

动量方程的一种压强加权法^{*1)}

符尚武 戴自换 邬吉明 沈隆钧

(北京应用物理与计算数学研究所 计算物理实验室 100088)

A PRESSURE WEIGHTED METHOD OF MOMENTUM EQUATION

Fu Shangwu Dai Zihuan Wu Jiming Shen Longjun

(Laboratory of Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088)

Abstract

A pressure weighted method is proposed for numerical solution of the momentum equation in 2D Lagrangian hydrodynamic equations with heat conduction over quadrilateral mesh. It is equivalent to the usual circuit integral method when the mesh is regular. However, when the mesh deforms, it has some advantages over the circuit integral method. It is more accurate and can hold back the unphysical distortion of the Lagrange mesh.

Key words: hydrodynamic, momentum equation, pressure weighted method

§1. 引言

在现代科学技术诸多领域的研究中都要涉及到二维辐射流体力学,特别是要涉及到多介质可压缩二维辐射流体力学.多介质可压缩二维辐射流体的力学运动是很复杂的运动,它的数值模拟具有相当大的难度.目前,求解多介质二维辐射流体力学方程组多采用 Lagrange 方法.拉氏方法的最大优点是能清楚地描述多介质系统的物质界面,但是同时也存在网格的大变形问题.网格大变形的后果是:计算精度下降,使得计算的结果不能反映流场的真实变化;时间步长变小,所需机时大大增加,甚至使计算无法进行下去.解决二维辐射流体力学计算中的大变形问题是二维流体动力学拉氏方法的主要难点之一,也是当前国内外计算流体力学领域的前沿研究课题.

解决拉氏网格大变形问题主要有两条途径:第一条途径是进行网格重分,它包括网格重构和物理量的守恒重映;第二条途径是提高离散格式的精度,即增强离散格式对大变形网格的适应能力.近年来国内外的研究工作表明,单纯采用其中的一条途径无法有效地解决拉氏方法中的大变形问题,只有将以上两条途径的研究结合起来,才是解决拉氏网格大变形问题的最为有效的办法.

* 2003 年 7 月 29 日收到.

1) 本工作得到国家自然科学基金、CAEP 科学技术基金和国防科技重点实验室基金的资助.

动量方程的离散化计算在流体方程组求解中占有重要的地位, 它的计算精度直接影响到流场运动的正确性. 通常采用线或面回路积分方法进行计算, 它是在一个时间步长中, 假设网格中的压强是处处相等的. 如果在计算过程中, 计算区域的网格变形较小, 这个方法还是可以达到我们期望的精度. 如果网格变形大, 这个方法的误差较大, 更容易产生网格非物理变形.

我们提出的压强加权法, 考虑到网格形状的变化, 形成网格内的压强按某种加权分布, 在计算条件相同的情况下, 它比回路积分方法精度高, 对大变形网格具有较强的适应能力, 可以阻滞和延缓 Lagrange 网格的非物理变形.

§2. 动量方程的离散近似

在二维 Lagrange 坐标系中流体力学的动量方程可以写成

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\nabla P, \quad (2.1)$$

其中 ρ 为介质的密度, $U = (u, v)$ 为速度, P 为压强. 考虑 (x, y) 平面上的一个区域 Ω , 其边界为 $\partial\Omega$, A 为区域 Ω 的面积.

在区域 Ω 上积分方程 (2.1), 并应用积分中值定理和 Green 公式, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{dU}{dt} d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla P d\Omega, \\ \rho A \frac{dU}{dt} &= - \oint_{\partial\Omega} P n dl, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$n = (\sin \theta, -\cos \theta)$ 为 dl 上的单位外法线向量. 把 (2.2) 写成两个分量式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho A} \oint_{\partial\Omega} P (dl \cdot \sin \theta) = -\frac{1}{\rho A} \oint_{\partial\Omega} P dy, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho A} \oint_{\partial\Omega} P (dl \cdot \cos \theta) = \frac{1}{\rho A} \oint_{\partial\Omega} P dx. \end{cases} \quad (2.3)$$

