

二次插值模型直接搜索算法的参数分析^{*1)}

刘 浩

(南京航空航天大学经济管理学院, 南京 210016;
南京工业大学理学院, 南京 210009)

倪 勤

(南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

摘 要

对无约束优化问题的二次插值型直接搜索算法中初始插值半径, 信赖域初始半径, 位移接受准则和信赖域半径调节参数进行了数值实验分析. 数值实验表明解无约束优化的基于二次函数插值型的直接搜索算法对初始插值半径和信赖域初始半径比较敏感, 对位移接受准则和半径调节参数不敏感. 根据数值实验结果推荐初始插值半径的选取应与信赖域初始半径相等, 同时给出了基于二次插值型的直接搜索算法中初始插值半径与信赖域初始半径的选择区间和其它参数的推荐值. 这些结果对这类算法的数值实现和工程应用是有益的.

关键词: 无约束最优化, 直接搜索算法, 二次插值模型, 信赖域, 参数分析

MR (2000) 主题分类: 90C30, 65K05

SENSITIVITY OF PARAMETERS IN DIRECT SEARCH METHODS BASED ON QUADRATIC INTERPOLATION MODEL

Liu Hao

(College of Economics & Management Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,
Nanjing 210016, China,
College of Science, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Ni Qin

(College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract

The sensitivity of parameters in direct search algorithm with quadratic interpolation model is examined by numerical experiments. These parameters are related to the initial radius, the step acceptance and the update of the trust region. According to numerical experiments, it is shown that the numerical efficiency of the direct search algorithm is very sensitive to the initial radius, and is insensitive to the parameters related to the step acceptance and the update of the trust region. Numerical tests show that initial interpolation radius should be equal to initial trust region radius. Recommended ranges of values for initial radius and the values of other parameters are exhibited on the basis of extensive numerical tests, which is beneficial to the implementation of the algorithm and engineering application.

* 2007 年 5 月 8 日收到.

¹⁾ 国家自然科学基金 (10471062); 江苏省基础研究计划 (自然科学基金 BK2006184) 资助项目.

Keywords: Unconstrained optimization, direct search algorithm, quadratic interpolation model, trust region, sensitivity of parameter

2000 Mathematics Subject Classification: 90C30, 65K05

1. 引言

信赖域技术最初在非线性拟合问题^[1]中提出, Powell 将其推广到求解最优化问题上, 现已发展成为一类理论上全局收敛和非常实用的优化方法. 本文所讨论的直接搜索方法将使用信赖域技术. 这一技术的基本思想是在当前迭代点用一个模型来近似目标函数, 然后在当前迭代点的一个邻域内极小化该模型, 根据一定接受准则和信赖域半径调整参数, 选择满足条件的试验步长, 得到下一步迭代点. 有关信赖域的思想 and 收敛性分析可见 [2,3] 等.

1994 年, Powell^[4] 将信赖域技术应用到直接搜索方法中来求解非线性约束优化, 并用线性多元插值多项式逼近目标函数和约束函数. 由于线性插值不能很好地反映目标函数的 Hesse 矩阵信息, 所以该算法运行较慢且只适合解决小规模的问题. 随后, Powell^[5] 在信赖域的框架内采用多元二次插值函数来近似目标函数, 给出了解无约束优化问题的算法. Conn, Toint^[6]-^[8] 等人发展了这一思想, 并成功地利用该方法解决了发动机喷油嘴的设计问题和波音飞机的螺旋桨优化问题. 至今已经有很多文献和软件 (如 [6-10]) 讨论用二次插值或锥插值模型逼近目标函数然后在信赖域框架内求解无约束优化问题.

显然, 这类直接搜索方法的效率除了与所选择的模型有关外, 另一个重要相关因素便是信赖域技术. 而信赖域技术执行的好坏将依赖于其中参数的选择. 这些参数包括模型的初始插值半径, 信赖域初始半径, 试验步长的接受准则以及半径调整参数等. 对于利用信赖域技术的一般梯度型方法已有这些参数选择的相关研究^[11,12]. 但对于利用信赖域技术的直接搜索方法还没有参数选择的研究. 本文的主要目的就是通过数值试验对在信赖域框架下基于二次插值模型的直接搜索算法中参数选择进行研究, 期望获得有益的结论.

