

二阶椭圆问题求解的拟一次混合元格式^{*1)}

宋士仓

(中国科学院数学与系统科学研究院计算数学与科学与工程计算研究所 北京 100080)
(郑州大学数学系 郑州 450052))

陈绍春 李 镇

(郑州大学数学系 郑州 450052)

摘 要

本文构造了二阶椭圆问题的一种混合变分形式, 这种新的变分形式有较好的性质, 由此导出了一种称为拟一次混合元求解格式, 获得了较好的逼近阶. 数值结果说明关于梯度的估计达到最优.

关键词: 椭圆方程, 混合元, 有限元

A QUASILINEAR MIXED ELEMENT SCHEME FOR SOLVING SECOND ORDER ELLIPTIC PROBLEM

Song Shicang

(*Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China*)
(*Dept. of Math., Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China*)

Chen Shaochun Li Zhen

(*Dept. of Math., Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China*)

Abstract

A new mixed variational form for second order elliptic problem is established. Based on the new form, a discrete solving method called quasilinear scheme is constructed. Convergence analysis demonstrates that the scheme possesses better convergence, especially for ∇u . Under proper regular assumption, the estimations $\|u - u_h\|_0 = O(h)$ and $\|\nabla u - \psi_h\|_H = O(h)$ are derived, where $H = H(\Omega, div)$. Even in normal weak condition, the discrete solution series is still convergent to the true solution. Numerical example shows that the estimation is optimal to ∇u .

Key words: Elliptic problem, Mixed element, Finite element

* 2004 年 3 月 25 日收到.

1) 国家自然科学基金资助 (10471133).

§1. 引 言

混合元方法是有限元方法的一个重要分支, 它所处理的问题一方面为有些问题本身就是混合的, 如 Stokes 问题, 同时求压力和速度两个量. 有一些问题是有限元求解时原变分问题检验函数空间的光滑度太高, 构造协调元空间需要很多的自由度, 如四阶问题, 板问题等, 引入中间量后可改为在光滑度较弱的混合协调元空间求解. 二阶椭圆问题的混合元求解的原始出发点为函数 u 与 ∇u 同时求解, 在保证 u 具有一定精度的同时, 尽可能地提高 ∇u 的逼近阶. 如多尺度计算方法中需解均匀化方程求出 u_0 , 在写出渐近解时不仅需要均匀化解 u_0 , 还需要知道 ∇u_0 甚至 u_0 的二阶导数. 如果先用有限元方法求出 u_0 , 再用差分方法求 u_0 的导数, 势必影响 ∇u_0 的精度. 用混合元方法可避免这种缺陷. 另外二阶问题的研究基本上体现了混合元的理论分析方法和技术难点, 对研究其他混合问题也有借鉴意义.

考虑二阶椭圆问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 Ω 是有界凸多角形区域, $f \in L^2(\Omega)$.

令 $\psi = \nabla u$, 则与 (1) 等价的广义混合问题为求 $(\psi, u) \in H \times M$, 满足

$$\begin{cases} a_1(\psi, \phi) + b(\phi, u) = 0, & \forall \phi \in H, \\ b(\psi, v) = F(v), & \forall v \in M, \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} H &= \{\phi \in L^2(\Omega)^2; \operatorname{div} \phi \in L^2(\Omega)\}, \quad M = \{v \in L^2(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ \|\phi\|_H &= (\|\phi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \phi\|_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a_1(\psi, \phi) = \int_{\Omega} \psi \cdot \phi \, dx dy, \\ b(\phi, v) &= \int_{\Omega} v \operatorname{div} \phi \, dx dy, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx dy. \end{aligned}$$

对区域 Ω 作拟一致三角剖分 \mathcal{T}_h , 按通常记号, 用 h 表示所有单元的最大直径, $\operatorname{meas}(e)$ 表示单元 e 的面积, N_p, N_e, N_s 依次表示剖分顶点、单元、边的个数. 另外, 文中出现的常数 C, β 都为与 h 无关的常数, 出现在不同地方大小可能不一样.