如果我们把区域 Ω 取为包围点 0 的角点 $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ 连线所围成的四边形区域 (图 1), 在时间区间 $t^{n-\frac{1}{2}} \leq t \leq t^{n+\frac{1}{2}}$ 上将方程 (2.3) 对 t 求积分并根据中值定理有

$$\begin{cases} u_0^{n+\frac{1}{2}} = u_0^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{(\rho A)_0^n} \left[\oint_{\partial\Omega} P dy \right]^n, \\ v_0^{n+\frac{1}{2}} = v_0^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{(\rho A)_0^n} \left[\oint_{\partial\Omega} P dx \right]^n, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 $\Delta t = \int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} dt = t^{n+\frac{1}{2}} - t^{n-\frac{1}{2}}$.

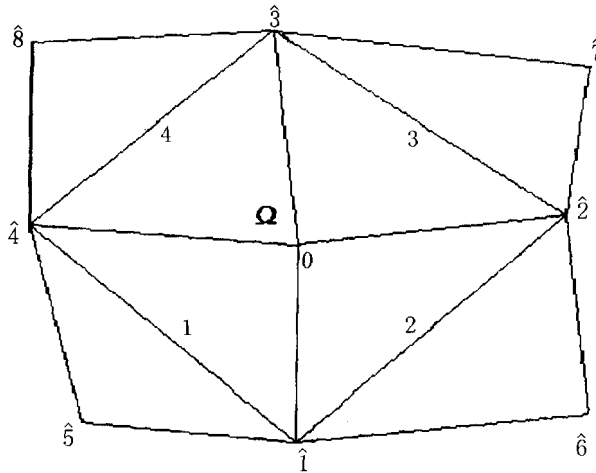


图 1 动量方程回路积分的网格标记图

把 0 点周围的四个四边形网格上的压强看成分片常数, 那么网格 1 的压强可以作为边 $\hat{4}\hat{1}$ 上的压强, 网格 2 的压强可以作为边 $\hat{1}\hat{2}$ 上的压强, 等等. (2.4) 式可以写成

$$\begin{cases} u_0^{n+\frac{1}{2}} = u_0^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{(\rho A)_0^n} \left\{ \sum_{l=1}^4 [P_l (y_l - y_{l-1})]^n \right\}, \\ v_0^{n+\frac{1}{2}} = v_0^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{(\rho A)_0^n} \left\{ \sum_{l=1}^4 [P_l (x_l - x_{l-1})]^n \right\}. \end{cases} \quad (2.5)$$

\hat{l} 为循环指标, 当 $\hat{l} = 1$ 时, $\hat{l} - 1 = \hat{4}$. $(\rho A)_0^n$ 近似的取为

$$(\rho A)_0^n = \frac{1}{2} [(\rho A)_1^n + (\rho A)_2^n + (\rho A)_3^n + (\rho A)_4^n].$$

动量方程的上述离散近似称为线回路积分方法, 前提是在一个时间步长中假定网格上的压强处处相等.

下面我们推导动量方程的压强加权格式. 利用坐标变换把坐标 (x, y) 变换到网格坐标 (k, j) 上去, 变换的 Jacobian 行列式为

$$J = \frac{D(x, y)}{D(k, j)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial k} & \frac{\partial x}{\partial j} \\ \frac{\partial y}{\partial k} & \frac{\partial y}{\partial j} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial k} \frac{\partial y}{\partial j} - \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial x}{\partial j}. \quad (2.6)$$