本文的第 2 节介绍基于插值模型的直接搜索算法和相应的参数. 第 3 节给出数值试验中系列参数的取值, 第 4 节从算法的效率上根据数值结果进行了分析. 最后我们给出了一些结论和参数的选择区间.

2. 基于二次插值模型的直接搜索算法

考虑如下的无约束优化问题

$$\min_{x \in R^n} f(x), \quad (1)$$

其中 $f(x)$ 为 $R^n \rightarrow R$ 的连续函数, 但 $\nabla f(x)$ 和 $\nabla^2 f(x)$ 不能够直接计算获得, 而且计算函数值的工作量较大.

直接搜索算法所用的二次插值模型为

$$m_k(x_k + s) = f(x_k) + g^T s + \frac{1}{2} s^T H s, \quad (2)$$

其中 $g \in R^n$, H 为一个 n 阶对称矩阵, 向量 s 表示从当前迭代到下一迭代点的位移, 且 $x_k + s \in B_k = \{x \in R^n \mid \|x - x_k\| \leq \Delta_k\}$, $\Delta_k > 0$ 为当前信赖域半径. 因为 $\nabla f(x)$ 和 $\nabla^2 f(x)$ 不

能够直接计算获得, g 和 H 通过函数插值的方法获得, 即对插值点集合 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ 中的点, 使得

$$m(y_i) = f(y_i), i = 1, 2, \dots, p. \quad (3)$$

由于模型为二次的, 因此集合 Y 至少要含有

$$p = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (4)$$

个插值点. 但是, 在 $n > 1$ 时, 仅仅有 p 个插值点满足方程 (3) 并不能保证二次插值函数一定存在. 为了确保二次插值模型存在还需要插值点满足几何适定性^[13]. 对于集合 Y , 令 $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^p$ 为给定 n 元二次线性空间的一组基. 若插值点的函数值满足

$$\delta(Y) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(y_1) & \cdots & \phi_p(y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(y_p) & \cdots & \phi_p(y_p) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (5)$$

则称插值点集 Y 为几何适定的. 几何适定性可保证二次模型解的存在性和唯一性. 当 $|\delta(Y)|$ 的数值很小的时候, 问题会变成坏条件的, 因此我们希望 $|\delta(Y)|$ 的数值尽可能的大, 并称能够使得 $|\delta(Y)|$ 取得较大值的插值点集 Y 为几何充分的^[8]. 在几何充分的情况下集合 Y 中的所有点距离 x_k 均不超过 $2\Delta_k$, 而且用 B_k 中的任意一点替换 Y 的一个点时 $|\delta(Y)|$ 不会扩大 2 倍.

设信赖域中调节参数满足下列基本条件

$$0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 < 1, \quad 0 < \gamma_1 < 1 \leq \gamma_2. \quad (6)$$

现在我们给出在信赖域框架下基于二次插值模型的直接搜索算法.

算法 1. 基于二次插值模型的直接搜索算法

步 1. [初始化] 给定初始点 x_s 及其函数值 $f(x_s)$, 选择一个包含 x_s 的初始插值点集 Y . 记其插值半径为 ρ_{beg} . 令 $x_0 \in Y$ 且满足 $f(x_0) = \min_{y_i \in Y} f(y_i)$. 选取信赖域初始半径 Δ_0 和算法终止的控制量 $\rho_{end} > 0$. 令 $k = 0$.

步 2. [建立模型] 利用 Y 中的点建立二次插值模型.

步 3. [极小化二次插值模型] 计算 s_k , 使得 $x_k + s_k \in B_k$ 且使得二次模型充分下降.

步 4. [修正插值点集] 计算 $f(x_k + s_k)$ 和

$$r_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{m_k(x_k) - m_k(x_k + s_k)}. \quad (7)$$

如果 $r_k \geq \eta_1$, 把 $x_k + s_k$ 增加到 Y 中去, 必要的情况下去掉 Y 中的某一点; 如果 $r_k < \eta_1$, 且 Y 在 B_k 中是几何不充分的, 则在 B_k 中修正插值点集 Y .

步 5. [修正信赖域半径] 如果当前的信赖域半径 $\Delta_k \leq \rho_{end}$ 且 Y 在 B_k 中是几何充分的, 则停止迭代, 输出 x_k . 否则令

$$\Delta_{k+1} = \begin{cases} \gamma_1 \|s_k\| & r_k < \eta_1, \text{ 且 } Y \text{ 在 } B_k \text{ 中几何充分;} \\ \Delta_k & \eta_1 \leq r_k < \eta_2; \\ \max\{\gamma_2 \|s_k\|, \Delta_k\} & r_k \geq \eta_2. \end{cases} \quad (8)$$

步 6. [修正当前迭代点]令 $k = k + 1$, 选择 x_{k+1} 使得 $f(x_{k+1})$ 在 Y 中最小, 转步 2.

