

# 一种界定模态密集程度的新方法

刘潇翔<sup>1,2</sup>, 胡 军<sup>1,2</sup>

(1. 北京控制工程研究所, 北京 100190; 2. 空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100190)

**摘 要:** 研究了被控对象包含密集模态时对控制的影响, 说明了密频系统的模态不稳定特性引起对象模型不准确, 给控制器设计造成困难并容易导致控制性能下降。分析了已有的密集模态定义及相关判别准则的不足, 针对控制, 从密集模态振型不稳定性角度提出了新的基于振型灵敏度的密集模态界定方法, 容易辨别出系统的密集模态子集, 也可以用于比较不同系统的模态密集程度。算例表明, 该方法准确有效, 以此界定模态密集程度对振动控制更有意义。

**关键词:** 密集模态; 模态不稳定特性; 模态密集度; 判断准则; 振型灵敏度

**中图分类号:** V214; TB123; O32 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2010)04-1093-07

**DOI:** 10.3873/j.issn.1000-1328.2010.04.025

## 0 引言

大型复杂航天器及其挠性部件多为对称、准对称或频率优化结构, 这使得结构振动在低频段往往具有丰富的密集模态: 如美国航天飞机起飞时在 15 Hz 以下就有 400 阶弯曲模态<sup>[1]</sup>; 各种网状天线、肋条天线、平面天线等作为许多现代卫星的挠性组件, 其低频段都具有模态密集的特点。

包含密集模态的结构即为密频系统。对轻阻尼模态密集结构的控制一直是挠性控制领域的一个难点, 针对密频系统的控制方法近几年也引发了许多专家和学者投入研究<sup>[1-3]</sup>。由于密频结构不同于普通结构的特性, 使其在结构振动分析的矩阵摄动问题<sup>[4]</sup>, 以及基于摄动法模态分析的控制方法<sup>[5]</sup>, 和处理其模态不稳定引起的不确定性问题上<sup>[6]</sup>都需要特殊处理。因而进行控制设计之前, 需要判断结构是否包含密集模态, 即需要研究密频系统的界定方法。目前判断密频结构的提法不多, 且都各有不足。文献[7]更指出, 密频结构主动振动控制的两大问题即密频结构的判别方法和密频结构的控制策略。因而针对控制, 亟需一种有效的密集模态界定方法。

本文集中总结了各类文献对密集模态的判定准则以及模态密集度的定义, 分析和比较了其各自的适用性和不足之处。针对控制, 基于密频系统的模

态不稳定特性, 本文提出了一种独立于结构摄动量, 只与系统相关的模态密集程度判定方法。算例证实该方法可合理比较不同系统的模态密集程度, 并准确辨识出密集度更高的模态子集, 为今后主动振动控制及相关领域提供新的启示。

## 1 密频系统的模态不稳定特性对模型的影响

控制系统设计的前提是建立被控对象模型, 而密频系统存在模态不稳定特性, 即当系统的结构参数有很小的变化时, 其模态参数(尤指振型)就可能发生很大的变化, 其结果将严重影响模型的精确建立<sup>[2]</sup>。

挠性结构本身是无限自由度分布参数系统, 经有限元法离散化, 可表示为二阶常微分方程组

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = Bu(t) \quad (1)$$

其中  $M$  为质量阵,  $C$  为阻尼阵,  $K$  为刚度阵,  $q(t)$  为位移矢量;  $B$  为控制输入阵,  $u(t)$  为控制力矢量。满足

$$\Phi^T M \Phi = I$$

$$\Phi^T K \Phi = \Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$$

的转移矩阵  $\Phi$  可将(1)转化为模态坐标表达式, 这里设阻尼为瑞利阻尼, 即满足  $C = \alpha M + \beta K$ ,  $\alpha, \beta$  为常数, 则  $\Phi$  也可将  $C$  对角化:

$$\Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, \dots, 2\xi_n \omega_n)$$

令  $\mathbf{q}(t) = \Phi \boldsymbol{\eta}(t)$ , 则(1)的模态坐标表达式为:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \text{diag}(2\xi_i \omega_i) \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2) \boldsymbol{\eta}(t) = \Phi^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

