不可约 M- 矩阵最小特征值的新算法[*1)]

段复建
(西安交通大学理学院科学计算系 西安 710049)
(桂林电子工业学院计算科学与数学系 桂林 541004)
张可村
(西安交通大学理学院科学计算系 西安 710049)

摘　　要

我们利用 M- 矩阵与非负矩阵的关系，给出了求不可约 M- 矩阵最小特征值的新算法，该算法具有计算量小，易在计算机上实现的特点，且可以达到实际需要的精度，并给出了收敛性证明．数值实验表明该算法具有可行性和有效性．

关键词： 不可约，M- 矩阵，最小特征值

A NEW ALGORITHM FOR THE MINIMAL EIGENVALUE OF IRREDUCIBLE M-MATRIX

Duan Fujian
(*Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an,* 710049)
(*Guilin Institute of Electronic Technology, Guilin,* 541004)
Zhang Kecun
(*Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an,* 710049)

Abstract

In this paper, A new algorithm of the minimal eigenvalue for an irreducible M-matrix was proposed, following from the relation between the M-matrix and the nonnegative matrix. Numerical examples show that the algorithm is effective.

Key words: irreducible, M-matrix, the minimal eigenvalue

§1. 引　　言

在工程研究中，很多问题可以归结为特殊矩阵的特征值计算，关于矩阵特征值的计算方法及其在计算机上的实现受到人们的广泛关注，产生了许多算法，见参考文献 [1]-[3]．在实际问题中有时仅需要计算特殊矩阵的最大或最小特征值，需要对特殊矩阵的最大或最小特征

∗ 2004 年 7 月 12 日收到.
1) 国家自然科学基金项目 (10361003) 资助.

值的上、下界进行估计, 且要求界宽要足够的窄, 即精度要达到实际需要的水平, 对于这个问题有很多结果, 见参考文献 [4]-[6]. 在前面结果的基础上, 我们利用 M- 矩阵与非负矩阵的关系, 给出了计算不可约 M- 矩阵的最小特征值的一种算法. 该算法迭代过程简洁, 不用计算逆矩阵, 从而计算量小, 占用内存少, 便于在计算机上实现. 重要的是可以达到实际所需的精度, 理论上给出了收敛性证明, 最后, 我们根据此算法进行了数值实验, 其结果表明该算法具有可行性和有效性.

设 $G=(g_{ij})_{n\times n}$ 是不可约 M- 矩阵, 令 $R>\max\limits_i g_{ii},\quad i\in N,\quad N=\{1,2,\cdots,n\}$, 于是有 $A=RI-G=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中 I 是 n 阶单位阵, 此时 A 为具有正对角元 $(a_{ii}>0)$ 的非负不可约矩阵. 如果 ρ 是 A 的最大特征值, 则 $\omega=R-\rho$ 为 G 的最小特征值, 至此不可约 M- 矩阵 G 的最小特征值的算法依赖于具有正对角元的非负不可约矩阵 A 的最大特征值的算法.

§2. 主要结果

设 $A=A_0=(a_{ij}^0)_{n\times n}$ 是非负不可约矩阵并且 $a_{ii}>0,\ i\in N$, 计算它的行和 $b_i^0=\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^0$, 得最小行和 $s_0=\min\limits_i b_i^0$ 和最大行及 $S_0=\max\limits_i b_i^0$. 众所周知, A 的最大特征值 ρ 介于最小行和最大行和之间, 即 $s_0\le\rho\le S_0$. 如果 $s_0=S_0$, 那么 $\rho=s_0=S_0$, 因此本文只考虑 $s_0<S_0$ 的情形. 取 $B_0=diag(\ b_1^0,\ b_2^0,\ \cdots,\ b_n^0)$, 我们可以得到与 A_0 相似的非负不可约矩阵 $A_1=B_0^{-1}A_0B_0=(a_{ij}^1)_{n\times n}$. 特征值不变. 对 A_1 计算其行和 $b_i^1=\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^1$, 得 $s_1=\min\limits_i b_i^1$ 和 $S_1=\max\limits_i b_i^1$. 此时有 $s_1\le\rho\le S_1$, 取 $B_1=diag(\ b_1^1,\ b_2^1,\ \cdots,\ b_n^1)$, 得到 $A_2=B_1^{-1}A_1B_1=(a_{ij}^2)_{n\times n}$ 与 A_0,A_1 相似. 如此下去, 由 $A_{m+1}=B_m^{-1}A_mB_m=(a_{ij}^{m+1})_{n\times n}\ (m=0,1,2,\cdots)$ 得到相似的矩阵序列 $\{A_m\}$, 最小行和序列 $\{s_m\}$ 与最大行和序列 $\{S_m\}$.