针对该混合变分形式, 构造有限元空间 $H_h \subset H, M_h \subset M$, 对形式 (2) 用混合法求离散解 (ψ_h, u_h) . 最早提出混合元格式的为 Raviart, Thomas, 该格式至今仍被广泛应用^[10,3]. 但该格式论证麻烦, 需自由度较多. 文献 [9] 给出了许多格式, 但估计的都是 $\|\psi - \psi_h\|_0$. 没有在求解空间上给出 $\|\psi - \psi_h\|_H$ 的估计. [9] 中用了 $7N_p$ 给出了一种一次元格式, 其收敛阶为 $\|\psi - \psi_h\|_0 = O(h)$. 本文利用类似于 Lagrange 乘子方法^[6,12](文献 [6] 为应用于板问题, 文献 [12] 为处理弹性接触问题), 将原变分问题 (2) 转化为一个与其等价的形式, 给出了针对该新形式的一种混合元格式. 优点为该格式中双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 在 $H \times H$ 和 $H_h \times H_h$ 上自然满足强椭圆, 避开了传统变分形式中双线性型 $a_1(\cdot, \cdot)$ 在 $H \times H$ 上不满足强椭圆的弱点. 巧妙地证明了双线性型 $b(\cdot, \cdot)$ 在 $H_h \times M_h$ 上使得 B.B 条件成立之后, 保障了离散格

式有唯一解,并能纳入到混合元误差估计的标准框架理论进行误差估计.理论分析的结果说明在一定条件下用 $7N_p$ 的自由度可达到逼近阶 $\|\psi - \psi_h\|_H = O(h)$.注意此处为 H 模,相比之下,得到了更高精度的估计.证明过程简洁,数值算例与 $\|\psi - \psi_h\|_H = O(h)$ 相吻合.

§2. 新的变分形式及混合元逼近方法描述

由 (1) 及 $\psi = \nabla u$ 易得

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \psi \operatorname{div} \phi \, dx dy = \int_{\Omega} f \operatorname{div} \phi \, dx dy, \quad \forall \phi \in H.$$

即

$$b(\psi, \operatorname{div} \phi) = F(\operatorname{div} \phi), \quad \forall \phi \in H. \quad (3)$$

将 (3) 乘以 $\lambda (\lambda > 0)$ 与 (2) 的第一式相加,得到与 (2) 等价的变分形式,求 $(\psi, u) \in H \times M$, 满足

$$\begin{cases} a(\psi, \phi) + b(\phi, u) = G(\phi), & \forall \phi \in H, \\ b(\psi, v) = F(v), & \forall v \in M, \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$a(\psi, \phi) = \int_{\Omega} \psi \phi \, dx dy + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} \psi \operatorname{div} \phi \, dx dy, \quad G(\phi) = \lambda F(\operatorname{div} \phi).$$

显然新的变分形式 (4) 中, $a(\cdot, \cdot)$ 在 $H \times H$ 上满足强椭圆, 并且 $G \in H'$.

[10] 中已经证明, $b(\cdot, \cdot)$ 在 $H \times M$ 上满足 B.B 条件, 即存在常数

$$\sup_{\phi \in H} \frac{b(\phi, v)}{\|\phi\|_H} \geq \beta \|v\|_M, \quad \forall v \in M,$$

并且 (2) 进而 (4) 有唯一解 $(\psi, u) \in H \times M$, 及正则性估计 $(\psi, u) \in H^1(\Omega)^2 \times H^2(\Omega)$, $\|\psi\|_1 + \|u\|_2 \leq C \|f\|_0$. 可以证明对连续问题 (2) 和 (4) 是等价的, 但在各自基础上产生的数值方法大不相同.