模态参数是指自然频率  $\omega_i$ , 阻尼比  $\xi_i$  和振型  $\boldsymbol{\phi}_i = [\phi_{1i}, \dots, \phi_{ni}]^T$ 。实际工程中, 系统结构参数  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  的小量摄动不可避免, 这将引起模态参数变化。密频系统的模态参数(尤指振型)对结构摄动非常敏感, 很小的结构参数摄动即可引发振型极大的变化。而振型变化对控制系统最直接的影响就是对象模型的改变。下面以传递函数模型来说明<sup>[2]</sup>。

设量测输出在拉氏域表为

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}_o \mathbf{q}(s) = \mathbf{C}_o \Phi \boldsymbol{\eta}(s) \quad (3)$$

又由(2)有

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \text{diag}(s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2)^{-1} \Phi^T \mathbf{B} \mathbf{u}(s) \quad (4)$$

将(4)式代入(3)得

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}_o \Phi \text{diag}(s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2)^{-1} \Phi^T \mathbf{B} \mathbf{u}(s) \quad (5)$$

考虑简单的单输入单输出情况, 设输入作用在自由度  $p$  上, 输出为自由度  $q$  的位移, 则

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_p, \quad \mathbf{C}_o = \mathbf{e}_q^T$$

其中  $\mathbf{e}$  为单位基向量,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_o$  代入(5)有

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{u(s)} &= \mathbf{e}_q^T \Phi \text{diag}(s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2)^{-1} \Phi^T \mathbf{e}_p \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{qi} \phi_{pi}}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \end{aligned}$$

可见, 振型矩阵  $\Phi$  可严重影响对象模型。当摄动前后振型转角接近  $0^\circ$  或  $180^\circ$  时, 振型变化影响不大, 当转角为  $90^\circ$  时, 振型变化影响最大。密频系统的振型对结构参数极其敏感, 将给控制系统设计带来困难, 如果没能充分考虑密频系统的模态不稳定特性, 依据标称模型所设计的控制器性能会受到影响, 甚至造成闭环不稳定。因此从控制上讲, 系统的模态密集程度应当基于模态不稳定特性来界定。

## 2 现有密集模态判断准则及模态密集度定义

目前, 提到大型空间结构及其挠性附件的“模态密集”问题, 通常只是定性的说法, 至于什么样的模态参数对应的结构需要定义为模态密集系统, 并在控制设计时引起足够重视, 国内外的研究还很有限。现有相关定义和准则有些从频率入手, 有些从振型入手, 但都各有不足。

### 2.1 从频率角度出发的判断准则和定义

文献[7]取相邻两特征值  $\lambda_i$  和  $\lambda_{i+1}$  的密集度定

义为  $\delta = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{i+1} + \lambda_i}$ , 认为  $\delta$  越小,  $\lambda_i$  和  $\lambda_{i+1}$  越密集。

文献[8]设毗邻特征值集合  $(\lambda_i, \dots, \lambda_{i+n})$  为原系统的一个特征值组, 用  $c = (\lambda_{i+n} - \lambda_i) / \left( \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_r}{n} \right)$  表示该特征值组的密集度。

文献[9]设结构固有频率组  $\lambda_i = \omega_i^2, i \in r (2 \leq r \leq n-1)$ , 记其平均值为  $\lambda_a = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \lambda_i$ ,  $\lambda_0$  为该固有频率组外与  $\lambda_a$  最接近的一个特征值。称

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\lambda_i - \lambda_a)^2} / |\lambda_0 - \lambda_a|$$

为该频率组(相对平均值  $\lambda_a$ )的分散度, 则  $\gamma = 1/\mu$  为该组频率的密集度。 $\mu$  值越小, 该组频率总体上距平均频率的距离越接近,  $\mu$  为小量说明该组频率密集。该提法以频率组为研究对象, 而非逐一频率比较, 并采用  $\lambda_0$  作为参考频率, 可避免在控制设计中选取密集模态组时遗漏或多计模态。

