

结合波原子和全变差方法的图像去噪*

宋宜美¹, 卢成武², 宋国乡¹

(1. 西安电子科技大学 理学院, 西安 710071; 2. 重庆文理学院 数学与统计学院, 重庆 402160)

摘要: 传统的硬阈值去噪会产生伪吉布斯现象, 而波原子本身的周期化过程也会出现新的方向性纹理失真。采用全变差最小化方法来抑制这些失真, 提出一种改进的波原子去噪算法。该算法不是直接将低于阈值的小系数置为零, 而是对这些系数在全变差最小的意义上作修正迭代, 得到最终的去噪图像。数值实验结果表明, 波原子去噪保留边缘和纹理的效果优于小波和曲线波, 改进算法去噪的视觉质量明显好于传统波原子去噪。最后还指出了进一步的研究方向。

关键词: 波原子; 全变差最小化; 伪吉布斯现象; 方向性纹理; 图像去噪

中图分类号: TN911 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2010)05-1962-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.05.103

Image denoising based on wave atoms and total variation

SONG Yi-mei¹, LU Cheng-wu², SONG Guo-xiang¹

(1. School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China; 2. School of Mathematics & Statistics, Chongqing University of Arts & Sciences, Chongqing 402160, China)

Abstract: Traditional hard-threshold denoising can produce pseudo-Gibbs phenomena, and a new oriented texture distortion will appear in the cycle process of wave atoms itself. This paper suppressed these distortions using total variation regularization, obtaining an improved denoising algorithm based on wave atoms. These small coefficients below the given threshold was not directly set to zero, but rather to values that minimize the total variation, so could get the reconstructed image. Numerical experiment results show that wave atoms denoising retains better edges and textures than wavelet and curvelets, and the improved algorithm has significantly better visual quality than the traditional wave atoms denoising. Finally, this paper pointed out the directions for further research.

Key words: wave atoms; total variation minimization; pseudo-Gibbs phenomena; oriented texture; image denoising

图像去噪的目的在于滤除影响视觉的信息, 以获得真实和有信息的图像。而图像的边缘和纹理是图像的主要细节, 不希望去噪的同时, 边缘等信息受到很强的模糊。波原子是由 Demanet 等人在文献[1,2]中提出的一种多尺度几何分析方法, 可被认为是方向小波和 Gabor 原子的插值。波原子这种二维新型多尺度变换, 满足曲线波的抛物比例尺度关系^[3,4]。与传统的小波、Gabor 原子、脊波和曲线波相比, 波原子为振荡纹理的图像提供了更稀疏的表示, 能够有效地捕获图像的高维奇异特征和纹理信息, 从而保留图像的几何结构。本文研究波原子在图像去噪中的应用, 针对去噪过程中产生的新方向性纹理失真和伪吉布斯现象, 结合系数全变差最小^[5,6]提出了一种改进的图像去噪算法。数值实验表明, 波原子方法在视觉质量和峰值信噪比方面都优于小波、曲线波方法。改进算法去噪可以保留图像更多的边缘和纹理信息, 同时能有效抑制去噪过程中的失真现象。

1 基本理论

1.1 波原子

设波原子为 $\varphi_\mu(x)$, 下标 $\mu = (j, m_i, n_i)$, $j, m_i, n_i \in Z (i=1, 2)$, 相空间的任意一点 (x_μ, w_μ) 满足 $x_\mu = 2^{-j}n$, $w_\mu = 2^j m\pi$, 且 $C_1 2^j \leq$

$\max_{i=1,2} |m_i| \leq C_2 2^j$ 。其中: $C_1, C_2 > 0$ 是常数; x_μ 和 w_μ 分别表征波原子 $\varphi_\mu(x)$ 在空域和频域的中心。

定义 1^[1] 称波包 $\{\varphi_\mu(x)\}$ 的框架元为波原子, 如果对任意 $M > 0$, $\varphi_\mu(x)$ 在相空间点 (x_μ, w_μ) 处满足空频局部化条件:

$$|\varphi_\mu(x)| \leq C_M 2^j (1 + 2^j |x - x_\mu|)^{-M} \quad (1)$$

$$|\hat{\varphi}_\mu(w)| \leq C_M 2^{-j} (1 + 2^{-j} |w - w_\mu|)^{-M} + C_M 2^{-j} (1 + 2^{-j} |w + w_\mu|)^{-M} \quad (2)$$

