

# 基于 Legendre 正交多项式非参数混合模型的图像分割

刘哲<sup>1a</sup>, 肖建国<sup>1b</sup>, 宋余庆<sup>2</sup>

(1. 吉林师范大学 a. 计算机学院; b. 就业处, 吉林四平 136000; 3. 江苏大学 计算机科学与通信工程学院, 江苏镇江 212013)

**摘要:** 针对有限混合模型中参数估计方法对先验假设存在过分依赖的问题, 提出了一种非参数的 Legendre 正交多项式图像混合模型分割方法。首先, 设计了一种基于 Legendre 正交多项式的图像非参数混合模型, 并用最小均方差 (MISE) 估计每一个模型的平滑参数; 其次, 利用 EM 算法求解正交多项式系数和模型的混合比。此方法不需要对模型作任何假设, 可以有效克服模型失配问题。通过图像的分割实验表明, 该方法比其他非参数混合模型分割效果更好。

**关键词:** 正交多项式; 非参数混合模型; 图像分割; 平滑参数

**中图分类号:** TP391      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-3695(2010)08-3165-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.08.0097

## Image segmentation based on non-parametric mixture model of Legendre orthogonal polynomial

LIU Zhe<sup>1a</sup>, XIAO Jian-guo<sup>1b</sup>, SONG Yu-qing<sup>2</sup>

(1. a. Institute of Computer, b. Dept. of Employment, Jilin Normal University, Siping Jilin 136000, China; 2. School of Computer Science & Communications Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu 212013, China)

**Abstract:** To relieve parameters estimation's over-dependence on the prior assumption in finite mixture models, this paper proposed Legendre orthogonal polynomial image mixture model segmentation. First, designed a non-parametric mixture model based on Legendre orthogonal polynomials, and then made estimation to the smoothing parameter of each model by MISE. Secondly, got orthogonal polynomial coefficients and the mixing ratio of the model by EM algorithm. The method overcomes model mismatch without any assumption to the model. Image segmentation experiments show that the method is more efficient than other non-parametric mixture model segmentations.

**Key words:** orthogonal polynomial; non-parametric mixture models; image segmentation; smoothing parameter

图像分割对图像分析和图像理解有重要意义, 而且也是目前图像处理领域的热点问题。图像分割技术常用的方法就是聚类, 已经提出了多种基于聚类的图像分割算法, 如 K 均值<sup>[1]</sup>、模糊 C 均值<sup>[2]</sup>、核密度聚类<sup>[3]</sup>、有限混合模型<sup>[4]</sup>等分割算法。其中有限混合模型是一种强有力的建模概率统计工具。任何有对数据进行统计建模的地方, 都可见到混合密度函数的运用。

混合模型的核心问题是分量密度函数的选择。Peel 等人<sup>[5]</sup>选择 t-分布作为混合分布模型, Tsung 等人<sup>[6]</sup>提出了非中心 t-分布的混合鲁棒模型, Bouguila 等人<sup>[7]</sup>提出了基于 Dirichlet 的混合模型, Fan 等人<sup>[8]</sup>提出了广义的高斯分布混合模型等。求解分量密度函数采取参数估计方法, 通常被限制在人们熟知的几种分布模型范围内。参数模型的基本假设与实际的物理模型之间常常存在较大的差异, 即存在模型失配问题。传统的参数估计方法已不能适应现代数据分析研究的需求。

为此, 提出了一种非参数的混合模型<sup>[9]</sup>的图像分割方法。采用非参数的混合模型可处理任意形式的概率分布, 不存在模型失配问题。本文提出基于 Legendre 正交多项式非参数混合模

型, 通过 EM 算法多次迭代估计其中组合的系数, 即每个类的先验概率; 最后使用贝叶斯规则对图像进行分类, 得到最终图像分割结果。采用 Bootstrap 抽样方式, 能够降低样本之间的独立性, 并且通过实验证明能够在不破坏图像分割质量的前提下大大减少计算时间, 提高了分割的效率。