然而, 上述提法都存在局限性: 首先它们都不能用于不同系统间比较, 例如按上述任一种提法定义模态密集度  $\delta$ , 系统 1 某模态组的  $\delta_1$  小于系统 2 某模态组的  $\delta_2$ , 却不能说明系统 1 相应的模态组比系统 2 相应的模态组密集, 因为这并不是同一个系统<sup>[10]</sup>; 其次, 它们只涉及了频率值的相近程度, 却没有顾及密集频率对应振型对结构参数变化的敏感性, 而密集模态给系统动力学分析和振动控制带来的困难在很大程度上是源于振型的不稳定特性<sup>[11]</sup>。如果某一系统频率间隔虽然比较小, 而它对应振型对系统某些结构参数的变化并不敏感, 那么在有些问题中便没有必要把该组频率及对应振型作为密集模态来对待。

### 2.2 从振型角度出发的判断准则

基于密频系统模态不稳定特性, 文献[10]提出密集模态的转角判别法: 用摄动前特征向量  $\mathbf{x}_{0i}$  与摄动后特征向量  $\mathbf{x}_i$  之间的夹角变化来度量  $\lambda_{0i}$  与邻近特征值的密集性, 夹角变化定义为

$$\theta_i = 1 - \cos^2 \angle(\mathbf{x}_{0i}, \mathbf{x}_i) = \frac{1 - |(\mathbf{x}_{0i}^T \mathbf{x}_i)|}{[(\mathbf{x}_{0i}^T \mathbf{x}_{0i})(\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i)]^{1/2}}$$

如果  $\theta_i \rightarrow 0$ , 说明摄动对  $\mathbf{x}_{0i}$  的影响不大; 如果

$\theta_i \rightarrow 1$ , 说明摄动对  $x_{0i}$  影响很大, 依密集模态振型对系统摄动十分敏感的特性, 即可初步认为  $\lambda_{0i}$  与邻近特征值有较小的间隔。如果连续排列的一组转角都很大, 则认为对应的该组模态是密集的。

如果引入模型修正理论中的模态置信准则 MAC(Modal Assurance Criterion)<sup>[12]</sup>, 效果与转角判别法类似。对第  $i$  阶模态振型  $\phi_i$  :

$$MAC = \frac{|\phi_{ei}^T \phi_{ai}|^2}{(\phi_{ei}^T \phi_{ei})(\phi_{ai}^T \phi_{ai})}$$

下标  $e$  表摄动模型,  $a$  表标称模型,  $0 \leq MAC \leq 1$ 。MAC = 1 表示两者线性相关, 振型变化不大; MAC = 0 表示两者线性无关, 振型变化最大。如果连续排列的一组 MAC 值都很小, 可认为对应的该组模态密集。

### 3 度量模态密集程度的新方法

转角判别法和 MAC 度量法仍然存在问题, 因为它们都依赖于结构摄动量: 例如同一系统依转角判别法, 对应摄动量  $\epsilon_1$  的  $\theta_{i1}$  小于对应摄动量  $\epsilon_2$  的  $\theta_{i2}$ , 却不能说  $\lambda_{0i}$  与临近特征值的密集程度有差异, 因为这是同一系统。而同一系统出现不同的模态密集度, 显然不合理。因此界定模态密集程度时, 这个指标应该只依赖于系统, 而独立于结构摄动量。据此, 参考模态分析理论中结构动态特征灵敏度分析, 参照文献[12]考察特征向量灵敏度  $\partial\phi/\partial p_m$ ,  $p_m$  为结构参数(包括质量、刚度及阻尼)。

$n$  自由度系统自由振动运动方程为

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0$$

取状态向量为  $X = [q^T \quad \dot{q}^T]^T$ , 则

$$A\dot{X} + BX = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \quad (6)$$

式(6)的特征方程有  $n$  个复共轭特征对, 即  $\lambda_r, \tilde{\Psi}_r; \lambda_r^*, \tilde{\Psi}_r^* (r = 1, 2, \dots, n)$ 。

对第  $r$  阶模态可得

$$\lambda_r A \tilde{\Psi}_r + B \tilde{\Psi}_r = 0$$

$$\tilde{\Psi}_r = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_r \\ \lambda_r \tilde{\Psi}_r \end{bmatrix}; \tilde{\Psi}_r^* = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_r^* \\ \lambda_r^* \tilde{\Psi}_r^* \end{bmatrix}$$