在 (k, j) 坐标下梯度算子可以写为

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{l}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{l}_2 = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial [y\mathbf{l}_1 - x\mathbf{l}_2]}{\partial j} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{\partial [-y\mathbf{l}_1 + x\mathbf{l}_2]}{\partial k} \frac{\partial}{\partial j} \right\} \\ &= \frac{1}{J} \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial j} \frac{\partial}{\partial k} - \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial}{\partial j} \right] \mathbf{l}_1 + \left[-\frac{\partial x}{\partial j} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{\partial x}{\partial k} \frac{\partial}{\partial j} \right] \mathbf{l}_2 \right\}, \end{aligned}$$

l_1, l_2 为沿 x, y 轴的单位向量. 动量方程 (2.1) 可以写成

$$\frac{dU}{dt} = \frac{du}{dt} l_1 + \frac{dv}{dt} l_2 = -\frac{1}{\rho} \nabla P = -\frac{1}{\rho J} \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial j} \frac{\partial}{\partial k} - \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial}{\partial j} \right] l_1 + \left[-\frac{\partial x}{\partial j} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{\partial x}{\partial k} \frac{\partial}{\partial j} \right] l_2 \right\} P$$

写成分量式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho J} \left[\frac{\partial y}{\partial j} \frac{\partial}{\partial k} - \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial}{\partial j} \right] P, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho J} \left[-\frac{\partial x}{\partial j} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{\partial x}{\partial k} \frac{\partial}{\partial j} \right] P. \end{cases} \quad (2.7)$$

对 (2.7) 式差分得

$$\begin{aligned} u_{k,j}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{k,j}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{(\rho J)_{k,j}^n} \left[\frac{\partial y}{\partial j} \frac{\partial P}{\partial k} - \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial P}{\partial j} \right]_{k,j}^n \\ &= u_{k,j}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2(\rho J)_{k,j}^n} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial j} \right)_{k,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial P}{\partial k} \right)_{k,j} + \left(\frac{\partial y}{\partial j} \right)_{k,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial P}{\partial k} \right)_{k,j} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial y}{\partial k} \right)_{k+\frac{1}{2},j} \left(\frac{\partial P}{\partial j} \right)_{k,j} - \left(\frac{\partial y}{\partial k} \right)_{k-\frac{1}{2},j} \left(\frac{\partial P}{\partial j} \right)_{k,j} \right]^n \\ &= u_{k,j}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2(\rho J)_{k,j}^n} \left[\frac{y_{k,j+1} - y_{k,j}}{(j+1) - j} \frac{(P_3)_{\textcircled{3}} - (P_3)_{\textcircled{4}}}{\left(k + \frac{1}{2}\right) - \left(k - \frac{1}{2}\right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_{k,j} - y_{k,j-1}}{j - (j-1)} \frac{(P_1)_{\textcircled{2}} - (P_1)_{\textcircled{1}}}{\left(k + \frac{1}{2}\right) - \left(k - \frac{1}{2}\right)} - \frac{y_{k+1,j} - y_{k,j}}{(k+1) - k} \right. \\ &\quad \left. \frac{(P_4)_{\textcircled{3}} - (P_4)_{\textcircled{2}}}{\left(j + \frac{1}{2}\right) - \left(j - \frac{1}{2}\right)} - \frac{y_{k,j} - y_{k-1,j}}{k - (k-1)} \frac{[(P_2)_{\textcircled{4}} - (P_2)_{\textcircled{1}}]}{\left(j + \frac{1}{2}\right) - \left(j - \frac{1}{2}\right)} \right]^n. \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{cases} u_{k,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{k,j}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2(\rho J)_{k,j}^n} \left\{ (y_{k,j+1} - y_{k,j}) \left[(P_3)_{\textcircled{3}} - (P_3)_{\textcircled{4}} \right] \right. \\ \quad \left. + (y_{k,j} - y_{k,j-1}) \left[(P_1)_{\textcircled{2}} - (P_1)_{\textcircled{1}} \right] - (y_{k+1,j} - y_{k,j}) \left[(P_4)_{\textcircled{3}} - (P_4)_{\textcircled{2}} \right] \right. \\ \quad \left. - (y_{k,j} - y_{k-1,j}) \left[(P_2)_{\textcircled{4}} - (P_2)_{\textcircled{1}} \right] \right\}^n, \\ v_{k,j}^{n+\frac{1}{2}} = v_{k,j}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2(\rho J)_{k,j}^n} \left\{ (x_{k,j+1} - x_{k,j}) \left[(P_3)_{\textcircled{3}} - (P_3)_{\textcircled{4}} \right] \right. \\ \quad \left. + (x_{k,j} - x_{k,j-1}) \left[(P_1)_{\textcircled{2}} - (P_1)_{\textcircled{1}} \right] - (x_{k+1,j} - x_{k,j}) \left[(P_4)_{\textcircled{3}} - (P_4)_{\textcircled{2}} \right] \right. \\ \quad \left. - (x_{k,j} - x_{k-1,j}) \left[(P_2)_{\textcircled{4}} - (P_2)_{\textcircled{1}} \right] \right\}^n, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$k = 1, 2, \dots, km, \quad j = 1, 2, \dots, jm$$