众所周知, 当模型的下降量满足广义 Cauchy 条件

$$m_k(x_k) - m_k(x_k + s_k) \geq \kappa_{red}[m_k(x_k) - m_k(x_k^c)], \quad (9)$$

其中 $\kappa_{red} \in (0, 1)$ 时, 在信赖域框架下的算法具有全局收敛性. 满足广义 Cauchy 条件即为步 3 中充分下降的要求.

文献 [11,12] 得出的结论是在信赖域框架下的算法效率依赖于参数 $\Delta_0, \eta_1, \eta_2, \gamma_1$ 和 γ_2 . 在信赖域框架下的牛顿法中参数选取原则为 $\Delta_0 = \mu \|\nabla f(x_0)\|, \mu \in (0, 1), \eta_1, \eta_2, \gamma_1$ 和 γ_2 满足 (6). 通用的参数选为

$$\Delta_0 = 0.1 \|\nabla f(x_0)\|, \quad \eta_1 = 0.25, \quad \eta_2 = 0.75, \quad \gamma_1 = 0.5, \quad \gamma_2 = 2. \quad (10)$$

但对于信赖域框架下基于二次插值模型的直接搜索算法, 目前还没有得到一个好的参数标准. Powell^[10] 采用的参数为

$$\Delta_0 = 0.1, \quad \eta_1 = 0.1, \quad \eta_2 = 0.7, \quad \gamma_1 = 0.5, \quad \gamma_2 = 1.25. \quad (11)$$

但这些参数的有效性并未得到证实.

如何选择这些参数, 算法 1 的效率对这些参数的依赖程度如何将通过系列数值试验来得到答案. 此外, 我们还检验 $\eta_1 = 0$ 时算法 1 是否不出现非正常终止.

3. 数值试验的设计

现在讨论数值试验中的算法 1 效率的度量, 试验函数以及参数选择. 首先需要解决的是如何衡量算法 1 的效率. 因为假设函数值的计算费用很高, 所以函数值的计算次数应为主要指标. 考虑算法 1 的效率离不开算法的执行时间且每步迭代都要对信赖域子问题求解, 所以 CPU 时间和迭代次数也是较为重要的指标. 在选择好这三个指标后, 在算法 1 第 4 步中选择

$$\Delta_k \leq \rho_{end} = 10^{-5} \quad (12)$$

作为算法收敛的标准. 如果算法在计算函数值次数或迭代次数超过 5000 还没有达到算法收敛的标准, 则认为算法是计算失败的.

算法 1 的计算复杂度为 $O(n^4)$ ^[10], 比较适合求变量个数不超过 20 个的无约束优化问题. 在许多不能计算导数的实际问题中, 问题变量个数一般并不多. 此外, 在数值试验中需要考察参数的不同取值范围, 因此不宜取较多的试验问题. 参照文献 [11] 中试验问题的数量我们选择了 20 个标准试验问题, 它们的名称和变量个数见表 1 (其中问题 7 和 8 取自 [15], 其余的均取自 [16]). 这些问题在无约束优化问题中是具有代表性的.

现在来讨论数值试验的参数选择. 首先考虑的是信赖域初始半径. 在信赖域框架下的牛顿法^[17] 中一般选择信赖域初始半径为 $\Delta_0 = \mu \|\nabla f(x_0)\|, \mu \in (0, 1)$. Gould^[11] 等人在测试信赖域牛顿算法时取 $\mu = 0.1$. 然而在算法 1 中 $\nabla f(x)$ 无法直接获得. 根据直接搜索算法的收敛性分析知 g_k 为 $\nabla f(x_k)$ 的近似, 一个自然的想法是取 $\Delta_0 = \mu \|g_0\|$. 但是经过一些初步的计算我们发现对不同试验函数 $\|g_0\|$ 变化很大, 有的接近 0, 有的超过 10^9 . 因此需要重新考虑规则.