由模态正交性条件得

$$\tilde{\Psi}_r^T A \tilde{\Psi}_s = a_r \delta_{rs}$$

$$\tilde{\Psi}_r^T B \tilde{\Psi}_s = b_r \delta_{rs}$$

其中  $\delta_{rs}$  为 Kronecker Delta 函数:  $r \neq s$  时,  $\delta_{rs} = 0$ ;  $r = s$  时,  $\delta_{rs} = 1$ 。

对  $\tilde{\Psi}_r$  进行加权正则化处理, 令

$$\bar{\Psi}_r = \tilde{\Psi}_r / \sqrt{a_r} = [\Psi_r \quad \lambda_r \quad \Psi_r]^T$$

将  $\partial\bar{\Psi}_r/\partial p_m$  表为复特征向量的线性组合, 即

$$\frac{\partial\bar{\Psi}_r}{\partial p_m} = \sum_{s=1}^N x_s \bar{\Psi}_s \quad (7)$$

具体考察振型对质量、刚度及阻尼的灵敏度, 则将(7)中  $p_m$  分别代之以  $m_{ij}, k_{ij}$  和  $c_{ij}$ , 相应地, 振型灵敏度系数  $x_s$  分别取表 1 中阻尼系统一栏的  $\alpha_s, \beta_s$  和  $\gamma_s$ <sup>[12]</sup>。

对无阻尼实模态系统, 则有

$$(-\omega^2 M + K)\phi_r = 0$$

振型  $\phi_r$  对结构参数  $p_m$  的灵敏度表为各阶振型的线性组合

$$\frac{\partial\phi_r}{\partial p_m} = \sum_{s=1}^N x_s \phi_s$$

考察振型对质量或刚度的灵敏度, 则将(8)中  $p_m$  分别代以  $m_{ij}$  或  $k_{ij}$ , 相应地, 振型灵敏度系数  $x_s$  分别取表 1 中无阻尼系统一栏的  $\alpha_s$  或  $\beta_s$ <sup>[12]</sup>。

表 1 系统振型灵敏度系数表

Table 1 Coefficients of mode shape sensitivities

		$r \neq s$		$r = s$	
		$i \neq j$	$i = j$	$i \neq j$	$i = j$
阻尼系统	$\alpha_s$	$\lambda_r^2 (\Psi_{is} \Psi_{jr} + \Psi_{js} \Psi_{ir}) / (\lambda_s - \lambda_r)$	$\lambda_r^2 \Psi_{is} \Psi_{ir} / (\lambda_s - \lambda_r)$	$-2\lambda_r \Psi_{ir} \Psi_{jr}$	$-\lambda_r \Psi_{ir}^2$
	$\beta_s$	$(\Psi_{is} \Psi_{jr} + \Psi_{js} \Psi_{ir}) / (\lambda_s - \lambda_r)$	$\Psi_{is} \Psi_{ir} / (\lambda_s - \lambda_r)$	0	0
	$\gamma_s$	$\lambda_r (\Psi_{is} \Psi_{jr} + \Psi_{js} \Psi_{ir}) / (\lambda_s - \lambda_r)$	$\lambda_r \Psi_{is} \Psi_{ir} / (\lambda_s - \lambda_r)$	$-\Psi_{ir} \Psi_{jr}$	$-\Psi_{ir}^2 / 2$
无阻尼系统	$\alpha_s$	$\omega_r^2 (\phi_{is} \phi_{jr} + \phi_{js} \phi_{ir}) / (\omega_s^2 - \omega_r^2)$	$\omega_r^2 \phi_{is} \phi_{ir} / (\omega_s^2 - \omega_r^2)$	$-\phi_{ir} \phi_{jr}$	$-\phi_{ir}^2 / 2$
	$\beta_s$	$(\phi_{is} \phi_{jr} + \phi_{js} \phi_{ir}) / (\omega_s^2 - \omega_r^2)$	$\phi_{is} \phi_{ir} / (\omega_s^2 - \omega_r^2)$	0	0