对 Ω 作拟一致三角剖分 \mathcal{T}_h , 取有限元空间 $H_h \subset H, M_h \subset M$, 则 (4) 的离散形式为求 $(\psi_h, u_h) \in H_h \times M_h$, 满足

$$\begin{cases} a(\psi_h, \phi_h) + b(\phi_h, u_h) = G(\phi_h), & \forall \phi_h \in H_h, \\ b(\psi_h, v_h) = F(v_h), & \forall v_h \in M_h. \end{cases} \quad (5)$$

因空间为协调的, $a(\cdot, \cdot)$ 再 $H_h \times H_h$ 上自然满足强椭圆. 如果能证明 $b(\cdot, \cdot)$ 在 $H_h \times M_h$ 上满足 B.B 条件, 则由混合元标准框架定理, 就有 (5) 有唯一解 $(\psi_h, u_h) \in H_h \times M_h$, 并且

$$\|\psi - \psi_h\|_H + \|u - u_h\|_M \leq C \left(\inf_{\phi_h \in H_h} \|\psi - \phi_h\|_H + \inf_{v_h \in M_h} \|u - v_h\|_M \right), \quad (6)$$

其中 C 为与 ψ, u 及 h 无关的常数 [10,9,2].

§3. 一种拟一次混合元格式

罗振东先生首次构造了由混合元空间^[8] $H_h = \{\phi_h \in C^0(\Omega)^2; \phi_h|_e \in (P_1(e))^2 \oplus \alpha_e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\}$, $M_h = \{v_h \in C^0(\Omega); v_h|_e \in P_1(e), v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$ 形成的二阶问题混合元格式, 其中 $e \in \mathcal{J}_h$, $P_1(e)$ 为 e 上的一次多项式空间, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为单元 e 上的面积坐标, $\alpha_e = (\alpha_{e1}, \alpha_{e2})$ 在 e 上为常向量. 罗振东先生把它应用于传统的混合变分形式 (2) 的求解, 得到估计 $\|\psi - \psi_h\|_0 = O(h)$. 王烈衡先生曾将该空间应用于 Stokes 问题数值求解获得较好的逼近结果^[11]. 本文将这套空间应用于新的变分形式 (4) 可得到更好的收敛性.

因离散空间的构造为分片一次多项式加上逐个单元上的泡函数, M_h 为分片一次多项式空间, 因此我们简称这种离散格式为拟一次格式.

显然, $H_h \subset H^1(\Omega)^2 \subset H, M_h \subset M$, $a(\cdot, \cdot)$ 在 $H_h \times H_h$ 上满足强椭圆. 下面证明 $b(\cdot, \cdot)$ 在 $H_h \times M_h$ 上满足 B.B 条件.

引理. $b(\cdot, \cdot)$ 在 $H_h \times M_h$ 上满足 B.B 条件, 即

$$\sup_{\phi_h \in H_h} \frac{|b(\phi_h, v_h)|}{\|\phi_h\|_H} \geq \beta \|v_h\|_M, \quad \forall v_h \in M_h.$$

证明. 证明分三步.

(A) 先证

$$\sup_{\phi \in H^2(\Omega)^2} \frac{|b(\phi, v)|}{\|\phi\|_1} \geq \beta \|v\|_0, \quad \forall v \in L^2(\Omega). \quad (7)$$

$\forall v \in L^2(\Omega)$, 由 Poisson 方程

$$\begin{cases} -\Delta w = v, & \text{in } \Omega, \\ w = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

有唯一的广义解^[9] $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ 及正则性 $\|w\|_2 \leq \|v\|_0$, 取 $\phi_0 = (-w_x, -w_y)$. 则 $\phi_0 \in H^1(\Omega)^2$, 并且

$$\operatorname{div} \phi_0 = v, \quad \|\phi_0\|_1 \leq C \|w\|_2 \leq C \|v\|_0. \quad (8)$$

由 $H^2(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密, 对 $\phi_0 \in H^1(\Omega)^2$, 存在 $\{\phi_k\} \in H^2(\Omega)^2$, 使 $\|\phi_k - \phi_0\|_1 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). 由强收敛一定弱收敛, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b(\phi_k, v)|}{\|\phi_k\|_1} = \frac{|b(\phi_0, v)|}{\|\phi_0\|_1} \stackrel{(8)}{\geq} C \|v\|_0,$$

因此当 k 足够大时, $\frac{|b(\phi_k, v)|}{\|\phi_k\|_1} \geq \frac{C}{2} \|v\|_0 \triangleq \beta \|v\|_0$, 从而

$$\sup_{\phi \in H^2(\Omega)^2} \frac{|b(\phi, v)|}{\|\phi\|_1} \geq \frac{|b(\phi_k, v)|}{\|\phi_k\|_1} \geq \beta \|v\|_0.$$