### 1 有限混合模型

设  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  为随机观察数据集,  $X_i$  是  $d$  维随机变量,  $X_i$  间相互独立,  $P_i(x|\theta_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 是对应的概率密度函数。其中,  $x \in R^d$  是  $X_i$  的取值,  $\theta_i \in \Theta_i \subset R^p$  是参数。若将  $X_i$  的样本按一定比例混合后, 再从中任取一个进行观察, 其结果记为  $X$ , 则随即变量  $X$  服从混合分布, 它的概率密度<sup>[10]</sup>为:

$$P(x|\theta) = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i(x|\theta_i) \quad (1)$$

其中:  $m$  表示混合模型的分支数目;  $\alpha_i$  为混合比例或权重, 满足  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1$ ;  $\theta$  是模型的参数空间,  $\theta = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \theta_1, \dots, \theta_m)$ 。这样建立的模型称为概率混合模型, 也称为混合模型。

收稿日期: 2009-12-12; 修回日期: 2010-01-18

作者简介: 刘哲(1982-), 女, 吉林四平人, 硕士, 主要研究方向为图像处理、图像数据库等 (lxcc1016@126.com); 肖建国(1981-), 男, 讲师, 硕士, 主要研究方向为计算机软件与理论、数据挖掘; 宋余庆(1959-), 男, 教授, 主要研究方向为数据挖掘、知识发现、图像数据库系统等。

若当分量密度函数  $P_i(x|\theta_i)$  的分布形式确定了,模型就成为该分支的混合模型,而称式(1)为一个  $m$  分支的混合密度函数。在有限混合模型式(1)中,分支数  $m$  一般考虑是固定的。在大多数应用当中, $m$  的值却是未知的,它往往需要同混合比和其他确定各分支密度的参数一起从样本中去推断。EM 算法是有限混合模型参数估计比较常用的方法,是一种通常从不完全数据中求解模型参数的极大似然方法。

常用的混合密度模型是高斯混合密度模型<sup>[11]</sup>,用多个高斯分布的混合来表示空间数据的分布。模型中的每个高斯密度函数的未知参数  $\theta = (\alpha_1, \mu_1, \Sigma_1, \alpha_2, \mu_2, \Sigma_2, \dots, \alpha_k, \mu_k, \Sigma_k), \mu_k$  为图像灰度均值,  $\Sigma_k$  为协方差。则用 EM 算法来进行极大似然估计。该算法如下:

a) 初始化,采用 K 均值聚类算法或对图像样本进行初始划分,对各类别密度分布待估计的参数  $\theta$  进行初始设置。

b) E-步。计算在第  $n$  次迭代时每个样本  $i$  属于第  $j$  类的后验概率:

$$P_j^n(x_i) = \frac{\alpha_j^n f(x_i|\theta_j^n)}{\sum_{j=1}^k \alpha_j^n f(x_i|\theta_j^n)} \quad (2)$$

c) M-步:通过求解对数似然方程,计算出期望值到达极大值点时新的参数,即均值  $\mu$ 、协方差矩阵  $\Sigma_j$  及权重  $\alpha_j$ ,用于下次迭代。

$$\alpha_j^{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_j^n(x_i) \quad (3)$$

$$\mu_j^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i P_j^n(x_i)}{\sum_{i=1}^n P_j^n(x_i)} \quad (4)$$

$$\Sigma_j^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^n P_j^n(x_i) (x_i - \mu_j^{n+1})(x_i - \mu_j^{n+1})^T}{\sum_{i=1}^n P_j^n(x_i)} \quad (5)$$

d) 满足结束条件则停止,否则转步骤 b)。

## 2 Legendre 正交多项式非参数混合模型

非参数的密度估计方法<sup>[12]</sup>是直接根据样本数据估计总体的密度,然后用估计得到的密度分布来描述数据总体。目前,非参数密度估计方法多种多样,主要有频率直方图估计、核密度估计(kernel density estimate)、正交序列估计(orthogonal series estimate)、最近邻估计(nearest neighbor estimate)等,本文所采取的是正交多项式非参数密度估计方法。