以上为振型对结构参数一阶灵敏度的计算公式,适用于结构参数变化小的情况。界定模态密集程度主要是考察模态不稳定特性,即结构参数微量摄动情况下,振型的变化情况,所以只需一阶灵敏度即可。利用(7)、(8)两式和表 1,可以计算系统模态振型对结构某些参数摄动的敏感程度,灵敏度越高说明模态越不稳定,而模态不稳定特性正是表征密集模态的重要标志,因而上述灵敏度结果可用于度量结构的模态密集程度。

不同系统的振型灵敏度可能相差一个到几个数量级,很容易比较其模态密集程度;对同一系统,也可轻易分辨出相对密集的模态子集。如有先验知识,了解哪些结构参数不易算准或容易摄动,则基于灵敏度界定模态密集程度将更有指向性,甚至便于明确振型变化趋势,为控制系统设计提供有益的启示。

#### 4 算例

具有模态局部化现象的系统,假设是对称的理想周期结构,具有固有频率分组特性。这类系统对结构参数灵敏度高,非常小的制造误差使结构存在微小失调,就可引发振型极大变化,适于说明本文方法度量模态密集程度的有效性。参照文献[13]中

Daisy 模拟仿真器肋条锥外振动,构造两不同频率模型如表 2 所示,其振型设为相同(如图 1(左)所示),忽略阻尼。

表 2 两个不同模型对应的各阶频率/Hz

模态	模型 1	模型 2
1	0.315	2.915
2	0.315001	2.915001
3	0.315002	2.915002
4	0.3153	2.9153
5	0.3164	2.9164
6	0.3181	2.9181
7	0.3182	2.9182
8	0.3201	2.9201
9	0.3202	2.9202
10	0.322	2.922

由于文献[10]的转角判别法依赖摄动量,故不考虑。下面分别采用文献[7]和文献[8]的度量方法,以及本文提出的基于振型灵敏度的度量方法来界定模型 1、2 的模态密集程度。

依文献[7],用  $\delta = (\lambda_{i+1} - \lambda_i) / (\lambda_{i+1} + \lambda_i)$  分别度量模型 1 和模型 2 各阶模态间的模态密集程度,结果如表 3 所示。 $\delta$  越小,  $\lambda_i$  和  $\lambda_{i+1}$  越密集,表格显示模型 2 的整体模态密集度更高,且两模型的前 3 阶模态均为密集度更高的模态子集。

表 3 各阶模态间的模态密集度  $\delta$

Table 3 Density of neighboring modes

( $\times 10^{-3}$ )

	模态 1 与 2	模态 2 与 3	模态 3 与 4	模态 4 与 5	模态 5 与 6	模态 6 与 7	模态 7 与 8	模态 8 与 9	模态 9 与 10
模型 1	0.0032	0.0032	0.9456	3.4827	5.3585	0.3143	5.9533	0.3124	5.6057
模型 2	0.0003	0.0003	0.1022	0.3772	0.5827	0.0343	0.6509	0.0342	0.6162

依文献[8]取毗邻特征值集合  $(\lambda_i, \dots, \lambda_{i+n})$ , 用  $c = (\lambda_{i+n} - \lambda_i) / \left( \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_r}{n} \right)$  来度量该特征值组的密集度,结果如表 4 所示。 $c$  值越小,该组模态越密集。表格显示模型 2 的整体模态密集度高于模型 1,且两模型的前 3 阶模态均为密集度更高的模态子集。

表 4 模态组的密集度  $c$

Table 4 Density of clustered modes

	整体为一组	前 3 阶模态为一组
模型 1	0.0442	$1.2698 \times 10^{-5}$
模型 2	0.0048	$1.3722 \times 10^{-6}$