表 1 试验问题

No.	Name	Dim.	No.	Name	Dim.
1	Rosenbrock	14	2	Wood	12
3	Powell singular	16	4	Cragg and Levy	16
5	Broyden tridiagonal	18	6	Broyden banded	17
7	Cubic	12	8	Trigonometric	18
9	Brown 2	16	10	Penalty 1	18
11	Penalty 3	12	12	Seven diagonal Broyden tridiagonal	16
13	Brown 1	16	14	Banded trigonometric	18
15	Sparse Nazareth trigonometric	18	16	Another trigonometric	18
17	Toint trigonometric	15	18	Augmented Lagrangian	16
19	Boundary value	15	20	Variational	18

此外, 初始插值半径 ρ_{beg} 也是一个重要参数. 算法 1 利用函数值建立模型, 然后在信赖域框架内求解子问题. 如插值范围较大, 则模型近似函数的效果一般较差, 否则近似效果一般会较好. 故模型逼近目标函数的效果依赖于插值半径. 因为模型建立在初始插值半径之内, 信赖域初始半径应与初始插值半径相当. 为检验起见, 我们选择信赖域初始半径 Δ_0 与初始插值半径 ρ_{beg} 的比例范围是 $0.5 \sim 1.5$.

下面的数值结果表明, 超过 $0.5 \sim 1.5$ 的范围的算法 1 的结果很差, 而信赖域初始半径与初始插值半径相同时算法 1 的结果最好. 因此我们在后面的试验中取初始插值半径 Δ_0 与参数 Δ_0 相同, 并在 $(0,6]$ 的范围内选取的不同实验值如下

$$\Delta_0 = \{0.01, 0.04, 0.1, 0.4, 0.7, 1.0, 2.0, 4.0, 5.0, 6.0\}.$$

对于位移接受准则和信赖域半径调整的参数 $\eta_1, \eta_2, \gamma_1, \gamma_2$, 我们参照文献 [11] 和 [10] 选取 $(\eta_1, \eta_2) \in S_\eta, (\gamma_1, \gamma_2) \in S_\gamma$, 其中

$$S_\eta = \{(\eta_1, \eta_2) | \eta_1 \in \{0, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45\}, \eta_2 \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}\},$$

$$S_\gamma = \{(\gamma_1, \gamma_2) | \gamma_1 \in \{0.25, 0.33, 0.5, 0.66, 0.75\}, \gamma_2 \in \{1.25, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 5\}\}.$$

这样试验的参数 $(\Delta_0, \eta_1, \eta_2, \gamma_1, \gamma_2)$ 共 15750 组. 对于每一个标准问题我们利用 15750 组不同参数所得到的直接搜索算法来计算. 因此 20 个标准问题有 305000 次计算实验. 在检验信赖域初始半径应与初始插值半径的关系时, 我们进行了另外的 305000 次计算实验. 合起来共进行了 61 万次计算实验. 我们采用双精度, 用 Fortran77 编写程序在 AMD1.61G Hz, 480M 内存的个人电脑上进行所有计算.

4. 数值结果分析

4.1 指标之间的关系

按照通常衡量算法的标准, 我们选择的算法收敛时的函数值计算次数, 迭代次数和 CPU 时间作为主要指标. 数值试验表明这三个指标是密切相关的. 一般说来函数值计算次数越多时, 迭代次数也越多, 相应的 CPU 时间也就越长. 计算结果显示对算法 1 而言平均函数值

计算次数分别与平均 CPU 时间, 平均迭代次数近似为线性关系. 图 1 和图 2 给出了 $\rho_{beg} = \Delta_0 = 0.7$ 时这种对应关系, 其余的不同信赖域初始半径有类似的结论. 因此为简单起见, 在下面的比较实验中仅把平均函数值计算次数作为衡量算法好坏的指标.