(B) 存在 $r_h: H^2(\Omega)^2 \rightarrow H_h$, 使

$$b(\phi - r_h \phi, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in M_h. \quad \text{且 } \|r_h \phi\|_1 \leq C \|\phi\|_1. \quad (9)$$

记 $W_h = \{\phi_h \in C^0(\Omega); \phi_h|_e \in P_1(e)\}$, 显然 $W_h \subset H^1(\Omega)$. $\forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in H^2(\Omega)^2 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})^2$, 取 $\tau_h = (\tau_{h1}, \tau_{h2})$, 其中 τ_{hi} 为 ϕ_i 在 W_h 中的 L^2 投影, 则由投影定理^[9], 有

$$\|\phi - \tau_h\|_0 \leq Ch\|\phi\|_1, \|\tau_h\|_0 \leq C\|\phi\|_0, |\tau_h|_1 \leq C|\phi|_1. \quad (10)$$

取 $\alpha_e = \frac{\int_e (\phi - \tau_h) dx dy}{\int_e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 dx dy}$, $r_h \phi|_e = \tau_h|_e + \alpha_e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, 则 $r_h \phi \in H_h$.

利用 Green 公式及 M_h 的边界性质, 注意 ∇v_h 为分片常向量, 有

$$\begin{aligned} b(\phi - r_h \phi, v_h) &= \sum_{e \in \mathcal{J}_h} \int_e v_h \operatorname{div}(\phi - r_h \phi) dx dy \\ &= - \sum_e \int_e (\phi - r_h \phi) \cdot \nabla v_h dx dy \\ &= - \sum_e \int_e (\phi - \tau_h - \alpha_e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \nabla v_h dx dy = 0. \end{aligned}$$

由剖分的拟一致性, 易证

$$\begin{aligned} \|\alpha_e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\|_{1,e}^2 &= \int_e [(\alpha_{e1} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 + (\alpha_{e2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2] dx dy \\ &\quad + \int_e \left[\left(\alpha_{e1} \frac{\partial \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\partial x} \right)^2 + \left(\alpha_{e2} \frac{\partial \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\leq C(\alpha_{e1}^2 + \alpha_{e2}^2) = C\|\alpha_e\|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

再利用 Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} \|\alpha_e\|^2 &= \left\| \frac{\int_e (\phi - \tau_h) dx dy}{\int_e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 dx dy} \right\|^2 \\ &\leq C \frac{1}{\operatorname{meas}(e)} \|\phi - \tau_h\|_{0,e}^2 \leq Ch^{-2} \|\phi - \tau_h\|_{0,e}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

由 $r_h \phi$ 的定义及 (11), (12), 得

$$\|r_h \phi\|_{1,e} \leq \|\tau_h\|_{1,e} + Ch^{-1} \|\phi - \tau_h\|_{0,e} \leq C(\|\tau_h\|_{1,e} + h^{-1} \|\phi - \tau_h\|_{0,e}). \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \|r_h \phi\|_1^2 &= \sum_{e \in \mathcal{J}_h} \|r_h \phi\|_{1,e}^2 \stackrel{(13)}{\leq} C \sum_{e \in \mathcal{J}_h} (\|\tau_h\|_{1,e}^2 + h^{-2} \|\phi - \tau_h\|_{0,e}^2) \\ &= C(\|\tau_h\|_1^2 + h^{-2} \|\phi - \tau_h\|_0^2) \stackrel{(10)}{\leq} C(\|\phi\|_1^2 + h^{-2} h^2 \|\phi\|_1^2) \leq C\|\phi\|_1^2 \end{aligned}$$

因此, $\|r_h \phi\|_1 \leq C\|\phi\|_1$.