上述两方法从频率角度出发,都得出模型 2 的整体模态密集度更高的结论,这一点从定义本身很

容易理解:因为模型 1 与模型 2 各阶频率间隔相等,而模型 2 的基频更高,所以按照这类定义便会得到模型 2 的整体模态更密集的结论。

最后采用本文新提出的模态密集程度界定方法,模型 1、2 的振型矩阵对刚度阵参数  $k_{10,10}$  的灵敏度分别如表 5 和表 6 所列。

对比两表结果可知,对结构参数  $k_{10,10}$  而言,模型 1 振型灵敏度比模型 2 振型灵敏度总体来说高 1 个数量级,模型 1 的模态不稳定程度更高。对刚度阵其它参数的摄动可以得到类似的结果,说明就刚度阵摄动而言,模型 1 的模态更不稳定,从这个层面上讲,模型 1 的模态密集度更高,这与前面两方法的结论恰恰相反。

另可看出,两模型各阶振型对刚度阵摄动的灵敏度都  
很高,而前 3 阶振型灵敏度比其它各阶更是高出两个

数量级以上,这说明前 3 阶模态是密集度更高的子系  
统,这与前面两方法的结论相同。

表 5 模型 1 对  $k_{10,10}$  的振型灵敏度

Table 5 Mode shape sensitivity to  $k_{10,10}$  of model 1

( $\times 10^4$ )

$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$	$\phi_5$	$\phi_6$	$\phi_7$	$\phi_8$	$\phi_9$	$\phi_{10}$
-2.0173	0.0071	-2.0032	-0.0059	-0.0068	-0.0405	0.0389	-0.0324	0.0466	-0.0070
-2.0173	-8.0342	-6.0239	0.0209	-0.0125	-0.0430	0.0364	-0.0339	0.0451	-0.0059
6.0240	0.0071	6.0381	-0.0328	-0.0010	-0.0379	0.0414	-0.0308	0.0482	-0.0081
2.0033	0.0070	2.0174	0.0209	-0.0125	-0.0430	0.0364	-0.0339	0.0451	-0.0059
-6.0112	8.0215	-2.0302	0.0210	-0.0052	-0.0402	0.0391	-0.0323	0.0467	-0.0071
-6.0169	-0.0141	-6.0451	0.0405	-0.0109	-0.0475	0.0322	-0.0360	0.0431	-0.0045
6.0425	-0.0115	6.0194	-0.0430	0.0110	-0.0397	-0.0399	-0.0353	0.0439	-0.0059
6.0400	-8.0504	2.0013	-0.0189	0.0097	0.0373	-0.0424	-0.0410	0.0384	-0.0027
-2.0297	0.0194	-1.9908	-0.0205	0.0045	0.0384	-0.0410	-0.0427	-0.0423	0.0027
-6.0519	0.0210	-6.0100	0.0316	-0.0049	0.0370	-0.0420	0.0333	-0.0454	0.0093

表 6 模型 2 对  $k_{10,10}$  的振型灵敏度

Table 6 Mode shape sensitivity to  $k_{10,10}$  of model 2

( $\times 10^3$ )

$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$	$\phi_5$	$\phi_6$	$\phi_7$	$\phi_8$	$\phi_9$	$\phi_{10}$
-2.1800	0.0076	-2.1648	-0.0064	-0.0073	-0.0441	0.0424	-0.0355	0.0511	0.0077
-2.1800	-8.6820	-6.5096	0.0226	-0.0136	-0.0469	0.03967	-0.0372	0.0494	0.0065
6.5097	0.0076	6.5249	-0.0355	-0.0011	-0.0413	0.0451	-0.0338	0.0528	0.0089
2.1649	0.0076	2.1801	0.0227	-0.0136	-0.0469	0.0396	-0.0372	0.0494	0.0065
-6.4958	8.6682	-2.1939	0.0228	-0.0057	-0.0438	0.0426	-0.0354	0.0512	0.0077
-6.5020	-0.0153	-6.5325	0.0438	-0.0119	-0.0517	0.0351	-0.0395	0.0473	0.0050
6.5296	-0.0124	6.5047	-0.0465	0.0119	-0.0433	-0.0436	-0.0387	0.0481	0.0065
6.5269	-8.6994	2.1626	-0.0205	0.0105	0.0407	-0.0463	-0.0450	0.0421	0.0029
-2.1934	0.0210	-2.1513	-0.0222	0.0049	0.0419	-0.0447	-0.0468	-0.0464	-0.0029
-6.5399	0.0227	-6.4945	0.03429	-0.0052	0.0404	-0.0458	0.0366	-0.0497	-0.0102