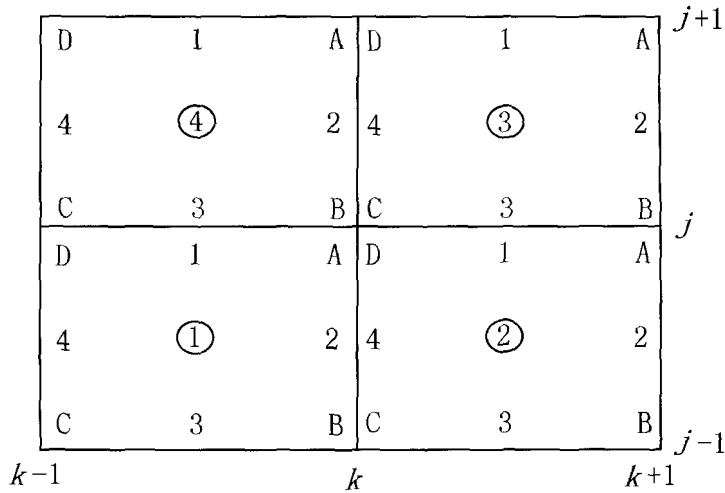


图 2 压强加权法网格标记图

其中

$$(\rho J)_{k,j} = \frac{1}{4} \left[(\rho J)_{k-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (\rho J)_{k+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (\rho J)_{k+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\rho J)_{k-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right],$$

$$k = 1, 2, \dots, km, \quad j = 1, 2, \dots, jm.$$

$$\begin{cases} (P_1)_{\textcircled{1}} = \frac{1}{2} (P_A + P_D)_{\textcircled{1}}, & (P_1)_{\textcircled{2}} = \frac{1}{2} (P_A + P_D)_{\textcircled{2}}, \\ (P_2)_{\textcircled{1}} = \frac{1}{2} (P_A + P_B)_{\textcircled{1}}, & (P_2)_{\textcircled{4}} = \frac{1}{2} (P_A + P_B)_{\textcircled{4}}, \\ (P_3)_{\textcircled{3}} = \frac{1}{2} (P_B + P_C)_{\textcircled{3}}, & (P_3)_{\textcircled{4}} = \frac{1}{2} (P_B + P_C)_{\textcircled{4}}, \\ (P_4)_{\textcircled{3}} = \frac{1}{2} (P_C + P_D)_{\textcircled{3}}, & (P_4)_{\textcircled{2}} = \frac{1}{2} (P_C + P_D)_{\textcircled{2}}, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$(P_\alpha)_\beta = \lambda P_\beta,$$

$$\lambda = \frac{J_\beta}{(J_\alpha)_\beta} \quad (2.10)$$

$$\alpha = A, B, C, D, \quad \beta = \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4},$$

