	2.4625	2.5960
0.7 5.8184	6.0117	5.9989	5.9634	5.9702	3.3222	3.1022	2.4921	2.6090
0.9 2.2224	2.2963	2.2917	2.2782	2.2807	3.3252	3.1183	2.5108	2.6233

表 5 $r=4, \Delta t=2.5e-3, L=4, y=0.5$

x_i 精确解 (e-3)	数值解 (e-3)				相对误差 (e-1)			
	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3
0.1 2.2224	2.5066	2.4640	2.3405	2.3616	1.2788	1.0871	0.5314	0.6264
0.3 5.8184	6.5622	6.4435	6.1178	6.1766	1.2784	1.0744	0.5146	0.6156
0.5 7.1919	8.1114	7.9427	7.5415	7.6253	1.2785	1.0440	0.4861	0.6026
0.7 5.8184	6.5622	6.4435	6.1178	6.1766	1.2784	1.0744	0.5146	0.6156
0.9 2.2224	2.5066	2.4640	2.3405	2.3616	1.2788	1.0871	0.5314	0.6264

表 6 $r=8, \Delta t=5.0e-3, L=4, y=0.5$

x_i 精确解 (e-3)	数值解 (e-3)				相对误差 (e-1)			
	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3	纯隐式	算法 1	算法 2	算法 3
0.1 2.2224	2.7997	2.7043	fail	2.4733	2.5976	2.1684	fail	1.1290
0.3 5.8184	7.3296	7.0629	fail	6.4608	2.5973	2.1389	fail	1.1041
0.5 7.1919	9.0599	8.6793	fail	7.9642	2.5974	2.0682	fail	1.0738
0.7 5.8184	7.3296	7.0629	fail	6.4608	2.5973	2.1389	fail	1.1041
0.9 2.2224	2.7997	2.7043	fail	2.4733	2.5976	2.1684	fail	1.1290

参 考 文 献

- [1] C.N.Dawson, Q.Du and T.F.Dupont, A finite difference domain decomposition algorithm for numerical solution of the heat equation, *J. Math. Comp*, **57**(1991) 63-71.
- [2] 张宝琳, 热传导方程的有限差分区域分裂显 - 隐算法的注记, *航空计算技术*, **28**:3(1998) 51-54.
- [3] 张宝琳, 谷同祥, 莫则尧, 数值并行计算原理与方法, 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [4] 张宝琳, 申卫东, 热传导方程有限差分区域分解算法的若干注记, *数值计算与计算机应用*, **23**:2(2002) 81-90.
- [5] 吕桂霞, 马富明, 抛物方程的一类并行差分格式, *吉林大学学报 (理学版)*, **40**:4(2002) 327-330.
- [6] Wan Zhengsu, Zhang Baolin, Chen Guangnan, Design and Analysis of Finite Difference Domain Decomposition Algorithms for the Two-dimensional Heat Equation, *Proceedings: Fifth International Conference on Algorithms and Architectures for Parallel Processing*, October 23-25, 2002, Beijing, China.
- [7] 郭本瑜, 偏微分方程的差分方法, 北京, 科学出版社, 1985.
- [8] V.K.Saul'yev, *Integration of equations of parabolic type by method of nets*, New York, 1964.