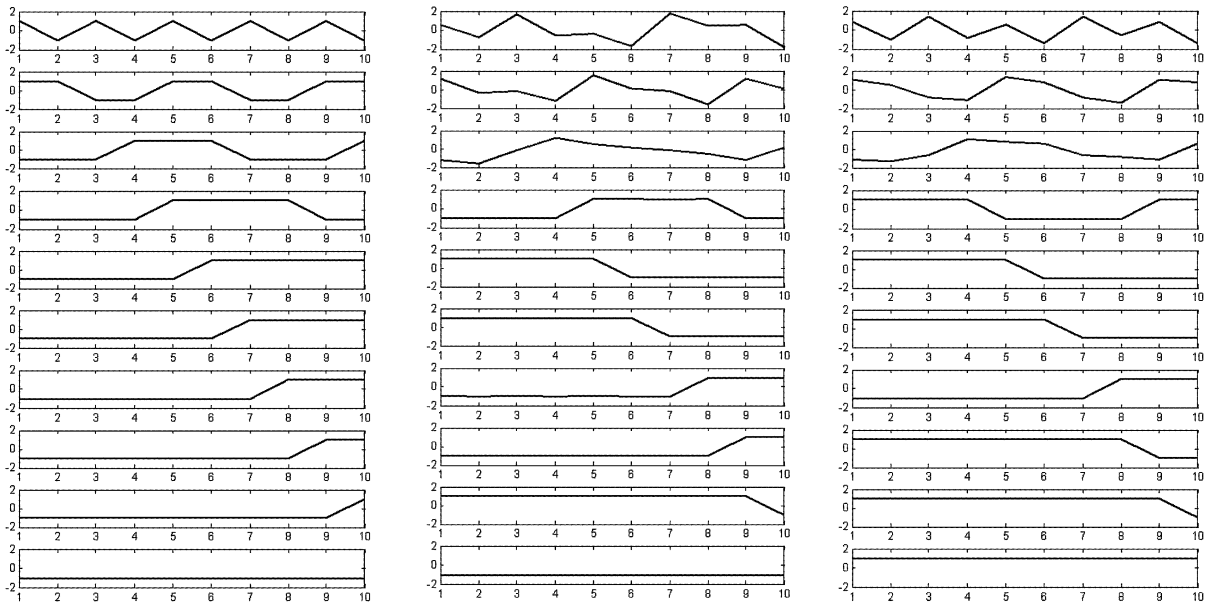


图 1 模态振型图(标称振型(左),模型 1 摄动振型(中),模型 2 摄动振型(右))

Fig.1 Mode shapes(nominal mode shapes(left), perturbed mode shapes of model 1(middle), perturbed mode shapes of model 2(right))

当  $\Delta k_{10,10} = -0.00001$  时,标称振型(两模型相同)以及模型 1、2 的摄动后振型如图 1 所示。由图可见,两模型的前 3 阶振型比其它各阶变化大,是密集度更高的模态子集;而对同样大小的微量摄动,模型 1 的前 3 阶振型发生了很大变化,模型 2 的前 3 阶振型变化相对较小。这说明模型 1 的模态更不稳定,据此界定模型 1 的模态密集程度更高。印证了表 5 和表 6 的结论。

## 5 结论

本文研究了密集模态的判别准则和模态密集度的度量方法,分析了现有相关准则及定义的不足,提出了界定密集模态程度的新方法。该方法的优点在于:

(1) 直接利用了密频结构的模态不稳定特性,更能反映密集模态的本质;

(2) 首次从控制角度界定系统模态密集度;

(3) 首次提出可用于不同系统间比较的模态密集度量方法;

(4) 该度量指标只与系统有关,而独立于结构摄动量;