这里, P_β 为网格 β ($= \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}$) 的中心压强, $(P_\alpha)_\beta$ 为网格角点 $\alpha (= A, B, C, D)$ 的压强, J_β 为网格 β 的面积, $(J_\alpha)_\beta$ 为网格 β 内的角点 α 有关的面积, 我们取角 α 两个夹边为长短边的平行四边形的面积. 很显然, 如果计算网格为平行四边形的时候, 则有 $\lambda = 1$, 即 $(P_A = P_B = P_C = P_D = P)_\beta$, 把这个条件代入 (2.8) 式, 就得到 (2.5) 式. 所以, 当计算网格为平行四边形的时候, 压强加权法和回路积分方法是等价的, 回路积分方法仅是压强加权法的一个特例. 然而, 在可压缩流体力学计算过程中, 在一个时间步长中, 对于一个不规则形状的四边形网格, 网格上的压强不可能是处处相等的, 接近短边的压强大于网格中心压强, 接近长边的压强小于网格中心压强. 压强加权法考虑了压强在网格分布的不均匀性, 而回路积分方法没有考虑这种情况, 它是建立在网格上的压强处处相等的基础上, 因此, 压强加权法比回路积分方法更接近流场的真实情况.

§3. 数值实验结果

我们考虑如下的算例，图 3 为激光核聚变中辐射驱动二维柱对称内爆模型及其网格剖分和密度分布图，模型由三层物质构成：里层为氘氚 (DT) 气体，厚度等于 $90\mu\text{m}$ ，中层为玻璃 (SiO_2)，厚度等于 $5\mu\text{m}$ ，外层为泡沫塑料 (CH)，厚度等于 $37\mu\text{m}$ 。初始时刻的计算区域为 $\Omega = \{0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 132\}$ ，按等质量剖分计算网格， $i = 1, \dots, im + 1 = 21$ ； $j = 1, \dots, jm + 1 = 62$ ，网格数等于 $im \times jm = 20 \times 61 = 1220$ 。边界条件为：左边 ($x = 0$) 和右边 ($x = 100$) 为固壁边界条件，下边界 x 轴为对称轴，上边界 $y = Y_m$ 为自由面，上边界加一个随时间和 x 变化的辐射温度源 $T_r(x, Y_m, t)$ 。应用我们编制的二维三温流体动力学程序 LARED-I 计算了上面的模型，图 3—图 10 为压强加权法和回路积分法的计算结果，图中 Y 代表压强加权法，H 代表回路积分法。在计算条件相同的情况下，H 法算到时间 $t = 17.62(0.1\text{ns})$ 因网格严重扭曲而终止，而 Y 法可一直算到时间 $t = 24.87(0.1\text{ns})$ 。从图中可以看出约在时间 $t = 17(0.1\text{ns})$ 之前，由于网格变形不大，所以二者的计算结果是一致的。从图 8 和图 9 可以看出，在相同的时刻 Y 法比 H 法的网格规整，而且省时间，Y 法算到 $t=17.62(0.1\text{ns})$ 用了 113.02 分，H 法用了 132.53 分。（注：时间单位为 0.1ns ，即 0.1 毫微秒 $=10^{-10}$ 秒）。