### 2.1 非参数混合模型

正交序列密度估计是 Cencov<sup>[13]</sup>引入的,并被应用到不同的领域,特别是模式识别和分类等方面。对于一个连续的未知的概率分布  $f$ ,其中独立同分布的自由样本为  $X_1, \dots, X_N$ ,本文定义这个正交序列密度估计为

$$N(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i e_i(x) \quad (6)$$

其中:  $a_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_i(X_k)$ ,  $\{e_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$  是一个完全的正交系统, Gehringer<sup>[14]</sup>考虑到实际应用中的需要并对其进行改进:

$$f_N(x) = \sum_{i=1}^m a_i e_i(x) \quad (7)$$

其中:  $a_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_i(X_k) (i = 1, 2, \dots), m, \{e_i(x)\}_{i=1}^m$  是满足 Hilbert 空间  $L_2([a, b])$  的正交基。

### 2.2 Legendre 正交多项式

定义 当区间为  $[-1, 1]$ , 权函数  $\rho(x) \equiv 1$  时,由  $\{1, x,$

$\dots, x^m, \dots\}$  正交化得到的多项式就称为勒让德(Legendre)多项式<sup>[15]</sup>,并用  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x), \dots$  表示。

$$P_0(x) = 1, P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} \{(x^2 - 1)^m\} (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

性质 1 正交性

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \quad (9)$$

性质 2 奇偶性

$$P_m(-x) = (-1)^m P_m(x) \quad (10)$$

当  $m$  为偶数时,  $P_m(x)$  为偶函数;当  $m$  为奇数时,  $P_m(x)$  为奇函数。

性质 3 递推性

$$(m+1)P_{m+1}(x) = (2m+1)xP_m(x) - mP_{m-1}(x) (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

本文采用 Legendre 正交序列估计,则构成正交系统的形式为

$$f_{1/s}(x) = \sum_{j=1}^k w_j \left[ \sum_{i=1}^{K_{Nj}} a_{i,j} \frac{1}{2^{i-1} i!} \frac{d^i}{dx^i} \{(x^2 - 1)^i\} \right] \quad (12)$$

其中:  $(a_{0,j}, a_{1,j}, \dots, a_{K_{Nj},j})$  是条件概率密度函数傅里叶系数的估计,  $K_N$  是余弦展开式中的截断点。

### 2.3 平滑参数估计

平滑参数  $1/s (K_N \approx N^{1/s})$  在混合模型参数估计中占重要作用,它决定混合模型的收敛程度。为了衡量  $f_{1/s}(x)$  的有效性,采用理论概率密度函数  $f(x)$  和样本估计概率密度函数  $f_{1/s}(x)$  之间的最小均方差 MISE<sup>[16]</sup> 作为准则函数:

$$g(1/s) = E \{ \int_A |f(x) - f_{1/s}(x)|^2 dx \} \quad (13)$$

$g(1/s)$  应该达到最小,即为  $f_{1/s}(x)$  估计的最优值。

图 1(a) 中,当样本数量固定时,  $MISE(g(1/s))$  要达到最小,则  $1/s$  是在区间  $[0.2, 0.33]$ 。图 1(b) 中,当  $1/s = 0.25$  时,通过观察使  $g(1/s)$  函数连续,则  $N \geq 1500$ 。对于本文算法中,平滑参数  $1/s$  在区间  $[0.2, 0.33]$ 。

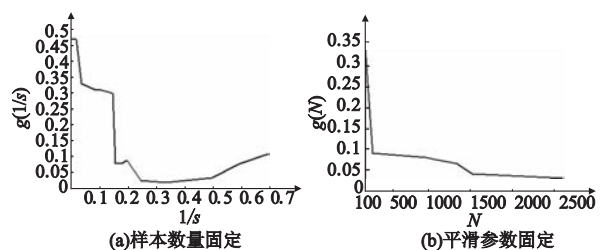


图 1 平滑参数估计

## 3 基于 Legendre 正交多项式非参数混合模型的图像分割算法

对于文中提出的非参数 Legendre 正交序列混合模型,它不需要预先假设灰度图像像素的条件概率密度函数,直接根据样本数据估计该数据场的概率密度函数。采用 EM 算法求解模型正交多项式和混合比系数,该算法如下:

输入:图像  $I$ , 大小  $N$ , 初始分类数  $k$ , 平滑参数  $s$ ;