(5) 如对易于摄动的结构参数有先验知识,则依本文方法界定模态密集程度更有指向性和实用价值。

## 参考文献:

- [1] 刘利军,樊江玲,张志谊,华宏星. 密频系统模态参数辨识及其振动控制的研究进展[J]. 振动与冲击, 2007, 26(4): 109 - 115. [LIU Li-jun, FAN Jiang-ling, ZHANG Zhi-yi, HUA Hong-xing. Study progresses in modal parameters identification and vibration control of systems with crowded modes[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(4): 109 - 115.]
- [2] 刘一武. 具有密集模态的挠性空间结构的辨识与控制[R]. [博士后研究报告]. 北京: 中国空间技术研究院, 2001. [LIU Yi-wu. Identification and control of flexible space structures with closely spaced modes[R]. [Report on the work of post doctoral research]. Beijing: China Academy of Space Technology, 2001.]
- [3] Abe M. Vibration control of structures with closely spaced natural frequencies by a single actuator[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1998, 120(1): 117 - 124.
- [4] Chen S H, Liu Z S, Shao C S, Zhao Y Q. Perturbation analysis of vibration modes with close frequencies[J]. Communication in Numerical Methods in Engineering, 1993, 12(1): 54 - 59.
- [5] Chen Y D, Chen S H, Liu Z S. Modal optimal control procedure for near defective systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 245(1): 113 - 132.
- [6] Ferrara A, Giacomini L. Control of a class of mechanical systems with uncertainties via a constructive adaptive/second order VSC approach[J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 2000, 122(1): 33 - 39.
- [7] 孙红灵. 振动主动控制若干问题的研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2007. [SUN Hong-ling. Research on several problems of active vibration control[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2007.]
- [8] 王文亮, 刘玉民. 特征值组的摄动法[J]. 机械强度, 1995, 17(3): 44 - 47. [WANG Wen-liang, LIU Yu-min. Perturbation technique of eigenvalue cluster[J]. Journal of Mechanical Strength, 1995, 17(3): 44 - 47.]
- [9] 陈德成, 杨靖波, 白浩, 黄清华. 密频子空间的可控度与可观度[J]. 应用力学学报, 2001, 18(2): 15 - 19. [CHEN De-cheng, YANG Jing-bo, BAI Hao, HUANG Qing-hua. The degree of controllability and observability of closed frequency subspace[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2001, 18(2).]
- [10] 赵又群, 刘中生, 陈塑寰. 密集模态的判断准则[J]. 吉林工业大学学报, 1996, 26(3): 75 - 78. [ZHAO You-qun, LIU Zhong-sheng, CHEN Su-huan. Judging criterion of closely spaced modes[J]. Journal of Jilin University of Technology, 1996, 26(3): 75 - 78.]
- [11] Smith R S, Chu C C, and Fanson J L. The design of H-infinity controllers for an experimental non-collocated flexible structure problem[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1994, 2(2): 101 - 109.
- [12] 傅志方, 华宏星. 模态分析理论与应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000: 241 - 264. [FU Zhi-fang, HUA Hong-xing. Theory of Vibration with Applications[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2000: 241 - 264.]
- [13] Zee R E, Hughes P C. Mode localization in flexible space craft: a control challenge[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2000, 23(1): 69 - 76.

作者简介: 刘潇翔(1983 - ), 女, 博士研究生, 研究方向为控制理论与控制工程。

通信地址: 北京市海淀区中关村南三街 16 号北京控制工程研究所 2729 信箱(100190)

电话: 15901512872

E-mail: monkeyfiona@163.com

## A New Way to Define Closely Spaced Modes of Vibration

LIU Xiao-xiang<sup>1,2</sup>, HU Jun<sup>1,2</sup>

(1. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;

2. National Laboratory of Space Intelligent Control, Beijing 100190, China)

**Abstract:** Mode shape errors can be large in flexible space structures comprising closely clustered modes of vibration, because it arises from very small manufacturing errors. If not properly taken into account, this so called “unstable modes” will potentially pose problems for high-performance flexible spacecraft controllers based on nominal models. With this understanding, it was analyzed that former definitions of close modes were limited. This paper prompted a new way, based on mode shape sensitivity to structure parameters, to define close modes, which emphasized the impacts of close modes on control. It was shown that this new measurement could be used to compare the density of clustered modes comprised in two different structures. An example computational study showed that this measurement was accurate and effective.

**Key words:** Closely spaced modes; Mode shape instability; Density of clustered modes; Judging criterion; Mode shape sensitivity to structure parameters