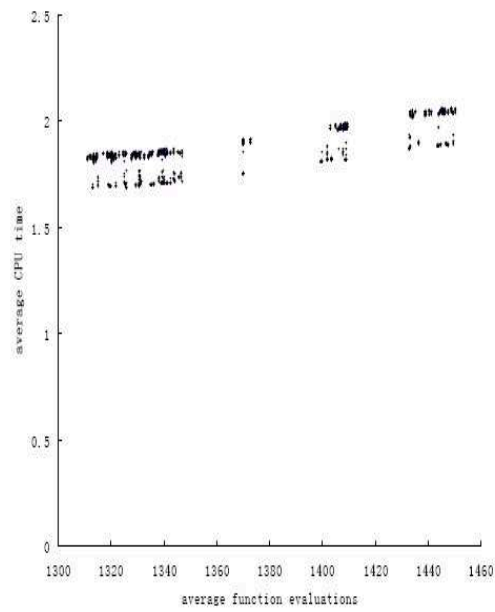


图 1 函数值计算次数与 CPU 的关系

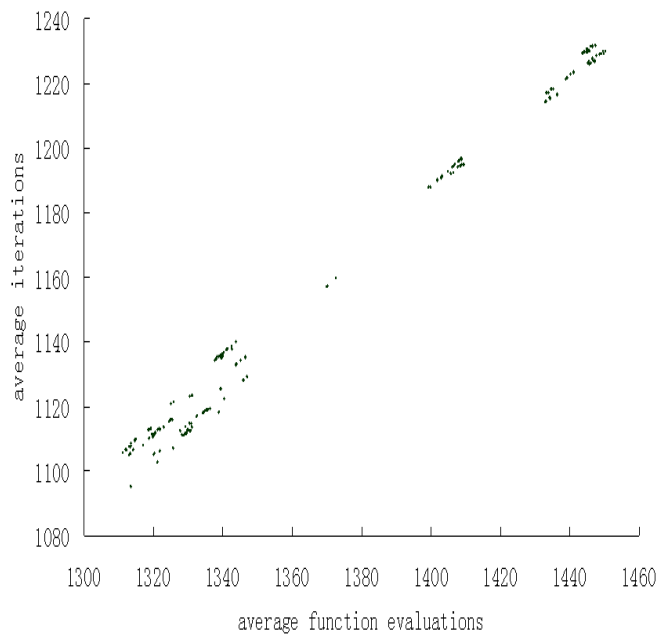


图 2 平均函数值计算次数与平均迭代次数的关系

4.2 初始插值半径与信赖域初始半径

现在我们讨论初始插值半径与信赖域初始半径的关系. 我们选择初始插值半径 ρ_{beg} 分别为 0.1 和 0.4, 信赖域初始半径 Δ_0 分别为 ρ_{beg} 的 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5 倍, 参数 $(\eta_1, \eta_2) \in S_\eta$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_\gamma$. 数值试验的结果见表 2, 其中 Average 表示相应的 ρ_{beg} 和 Δ_0 时取所有不同 4 个参数的算法 1 解所有试验问题的平均函数值计算次数.

表 2 初始插值半径与信赖域初始半径的关系

$\rho_{beg} = 0.1$		$\rho_{beg} = 0.4$	
Δ_0	Average	Δ_0	Average
0.05	1316.03	0.20	1444.46
0.08	1308.75	0.32	1386.70
0.1	1283.75	0.40	1394.48
0.12	1308.75	0.48	1381.77
0.15	1286.16	0.60	1399.14

我们发现, 如果 Δ_0 分别为 ρ_{beg} 的 0.1, 0.2 或 2 倍时, 有些试验问题的函数值计算次数超过了 5000. 由表 2 可见, 信赖域初始半径与初始插值半径相等时效果较好. 因此为了减少试验次数, 在后面的数值试验中我们总是令初始插值半径与信赖域初始半径相等.

4.3 信赖域初始半径的范围分析

我们先分别固定信赖域初始半径, 让其他参数取遍所有试验值, 计算的结果见表 3. Best 所对应的 4 个参数称为最佳参数, 表示对于同一个信赖域初始半径时用这 4 个参数的算法 1 解 20 个问题平均函数值计算次数 (ANF) 最少. Worst 所对应的 4 个参数称为最差参数, 表示对于同一个信赖域初始半径时用这 4 个参数的算法 1 解 20 个问题平均函数值计算次数 (ANF) 最多. Average 所对应的值表示对于同一个信赖域初始半径时取所有不同 4 个参数的算法 1 解所有问题的平均函数值计算次数. all 表示 γ_1 或 γ_2 遍取 S_γ 中所有的值, 第三行 ≤ 0.35 表示 η_1 取遍 S_η 中所有 ≤ 0.35 的值, 其他类似表示式意义相同.