输出:图像像素分类标签。

a) 使用 K-均值算法对图像进行初始划分为  $K$  类,对参数权值  $w$  和系数  $a$  进行初始化:

$$w_j^0 = \frac{N_j^0}{N} \quad (14)$$

$$a_{m,j}^0 = \frac{1}{N_j^0} \sum_{i=1}^{N_j^0} e_m(X_i) \quad (15)$$

其中:  $j = 1, \dots, K; m = 0, \dots, K_{N_j}^0, K_{N_j}^0 = \text{int}[(N_j^0)^{1/s}]; \text{int}[x]$  是取不大

于  $x$  的最大整数。

b) E-步:像素属于第  $j$  类的后验概率  $P_j^n(x_i)$ :

$$P_j^n = \frac{w_j^n f(x_i | \theta_j^n)}{\sum_{l=1}^K w_l^n f(x_i | \theta_l^n)} \quad (16)$$

c) M-步:根据 E-步计算的第  $n$  次迭代的后验概率,则有第  $n+1$  次迭代的各系数更新公式:

$$w_j^{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N P_j^n(x_l) \quad (17)$$

$$K_{N_j^{n+1}} = \text{int}[(N_j^{n+1})^{1/4}], N_j^{n+1} = N w_j^{n+1} \quad (18)$$

$$a_{m,j}^{n+1} = \frac{\sum_{l=1}^N e_m(x_l) P_j^n(x_l)}{\sum_{l=1}^N P_j^n(x_l)} \quad (19)$$

其中:  $m=0, \dots, K_{N_j^{n+1}}$ 。

d) 满足结束条件则停止,否则转步骤 b)。

e) 应用贝叶斯规则根据像素  $x_i$  属于第  $j$  类的后验概率  $P_j^n(x_i)$  进行分类:

$$j(x_i) = \arg[\max_{1 \leq j \leq K} \{P_j^n(x_i)\}] \quad (20)$$

其中:  $j(x_i)$  表示像素  $x_i$  的类别标签。

### 4 实验

为了验证本文提出的基于非参数 Legendre 正交多项式混合模型的图像分割算法,本实验使用 Dell 公司图像专用工作站,CPU 为 Intel<sup>®</sup> NL<sup>®</sup>,速度 1.5 GHz,内存 1 GB,硬盘 120 GB, MATLAB 7.0 作为实验开发工具。实验数据来源于美国加州大学伯克利分校的 BSDB 标准测试图像数据库<sup>[17]</sup>。

图 2 是对一组图像分割的结果。从分割结果对比可以看出,两种分割方法整体的分割效果比较接近,但是本文提出的基于非参数 Legendre 正交序列混合模型的图像分割在图像细节部分,特别是人物图像面部的轮廓效果明显。

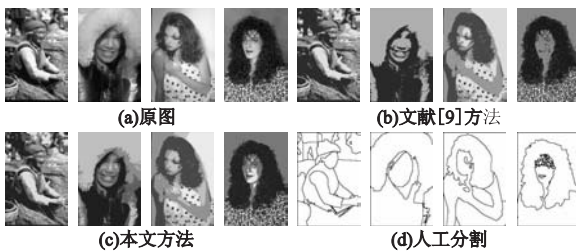


图2 本文方法与其他分割方法比较

为了量化评估各种算法的分割效果,采用文献[18]提出的图像分割质量评价标准如下:

$$F(I) = \frac{1}{1000(M \times N)} \sqrt{R \sum_{i=1}^R \frac{e_i^2}{A_i}} \quad (21)$$

其中:  $I$  为分割后图像;  $M \times N$  为图像大小;  $R$  为图像分割的类别数;  $A_i$  为第  $i$  个区域的面积即像素总个数;  $e_i$  为第  $i$  个区域的平均颜色错误数。  $F$  值越小,分割效果越好。