下面给出主要结果:

引理 1. 设 A 是非负不可约矩阵且 $a_{ii}>0,i\in N,\quad \rho$ 是 A 的最大特征值, p,q 是任意正整数, $\{A_m\}$ 是上面的迭代矩阵序列, 有:

(1) 最小行和序列 $\{s_m\}$ 是单调递增序列且有界, 最大行和序列 $\{S_m\}$ 是单调递减序列且有界;

(2) ρ 介于迭代序列中 A_p 和 A_q 的最小行和与最大行和之间, 即 $s_p\le\rho\le S_q$.

证明. 因为

$$b_i^{m+1}=\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m+1}=\sum_{j=1}^n\frac{b_j^m}{b_i^m}a_{ij}^m=\frac{1}{b_i^m}\sum_{j=1}^n a_{ij}^m b_j^m\ ,$$

于是有

$$s_m=\frac{s_m}{b_i^m}\sum_{j=1}^n a_{ij}^m\le b_i^{m+1}\le\frac{S_m}{b_i^m}\sum_{j=1}^n a_{ij}^m=S_m\ ,$$

即 $s_m \le b_i^{m+1} \le S_m$, 从而 $s_m \le s_{m+1} \le \rho \le S_{m+1} \le S_m$, 即证引理的两个结论.

引理 2. 最小行和序列 $\{s_m\}$ 与最大行和序列 $\{S_m\}$ 的极限均等于 A 的最大特征值 ρ, 即 $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = \lim\limits_{m\to\infty} S_m = \rho$.

证明. 对于任意的 $A_m = (a_{ij}^m)_{n\times n}$, 我们有下面两个结论:

(1) 由迭代过程容易得到, 当 $a_{ij}^0 \neq 0$ 时, $a_{ij}^m \neq 0$; $a_{ii}^m = a_{ii}^0 > 0$.

(2) 由 A_m 是不可约的且主对角元 $a_{ii}^m > 0$, 可知 A_m 中的每一行至少有两个非零元素, 于是当 $a_{ij}^m \neq 0$ 时, 有 $a_{ij}^m < b_i^m \le S_m$, 由引理 1 可得 $a_{ij}^m < S_0$.

进一步有

$$a_{ij}^m = a_{ij}^{m-1}\frac{b_j^{m-1}}{b_i^{m-1}} = a_{ij}^{m-2}\frac{b_j^{m-1}b_j^{m-2}}{b_i^{m-1}b_i^{m-2}} = \cdots = a_{ij}^0\frac{b_j^{m-1}b_j^{m-2}\cdots b_j^0}{b_i^{m-1}b_i^{m-2}\cdots b_i^0} = a_{ij}^0 D_{ij}^m < S_0,$$

其中

$$D_{ij}^m = \frac{b_j^{m-1}b_j^{m-2}\cdots b_j^0}{b_i^{m-1}b_i^{m-2}\cdots b_i^0}.$$

取 $r = \min\limits_{i,j}\{a_{ij}^0 \neq 0\}$, 于是

$$D_{ij}^m < \frac{S_0}{r}, \qquad D_{ji}^m = \frac{1}{D_{ij}^m} > \frac{r}{S_0}.$$

由 i, j, m 的任意性, 我们得到

$$\frac{r}{S_0} < D_{ij}^m < \frac{S_0}{r}, \quad \frac{r^2}{S_0} < a_{ij}^m < \frac{S_0^2}{r}.$$

利用上式, 我们用反证法证明 $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \rho$.

假设 $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \bar{\rho} > \rho$, 记 $h = \bar{\rho} - \rho$, 显然 $h > 0$, 于是应有 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M$, 当 $m > M$ 时, 有 $|S_{m+k} - S_m| < \varepsilon$ 成立.

在 A_m 中, 设取到 s_m 的行标集合为 L_m, 记 $J_m = N - L_m$, 因为 A_m 不可约且强连接, J_m 与 L_m 必有非零元素链相连接. 记 T_i 为 J_m 中与 L_m 第 i 级连接的行标集合, k 为最高级数, 则 $J_m = T_1 \bigcup T_2 \bigcup \cdots \bigcup T_k$, $\quad 1 \le k < n$.