当信赖域初始半径取为 6.0 时, 解问题 13 和 18 的计算函数值的次数均超过 5000, 因此表 3 未列出此时的计算结果. 从表 3 可以看出当信赖域初始半径不变时, 最佳参数, 最差参数以及所有参数的平均函数值计算次数相差较少, 最大相差不到 10%. 当信赖域初始半径小于 0.04 或大于 5.0 时, 平均函数值计算次数变化较大. 当信赖域初始半径在 0.1 左右时, 函数值计算次数较少; 在 0.01 时, 函数值计算次数最多. 产生这一现象的原因可能是当插值点集中在过分小的范围时, 造成了数值上的近似相关性, $|\delta(Y)|$ 的值也较小, 从而子问题变为坏条件的. 当信赖域初始半径大于 1.0 时, 函数值的平均计算次数逐渐增大, 这表明当初始信赖域和插值半径较大时, 二次插值模型近似目标函数的效果逐渐变差, 已经不能够较好逼近目标函数的变化. 当信赖域初始半径增大到 6 时, 算法 1 对有些问题失败. 因此我们可以认为算法 1 的函数值的计算次数即算法效率很大程度上依赖于信赖域初始半径的选取.

在表 3 中我们发现信赖域初始半径的选取在 $[0.04, 0.4]$ 之间函数值平均计算次数较少. 为了确定较好的区间, 我们对 $[0.04, 0.4]$ 进一步细划取 18 个不同的值, 其他参数取 $\Delta_0 = 0.1$ 对

应的最佳参数, 即 $\eta_1 = 0.35, \eta_2 = 0.6, \gamma_1 = 0.75, \gamma_2 = 1.25$, 得到结果见表 4.

表 3 信赖域初始半径对函数值计算次数的影响

Δ_0	Best					Worst					Average
	η_1	η_2	γ_1	γ_2	ANF	η_1	η_2	γ_1	γ_2	ANF	
0.01	0.1	0.5	0.33	all	1879.25	0.4	≥ 0.7	≥ 0.5	all	1899.85	1884.02
0.04	0.15	0.7	0.75	all	1379.85	0.15	0.5	0.33	all	1429.00	1399.81
0.1	≤ 0.35	0.6	0.75	all	1253.10	0.25	0.9	0.5	all	1323.10	1283.83
0.4	0.4	0.6	0.75	all	1363.65	0.15	0.5	0.75	all	1494.40	1394.48
0.7	0.2	0.8	0.5	all	1311.15	0.15	0.5	0.66	all	1450.40	1370.53
1.0	0.4	0.5	0.66	all	1429.85	0	0.6	0.5	all	1579.85	1486.06
2.0	0	0.5	all	all	1344.65	0.4	0.6	≥ 0.33	all	1513.90	1392.02
4.0	0.35	0.6	all	all	1439.50	0	0.9	all	all	1495.75	1418.08
5.0	0.3	0.6	all	all	1415.20	0	0.7	all	all	1539.10	1450.30

表 4 小范围信赖域初始半径计算结果

Δ_0	ANF	Δ_0	ANF	Δ_0	ANF
0.04	1392.55	0.18	1318.50	0.30	1384.75
0.06	1315.60	0.20	1308.00	0.32	1300.20
0.08	1290.65	0.22	1314.20	0.34	1394.65
0.12	1324.70	0.24	1443.85	0.36	1380.30
0.14	1320.30	0.26	1386.65	0.38	1413.35
0.16	1403.35	0.28	1365.30	0.40	1429.50

从表 4 的结果可见, 信赖域初始半径选择在 $[0.06, 0.22]$ 之间较好.

4.4 其它参数的分析

表 5 $\Delta_0 = 0.1$ 时 γ_2 对 CPU 的影响

η_1	η_2	η_1	γ_2	CPU	ANF	AI
0	0.5	0.25	all	31.062~31.734	1263.55	1079.60
0.1	0.5	0.33	all	31.75~32.235	1263.85	1092.25
0.15	0.6	0.5	all	32.609~33.813	1316.55	1121.90
0.2	0.7	0.75	all	33.594~33.906	1267.00	1070.70
0.45	0.9	0.66	all	34.590~34.734	1298.45	1113.30

从表 3 中我们已经知道, 参数 $\eta_1, \eta_2, \gamma_1, \gamma_2$ 的变化对平均函数值计算次数的影响较小. 现在我们取信赖域初始半径 $\Delta_0 = 0.1$, 进一步考查 4 个参数变化对平均迭代次数和计算时间的影响, 计算结果见表 5, 其中 AI 代表平均迭代次数, CPU 表示计算时间, 以秒为单位. 计算结

果表明参数 γ_2 对平均函数值计算次数和平均迭代次数几乎没有影响, 只对 CPU 时间起到微小的影响.