(C) 有了 (A) 和 (B), 容易得到 B.B 条件成立, 事实上,

$$\begin{aligned} \sup_{\phi_h \in H_h} \frac{|b(\phi_h, v_h)|}{\|\phi_h\|_H} &\geq \sup_{\phi \in H^2(\Omega)^2} \frac{|b(r_h \phi, v_h)|}{\|r_h \phi\|_H} \\ &= \sup_{\phi \in H^2(\Omega)^2} \frac{|b(\phi, v_h)|}{\|r_h \phi\|_H} \geq C \sup_{\phi \in H^2(\Omega)^2} \frac{|b(\phi, v_h)|}{\|\phi\|_1} \\ &\geq C\beta \|v_h\|_M \geq \beta \|v_h\|_M, \quad \forall v_h \in M_h. \end{aligned}$$

定理. 设 (ψ, u) 为连续问题 (4) 的解, (ψ_h, u_h) 为离散问题 (5) 的拟一次混合元格式的解.

(a) 若 $(\psi, u) \in H^2(\Omega)^2 \times H^2(\Omega)$ (注: 有这种可能, 后面的数值例子就属这种情况), 则 $\|\psi - \psi_h\|_H + \|u - u_h\|_M \leq Ch(|\psi|_2 + h|u|_2)$.

(b) 一般正则性条件下, 即 $(\psi, u) \in H^1(\Omega)^2 \times H^2(\Omega)$ 时, 有 $\lim_{h \rightarrow 0} (\|\psi - \psi_h\|_H + \|u - u_h\|_M) = 0$. 也就是说仍有收敛性成立.

证明. (a) 由引理成立及前面的说明, 只需估计 (6) 式. 由 Sobolev 空间嵌入定理 [7], $u \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$, $\psi \in H^2(\Omega)^2 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})^2$, 保持 u 的顶点函数值作分片线性插值 Πu . 则 $\Pi u \in M_h$; 以 ψ 的顶点及 $\frac{1}{\text{meas}(e)} \int_e \psi dx dy$ 作参数, 可唯一确定一插值函数 $\Lambda \psi \in H_h$. 由 (6) 式和仿射等价元插值定理 [4], 得

$$\begin{aligned} \|\psi - \psi_h\|_H + \|u - u_h\|_M &\leq C \left(\inf_{\phi_h \in H_h} \|\psi - \phi_h\|_H + \inf_{v_h \in M_h} \|u - v_h\|_M \right) \\ &\leq C (\|\psi - \Lambda \psi\|_H + \|u - \Pi u\|_M) \leq C (\|\psi - \Lambda \psi\|_1 + \|u - \Pi u\|_0) \\ &\leq C (h|\psi|_2 + h^2|u|_2) \leq Ch(|\psi|_2 + h|u|_2). \end{aligned}$$

(b) $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$, 由 $\psi \in H^1(\Omega)^2$ 及 $C_0^\infty(\mathbf{R}^2, \Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密 [7], 可找到光滑函数 $P\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)^2$, 使得 $\|\psi - P\psi\|_H \leq C\|\psi - P\psi\|_{1,\Omega} \leq \varepsilon$. 当 $h < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{|P\psi|_2}, \varepsilon \right\}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|\psi - \psi_h\|_H + \|u - u_h\|_M &\leq C (\|\psi - \Lambda P\psi\|_H + \|u - \Pi u\|_M) \\ &\leq C (\|\psi - P\psi\|_H + \|P\psi - \Lambda P\psi\|_1 + \|u - \Pi u\|_0) \\ &\leq C (\varepsilon + h|P\psi|_{2,\Omega} + h^2|u|_2) \leq C\varepsilon, \end{aligned}$$

常数 C 与 h 无关, 即 (b) 成立.

确定 ψ_h 需自由度 $2(N_p + N_e) \approx 6N_p$, u_h 约需 N_p 个自由度, 因此该格式共需自由度约 $7N_p$, 在稍强条件下, 比文献 [9] 中的结论要优, 逼近阶可达

$$\|\psi - \psi_h\|_H = O(h), \quad \|u - u_h\|_M = O(h).$$

即便在最弱的条件下, 该格式在 $H \times M$ 空间中仍具有收敛性. 最主要的一点为修改后的变分形式纳入混合元收敛性分析的标准框架理论, 不需要走 Falk 和 Osborn 给出的较弱条件下的分析方法 [5,9].

§4. 数值求解方法及算例

考虑问题

$$\begin{cases} \Delta u = -2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 为正方形. 真解为 $u(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$.