文献[9]混合模型分割方法和本文提出方法进行分割实验比较,选定式(21)图像分割质量评价标准  $F$  作为分割结果的评价测度。图 3 为几幅不同图像两种方法分割结果的  $F$  值,横坐标为几幅图像,纵坐标为分割质量评价标准  $F$ 。从图 3 可以看出,对于图像的分割,文献[9]的  $F$  值比本文方法值大,本文提出方法的  $F$  值比其他非参数混合模型的  $F$  值小,本文分割方法效果明显优于文献[9]非参数混合模型图像分割方法。

### 5 结束语

图像分割中有限混合模型参数估计方法存在对先验假设

过分依赖的问题,提出了一种非参数 Legendre 正交多项式的图像混合模型分割方法。本文通过定义非参数 Legendre 正交多项式混合模型,并用最小均方差估计模型的平滑参数;利用 EM 算法的多次迭代,求解正交多项式系数和模型的混合比。由于此方法不需要对模型作任何假设,有效地克服了有参混合模型依赖于特定模型的问题。实验结果表明:该方法对图像分割效果较好,并且对于目标对象的边缘效应显著。

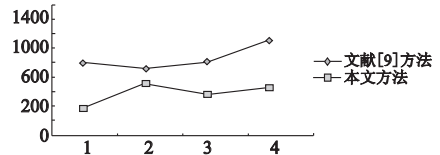


图3 非参数混合模型分割质量比较

### 参考文献:

- [1] XU Rui, WUNSCH D I I. Survey of clustering algorithms[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2005, 16(3):645-678.
- [2] 陈健美, 陆虎, 宋余庆,等. 一种隶属关系不确定的可能性模糊聚类方法[J]. 计算机研究与发展, 2008, 45(9):1486-1491.
- [3] 宋余庆, 谢从华, 朱玉全. 基于近似密度函数的医学图像聚类分析研究[J]. 计算机研究与发展, 2006, 43(11):1947-1952.
- [4] ALFO M, NIEDDU L, VICARI D. Finite mixture models for mapping spatially dependent disease counts[J]. Biometrical Journal, 2009, 51(1):84-97.
- [5] PEEL D, McLACHLAN G J. Robust mixture modelling using the distribution[J]. Statistics and Computing, 2000, 10(4):339-348.
- [6] TSUNG I L, JACK C L. Robust mixture modeling using the skew t-distribution[J]. Statistics and Computing, 2007, 17(2):81-92.
- [7] BOUGUILA N, ZIOU D, VAILLANCOURT J. Unsupervised learning of a finite mixture model based on the Dirichlet distribution and its application[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2004, 13(11):1533-1543.
- [8] FAN S K S, LIN Y, WU C C. Image thresholding using a novel estimation method in gene-ralized Gaussian distribution mixture modeling [J]. Neurocomputing, 2008, 72(1-3):500-512.
- [9] ZRIBI M. Unsupervised Bayesian image segmentation using orthogonal series[J]. Visual Communication & Image Representation, 2007, 18(2):496-503.
- [10] McLACHLAN G J, PEEL D. Finite mixture models[M]. New York: Wiley, 2000.
- [11] 黄金杰, 盖光建. 基于高斯混合模型和 Renyi 熵的图像分割方法 [J]. 计算机应用研究, 2009, 26(4):1541-1543.
- [12] ZRIBI M, GHORBEL F. An unsupervised and non-parametric Bayesian classifier[J]. Pattern Recognition Letters, 2003, 24(1-3):97-112.
- [13] CENCOV N N. Evaluation of an unknown distribution density from observations[J]. Soviet Mathematics, 1962(3):1559-1562.
- [14] GEHRINGER K. Nonparametric probability density estimation using normalized B-Splines[J]. Communications in Statistics, 1992, 21(3):849-878.
- [15] 徐士良. 数值方法与计算机实现[M]. 北京:清华大学出版社, 2006.
- [16] DHART J D. On the choice of a truncation point in Fourier series density estimation [J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 1985, 21(2):95-116.
- [17] FOWLKES C, MARTIN D, MALIK J. The Berkeley segmentation dataset and benchmark (BSDB) [EB/OL]. http://www.cs.berkeley.edu/projects/vision/grouping/segbench/.
- [18] ZHANG Hui, JASON E, FRITTS B, et al. Goldman image segmentation evaluation: a survey of unsupervised methods[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2008, 110(2):260-280.