至于剩余的三个参数的影响, 由于平均函数值计算次数最少是为 1253.10, 最多是为 1323.10, 其最大差值小于 6%. 因此我们可以认为算法 1 对位移接受准则与信赖域半径调整参数不敏感. 它们的推荐值为 $\eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.7, \gamma_1 = 0.75, \gamma_2 = 1.25$.

虽然 $\eta_1 = 0$ 时在理论上不能保证算法 1 一定收敛到稳定点, 但试验表明取 $\eta_1 = 0$ 时算法 1 对试验问题仍能收敛, 这与文献 [11] 对信赖域牛顿法的实验结果是相同的.

5. 结 论

我们选择了二十个无约束最优化中具有代表性的问题, 对基于二次插值模型的直接搜索算法的进行了 60 万次以上的数值试验. 结果表明, 选取信赖域初始半径和初始插值半径相等为好, 算法 1 的效率在很大程度上依赖于信赖域初始半径, 推荐的信赖域初始半径选择区间为 $[0.06, 0.22]$. 算法 1 的效率对其它信赖域参数不敏感, 这些参数的推荐值为 $\eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.7, \gamma_1 = 0.75, \gamma_2 = 1.25$. 此外, 实验表明, Powell^[10] 的参数选择 (11) 也是合理的.

参 考 文 献

- [1] Levenberg K. A method for the solution of certain problems in least square. Quarterly Journal on Applied Mathematics, 1944, 2: 164-168.
- [2] More J J. Recent developments in algorithms and software for trust region methods. In: A. Bachem, M. Grottschel and B. Korte (eds), Mathematical Programming: The state of the art. Berlin Heidelberg New York, Springer, 1983, 258-287.
- [3] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [4] Powell M J D. A direct search optimization method that models the objective and constrained functions by linear interpolation. In: S. Gomez and J. P. Hennart(eds), Advances in Optimization and Numerical Analysis. Dordrecht, Kluwer Academic, 1994, 51-67.
- [5] Powell M J D. Direct search algorithms for optimization calculations[J]. Acta Numerica, 1998, 7: 287-336.
- [6] Conn A R and Toint Ph L. An algorithm using quadratic interpolation for unconstrained optimization. In: G.Di Pillo, F. Gianessi (eds), Nonlinear Optimization and Applications. New York, Plenum Publishing, 1996, 27-47.
- [7] Conn A R, Scheinberg K and Toint Ph L. On the convergence of derivative free methods for unconstrained optimization. In: A. Iserles and M. Buhmann (eds), Approximation Theory and Optimization: Tributes to M.J.D. Powell. Cambridge, Cambridge University Press, 1997, 83-108.
- [8] Conn A R, Scheinberg K and Toint Ph L. Recent progress in unconstrained nonlinear optimization without derivatives, Math. Program., 1997, 97: 397-414.
- [9] Ni Q and Hu S H. A new derivative free optimization method based on conic interpolation model[J]. ACTA Mathematica Scientia, 2004, 24: 281-290.
- [10] Powell M J D. UOBYQA: unconstrained optimization by quadratic approximation[J]. Math. Program., 2002, 92: 555-582.
- [11] Gould N I M, Orban D, Sartenaer A and Toint Ph L. Sensitivity of trust-region algorithms to their parameters[J]. 4OR, 2005, 3: 227-241.

-
- [12] Sartenaer A. Automatic determination of an initial trust region in nonlinear programming[J]. SIAM J. Sci. Comput., 1997, 18: 1788-1803.
 - [13] Sauer Th and Yuan X. On multivariate polynomial interpolation[J]. Mathematics of Computation, 1995, 64: 1147-1170.
 - [14] More J J and Sorensen D C. Computing a trust region step[J]. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1983, 4: 553-572.
 - [15] 孙文瑜, 徐成贤, 朱德通. 最优化方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
 - [16] Luksan L and Vlcek J. Test problems for unconstrained optimization[R]. Technique Report 2003 No.897, of Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic.
 - [17] Conn A R, Gould N I M and Toint Ph L. LANCELOT: a Fortran package for large-scale nonlinear optimization(Release A). Springer Series in Computational Mathematics, No. 17, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1992.