下面分别对 i 属于 $L_m, T_1, T_2, \cdots, T_k$ 计算 b_i^{m+k}:

当 $i \in L_m$ 时,

$$\begin{aligned} b_i^{m+1} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}^{m+1} = \sum_{j=1}^n \frac{b_j^m}{b_i^m} a_{ij}^m = \sum_{j=1}^n \frac{S_m - S_m + b_j^m}{b_i^m} a_{ij}^m = S_m - \sum_{j=1}^n \frac{S_m - b_j^m}{b_i^m} a_{ij}^m \\ &\le S_m - \frac{a_{ii}^m}{b_i^m}(S_m - b_i^m) < S_m - \frac{r^2}{S_0^2}h = S_m - \varepsilon_1 \qquad \left(\varepsilon_1 = \frac{r^2}{S_0^2}h\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_i^{m+2} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}^{m+2} = S_m - \sum_{j=1}^n \frac{S_m - b_j^{m+1}}{b_i^{m+1}} a_{ij}^{m+1} \le S_m - \frac{a_{ii}^{m+1}}{b_i^{m+1}}(S_m - b_i^{m+1}) \\ &< S_m - \frac{a_{ii}^{m+1}}{b_i^{m+1}}[S_m - (S_m - \varepsilon_1)] < S_m - \frac{r^2}{S_0^2}\varepsilon_1 = S_m - \varepsilon_2 \qquad \left(\varepsilon_2 = \frac{r^2}{S_0^2}\varepsilon_1 = \frac{r^4}{S_0^4}h\right). \end{aligned}$$

同理

$$b_i^{m+k}=\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m+k-1}=S_m-\sum_{j=1}^n\frac{S_m-b_j^{m+k-1}}{b_i^{m+k-1}}a_{ij}^{m+k-1}$$

$$\le S_m-\frac{a_{ii}^{m+k-1}}{b_i^{m+k-1}}(S_m-b_i^{m+k-1})<S_m-\frac{a_{ii}^{m+k-1}}{b_i^{m+k-1}}[S_m-(S_m-\varepsilon_{k-1})]$$

$$<S_m-\frac{r^2}{S_0^2}\varepsilon_{k-1}=S_m-\varepsilon_k\qquad\left(\varepsilon_k=\frac{r^2}{S_0^2}\varepsilon_{k-1}=\frac{r^{2k}}{S_0^{2k}}h\right).$$

当 $i\in T_1$ 时, 必存在 $a_{il}\neq 0,\ l\in L_m$

$$b_i^{m+1}=\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m+1}=S_m-\sum_{j=1}^n\frac{S_m-b_j^m}{b_i^m}a_{ij}^m\le S_m-\frac{a_{il}^m}{b_i^m}(S_m-b_l^m)<S_m-\frac{r^2}{S_0^2}h$$

$$=S_m-\varepsilon_1\qquad(b_l^m=s_m),$$

$$b_i^{m+2}=\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m+2}=S_m-\sum_{j=1}^n\frac{S_m-b_j^{m+1}}{b_i^{m+1}}a_{ij}^{m+1}\le S_m-\frac{a_{il}^{m+1}}{b_i^{m+1}}(S_m-b_l^{m+1})$$

$$<S_m-\frac{r^2}{S_0^2}[S_m-(S_m-\varepsilon_1)]=S_m-\varepsilon_2\qquad(b_i^{m+1}<S_m-\varepsilon_1).$$

同理 $b_i^{m+k}<S_m-\varepsilon_k$.

当 $i\in T_2$ 时, 必存在 $a_{it_1}a_{t_1l}\neq 0,\ t_1\in T_1, l\in L_m$,

$$b_i^{m+2}=\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m+2}=S_m-\sum_{j=1}^n\frac{S_m-b_j^{m+1}}{b_i^{m+1}}a_{ij}^{m+1}\le S_m-\frac{a_{it_1}^m}{b_i^{m+1}}(S_m-b_{t_1}^{m+1})$$

$$<S_m-\frac{r^2}{S_0^2}[S_m-(S_m-\varepsilon_1)]=S_m-\varepsilon_2\qquad(b_{t_1}^{m+1}<S_m-\varepsilon_1),$$

$$b_i^{m+3}=\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m+3}=S_m-\sum_{j=1}^n\frac{S_m-b_j^{m+2}}{b_i^{m+2}}a_{ij}^{m+2}\le S_m-\frac{a_{it_1}^{m+2}}{b_i^{m+2}}(S_m-b_{t_1}^{m+2})$$

$$<S_m-\frac{r^2}{S_0^2}[S_m-(S_m-\varepsilon_2)]=S_m-\varepsilon_3\qquad(b_{t_1}^{m+2}<S_m-\varepsilon_2).$$

同理 $b_i^{m+k}<S_m-\varepsilon_k$.