对 Ω 进行剖分, 按每边 N 等份形成正方形网格, 连接小正方形的西南角和东北角构成 Ω 的三角剖分, 则 $h = \frac{\sqrt{2}}{N}$.

假设出 ψ_h, u_h 关于节点参数的一般表达式, 基函数代入后形成的线性方程组为

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_h \\ u_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\phi \\ fv \end{pmatrix},$$

其中 A 为 $L \times L$ 阶矩阵, B 为 $L \times (N-1)$ 阶矩阵, B^t 为 B 的转置. 不引入额外的记号, 这里我们仍用 ψ_h 表示由 ψ_h 的未知节点参数组成的 L 维列向量, u_h 为由 u_h 的未知节点参数组成的 M 维列向量. $f\phi, fv$ 分别为基函数对应的 L 维和 M 维荷载向量, 其中 $L = 2(N+1)^2 + 4N^2, M = (N-1)^2$. 另外, 由双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 在 $H_h \times H_h$ 上强椭圆和 $b(\cdot, \cdot)$ 在 $H_h \times M_h$ 上满足 $B.B$ 条件, 可得到 A 为对称正定矩阵, B 为满秩矩阵即秩为 M .

方程组两边同乘以 $\begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbf{0}_{L \times M} \\ -BA^{-1} & I_{M \times M} \end{pmatrix}$, 求解方程变为

$$\begin{pmatrix} I_{L \times L} & A^{-1}B^t \\ \mathbf{0}_{M \times L} & -BA^{-1}B^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_h \\ u_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot f\phi \\ -BA^{-1} \cdot f\phi + fv \end{pmatrix}.$$

由 B 的满秩, 从而 $BA^{-1}B^t$ 为 $M \times M$ 阶的对称正定矩阵. 因此, 问题的求解归结为先解一个正定方程组求出 u_h 的节点值, 然后回代出 ψ_h 的节点参数值. 我们对多种荷载 f 作了实验, 收敛效果良好. 下面列举的为取 $f = -2\pi \sin \pi x \sin \pi y$ 时的实验结果.

实际计算时, 应取较小的 λ , 以避免加上的一项在数值格式中起较大作用, 但也并非 λ 越小越好. 实验表明 $\lambda \in [10^{-4}, 10^{-3}]$ 时, 效果比较好. 在表 1-表 3 和图 1 中, 我们取的 λ 为 $\lambda = 0.0001$. 表 4 为 λ 取不同值时的数值结果比较. 明显地, 当 λ 较大时效果不理想. 程序实现时, 荷载向量的计算采用三角形边中点的值作数值积分, 具有二次代数精确度, 误差估计中范数的计算采用三角形顶点值, 代数精确度为 1, 不影响收敛阶的观察. 表 1、表 2 中显示的剖分方法是为了让 0.1 的整数倍的点为剖分节点, 空白处处为 (0.5, 0.5) 非 5×5 时的剖分节点.

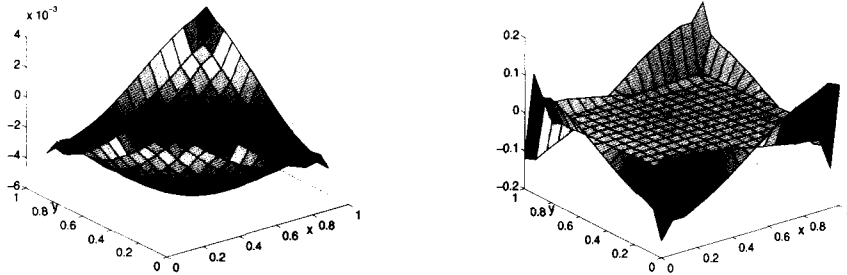


图 1 左边为 16×16 时函数 $u(x,y)$ 的点值误差, 右图为 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的点值误差

表 1 $N \times N$ 剖分时 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在某些节点数值解比较