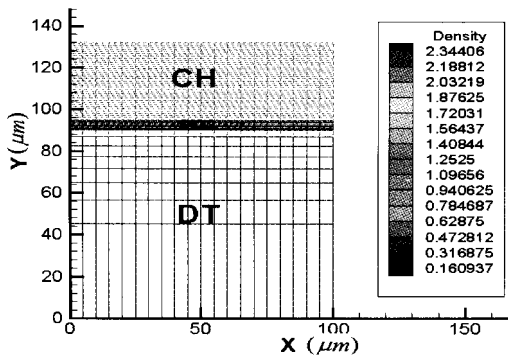


图 3 二维柱对称模型示意图

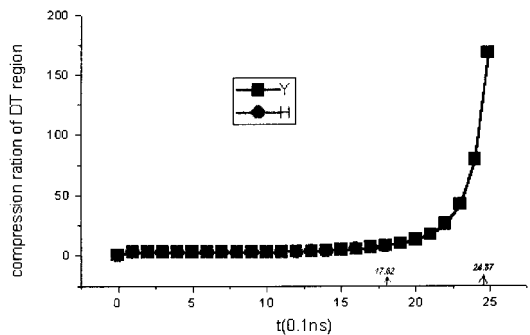


图 4 DT 区压缩比随时间 t 的分布曲线图

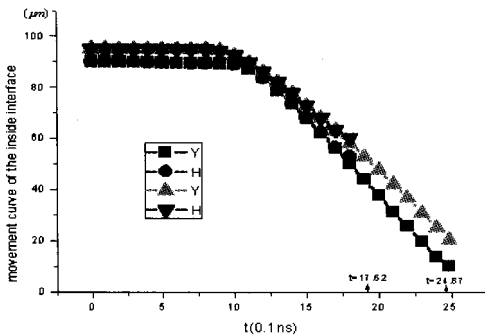


图 5 两个内界面 $r(10,9), r(10,25)$ 随时间 t 的运动曲线

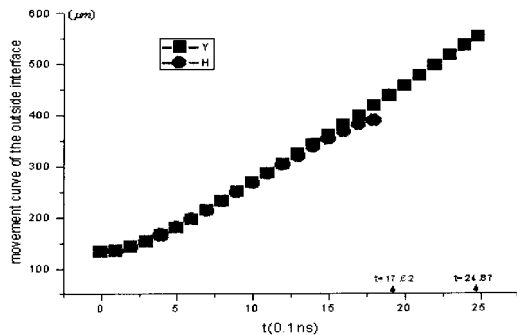


图 6 外界面 $r(10,62)$ 随时间 t 的运动曲线

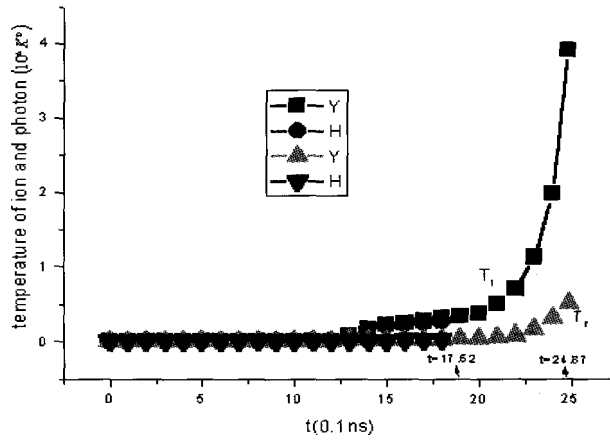


图 7 网格 G(10,5) 的光子温度 T_r 和电子温度 T_i 随时间 t 的变化曲线

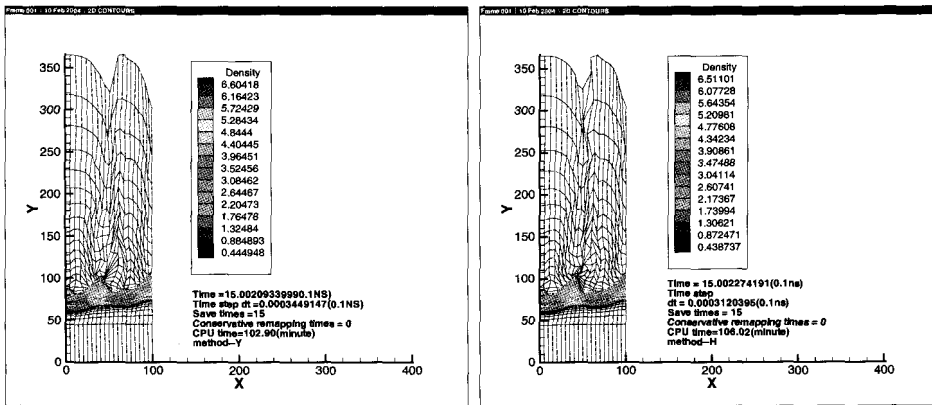


图 8 $t=15(0.1ns)$ 时刻网格和密度的分布图

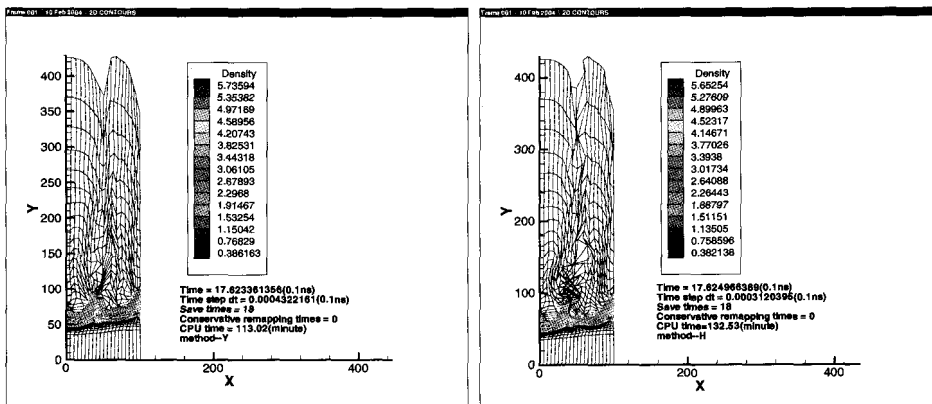


图 9 $t=17.62(0.1ns)$ 时刻网格和密度的分布图, H 法计算终止时刻

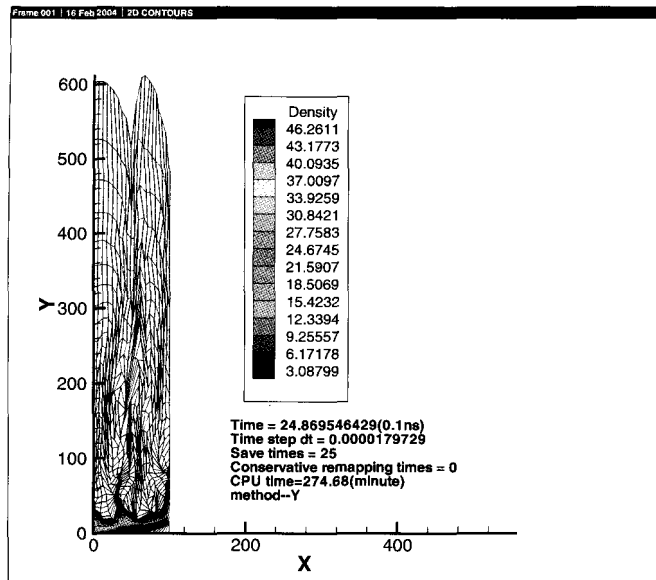


图 10 Y 法计算终止时间 $t = 24.87$ (0.1ns) 时刻的网格和密度分布图

§4. 结 论

我们提出了流体力学方程组中动量方程的压强加权法, 并和回路积分方法进行了比较, 可以得到如下的结论: (1) 在 Lagrange 网格变形不大的情况下, 两者计算结果是一致的, 特别是在平行四边形网格的情况下, 两种离散格式是等价的; (2) 在 Lagrange 网格变形较大的情况下, 我们采用的压强加权法的优势明显, 对大变形网格具有较强的适应能力, 它可以阻滞和延缓 Lagrange 网格的非物理变形, 而且精度高、省时间。

参 考 文 献

- [1] 符尚武, 沈隆钧, 黄书科, 激光驱动内爆二维数值模拟方法及其程序 (Lared - I) 的研究, 高技术通讯, 8:7 (1998).
- [2] Fu Shangwu, Fu Hanqin, Shen longjun, A nine-point difference scheme for the 2D equations of heat conduction with three-temperature, J. Num. Method & Comp. Appl. 20:3 (1999); Chinese J Num. Math. & Appl., 22:1 (2000).
- [3] 李德元等, 二维非定常流体力学数值方法, 科学出版社, 1987.
- [4] S.P. Hatchett et al., UCRL-LR-105821-95-4, 226-231, 1995.