用类似的方法可以证明当 $i\in T_3,T_4,\cdots,T_k$ 时均有 $b_i^{m+k}<S_m-\varepsilon_k$, 即对任意 $i\in N$, 均有 $b_i^{m+k}<S_m-\varepsilon_k$, 因此 $|S_{m+k}-S_m|>\varepsilon_k$ 产生矛盾, $\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\rho$ 得证.

同理可证 $\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\rho$.

在参考文献 [4] 中, 给出了关于正矩阵最大特征值算法的证明, 并指出此算法可以推广到非负矩阵, 其结果是: 设 $A\ge 0$, 当 $\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\lim\limits_{m\to\infty}S_m$ 时, 有 $\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\rho$. 条件等式的验证是很困难的, 从而使算法的应用受到一定的限制, 引理 2 从理论上指出当 A 是不可约且主对角元大于零时条件等式成立, 给出了上述结论的理论依据.

综上我们得到:

定理 3. 设 G 是不可约 M –矩阵, ω 是 G 的最小特征值, p,q 是任意正整数, 则 $\omega = R - \lim\limits_{p\to\infty} s_p = R - \lim\limits_{q\to\infty} S_q$, 其中 $R > \max\limits_i g_{ii}$, $A = RI - G = (a_{ij})_{n\times n}$, $s_p = \min\limits_i b_i^p$, $S_q = \max\limits_i b_i^q$.

§3. 算法及数值实验

算法:

步骤 0. 输入不可约矩阵 $G = (g_{ij})_{n\times n}$, $\quad \varepsilon > 0$;

步骤 1. 取 $R = 1 + \max\limits_i g_{ii}$, 令 $A = RI - G = (a_{ij})_{n\times n}$;

步骤 2. 计算 $b_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, $\quad s = \min\limits_i b_i$, $\quad S = \max\limits_i b_i$;

步骤 3. 如果 $|S - s| < \varepsilon$, 则转步 5, 否则转步 4;

步骤 4. 令 $B = diag(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $\quad B^{-1}AB \Longrightarrow A$, 转步 2;

步骤 5. 输出 $\omega = R - (S + s)/2$.

例 1. 令

$$G = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 8 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 7 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & -1 & 9 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

为不可约 M– 矩阵, 求 G 的最小特征值.

由算法求得例 1 的结果见表 1.

表 1　例 1 的计算结果

迭代次数	精度	ω
17	10^{-4}	0.9444
33	10^{-8}	0.94440470
48	10^{-12}	0.9444046950296
67	10^{-16}	0.9444046950294975
67	10^{-20}	0.94440469502949753178

如果继续提高精度, 迭代次数不再增加, 说明迭代 67 次已经得到 ω 的精确解.

例 2.

$$A=\begin{pmatrix} 1+\frac{2}{n} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2+\frac{4}{n} & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3+\frac{6}{n} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2+\frac{2(n-2)}{n} & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & n-1+\frac{2(n-1)}{n} & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & n+2 \end{pmatrix}.$$

表 2 例 2 的计算结果

矩阵阶数 n	精度	迭代次数	ω
10	10^{-5}	153	0.36667
	10^{-10}	268	0.3666667064
20	10^{-5}	335	0.19091
	10^{-10}	568	0.1909090910
50	10^{-5}	923	0.07847
	10^{-10}	1503	0.0784653851
100	10^{-5}	1977	0.03961
	10^{-10}	3133	0.0396078432

我们可以看到在算法的迭代过程中，主对角线的元素始终是不变的，零元素也始终是零，只有非对角元中的非零元素变化，而且有简单的迭代公式

$$a_{ij}^{m+1}=\frac{b_j^m}{b_i^m}a_{ij}^m,$$

因此实际计算量比较小，不需要求逆矩阵，提高精度以后迭代次数不会剧烈增加，可以达到实际所需的精度，具有较好的实际应用价值.

参 考 文 献

[1] M.Neumann, Inverse of Perron complement of inverse M-matrices, Linear Algebra Appl, 313(2000) 163-171.

[2] Linzhang Lu, Perron complement and Perron root, Linear Algebra Appl, 341(2002) 239-248.

[3] 楼郎媛, 吴保卫, 任林源, 关于 M －矩阵的最小特征值, 陕西师范大学学报, 32:1(2004) 8-10.

[4] 张凤祥, 非负矩阵最大特征值的平滑算法, 高等学校计算数学学报, 23:1(2001) 45-55.

[5] 卢琳璋, 马飞, 非负矩阵 Perron 根的上下界, 计算数学, 25:2(2003) 193-198.

[6] Dursun Taşçi, Steve Kirland, A Sequence of Upper Bounds for the Perron Root of a Nonnegative Matrix, Linear Algebra Appl, 273(1998) 23-28.