点位置	实际值	5×5	10×10	20×20
(0.0,0.0)	0.0000000	0.756556	0.326475	0.102079
(0.2,0.2)	1.4939161	1.252302	1.466574	1.485034
(0.4,0.4)	0.9232909	0.823585	0.900777	0.917537
(0.5,0.5)	0.0000000		-0.000958	-0.000425
(0.6,0.6)	-0.9232909	-0.827012	-0.902485	-0.918306
(0.8,0.8)	-1.4939161	-1.253571	-1.467144	-1.485339
(1.0,1.0)	0.0000000	-0.756921	-0.326767	-0.102382

表 2 $N \times N$ 剖分时 u 在某些节点数值解比较

点位置	实际值	5×5	10×10	20×20
(0.2,0.2)	0.3454915	0.341297	0.345939	0.345740
(0.4,0.4)	0.9045085	0.925797	0.913355	0.908282
(0.5,0.5)	1.0000000		1.010298	1.004409
(0.6,0.6)	0.9045085	0.925768	0.913371	0.908309
(0.8,0.8)	0.3454915	0.341296	0.345971	0.345784

表 3 $N \times N$ 剖分时 $u, \psi = \nabla u$ 相对误差

	4×4	8×8	16×16	32×32
$\frac{\ u - u_h\ _0}{\ u\ _0}$	0.237065	0.129559	0.049020	0.017578
$\frac{\ \psi_1 - \psi_{h1}\ _0}{\ \psi_1\ _0}$	0.249299	0.073242	0.017510	0.003143
$\frac{\ \psi - \psi_h\ _H}{\ \psi\ _H}$	0.567429	0.317856	0.165572	0.076263

表 4 16×16 剖分时, λ 取不同值时 $u, \psi = \nabla u$ 相对误差比较

λ	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
$\frac{\ u - u_h\ _0}{\ u\ _0}$	0.048593	0.049020	0.052839	0.143320	1.275453	13.002952
$\frac{\ \psi_1 - \psi_{h1}\ _0}{\ \psi_1\ _0}$	0.026799	0.017510	0.013181	0.132890	1.302463	11.872817
$\frac{\ \psi - \psi_h\ _H}{\ \psi\ _H}$	0.178205	0.165572	0.135713	0.137547	0.358680	2.801939

从表 3 中可以看出基本上有 $\|\psi - \psi_h\|_H = O(h)$, 说明关于 ψ 的估计达到了最优. 只要右端项 f 比较好, 点值之间也有很好的逼近. 图 1 表示 16×16 时点值之间的误差, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在区域边界点上的收敛性差一些, 总体有较好的收敛性.

参 考 文 献

- [1] Daniel Boffi, Carlo Lovadina, Analysis of new argumented Lagrangian formulations for mixed finite element schemes. Numer. Math. 75(1997) 405-419.
- [2] Franco Brezzi, Michel Fortin, Mixed and Hybrid finite element methods, Springer-Verlag, 1991.
- [3] Z.Chen, T.Y.Hou, A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients, Math. Comp., 72(2003) 541-576.
- [4] P.G.Cialet, The finite element method for elliptic problems. North-Holland, Amsterdam 1978.
- [5] R.S.Falk, J.E.Osborn, Error estimates for mixed methods, RAIRO, Numer. Anal., 14:3(1980) 249-277. Springer 66(1977) 292-315.
- [6] C.Lovadina, A new class of mixed finite element methods for Reissner-Mindlin plates. SIAM J. Numer., Anal., 33(1996) 2457-2467.
- [7] 李立康等, 索伯列夫空间引论, 上海科学技术出版社, 1981.
- [8] 罗振东, 二阶椭圆方程的混合有限元分析, 应用数学, 5:4(1992) 26-31.
- [9] 罗振东, 有限元混合法理论基础及其应用, 山东教育出版社, 1996.
- [10] P.A.Raviart, J.M.Thomas, A mixed finite element method for second order elliptic problems. Lecture notes in Math., Berlin-Heidelberg Newyork Springer, 66(1997) 292-315.
- [11] 王烈衡, Stokes 问题的混合有限元分析, 计算数学, 9:1(1987), 70-82.
- [12] 王烈衡, 王光辉, 弹性接触问题的对偶混合有限元分析, 计算数学, 21:4(1999) 483-494.