波原子的构造比曲线波更为灵活。数字波原子构造的关键在于选择一个适当的一维波包, 使其具有波原子定义所要求的空频局域性(式(1)和(2))。利用 Lars Villemoes 的频域局部化策略, 可以通过一维波包的张量积构造数字波原子^[1]。

对任意 $f(x) \in L^2(R)$, 在 2^{-j} 尺度上的空域一维波原子系数为

$$C_{j,m,n} = \int \Psi_m^j(x - 2^{-j}n) f(x) dx = \Psi_m^j(x - 2^{-j}m) \times f(x)$$

根据 Plancherel 关系, 得到频域的一维波原子系数为

$$C_{j,m,n} = \frac{1}{2\pi} \int e^{i2^{-j}mw} \Psi_m^j(w) \hat{u}(w) dw$$

在二维情形, 仍设 $\mu = (j, m_i, n_i)$, Hilbert 变换记为 H , 定义正交基及对偶正交基分别为

$$\varphi_\mu^+(x_1, x_2) = \Psi_{m_1}^j(x_1 - 2^{-j}n_1) \Psi_{m_2}^j(x_2 - 2^{-j}n_2)$$

$$\varphi_\mu^-(x_1, x_2) = H\Psi_{m_1}^j(x_1 - 2^{-j}n_1) H\Psi_{m_2}^j(x_2 - 2^{-j}n_2)$$

收稿日期: 2009-09-14; 修回日期: 2009-10-23 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60872138); 重庆文理学院重点科研基金资助项目(Z2006SJ33)

作者简介: 宋宜美(1977-), 女, 山东德州人, 博士研究生, 主要研究方向为多尺度分析、偏微分方程的图像处理(ymsong@mail.xidian.edu.cn); 卢成武(1970-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为小波理论、偏微分方程及其在图像处理中的应用; 宋国乡(1938-), 女, 教授, 博导, 主要研究方向为数值计算、小波理论及其应用。

若记 $\varphi_{\mu}^{(1)} = \frac{\varphi_{\mu}^{+} + \varphi_{\mu}^{-}}{2}$, $\varphi_{\mu}^{(2)} = \frac{\varphi_{\mu}^{+} - \varphi_{\mu}^{-}}{2}$, 则 $\{\varphi_{\mu}\} = \{\varphi_{\mu}^{(1)}, \varphi_{\mu}^{(2)}\}$ 就形成了波原子框架,且有

$$\sum_{\mu} |\langle \varphi_{\mu}^{(1)}, f \rangle|^2 + \sum_{\mu} |\langle \varphi_{\mu}^{(2)}, f \rangle|^2 = \|f\|^2$$

二维波原子变换系数为

$$WA_{\mu}(f) = \langle f, \varphi_{\mu}^{(1)} \rangle + \langle f, \varphi_{\mu}^{(2)} \rangle$$

波原子变换是具有多分辨率、局域性和方向性的函数分析方法,复合生物学研究所指出的最优图像表示方法所具有的三种特征。其实,这也是波原子具有好的非线性逼近能力的根本原因。虽然曲线波也满足抛物比例关系,但曲线波对纹理部分的表征不如波原子。其原因就在于曲线波只捕获了沿振荡方向的信息,而对穿过该方向的信息描述不够,所以在对纹理图像以及纹理信息较丰富的图像作处理时,使用波原子变换将是很好的选择。

1.2 波原子硬阈值去噪

若假定含噪图像表示为 $f = u + \eta$ 。其中: u 为无噪干净图像; η 为零均值、方差为 σ^2 的高斯噪声。图像去噪是从 f 中恢复出干净图像 u 。软阈值函数由于其连续性使得图像在去噪时的边缘过于模糊,细节丢失得过多。硬阈值方法可以很好地保留图像边缘等局部特征,因此,本文选用波原子硬阈值去噪。波原子变换硬阈值去噪的基本思想与基于小波的去噪方法一致。首先对含噪图像 f 进行波原子变换,然后通过阈值函数对波原子变换系数进行非线性阈值,再根据所保留下的系数重构,得到干净图像 u 的一个估计:

$$\hat{u} = \sum_{\mu \in \Lambda} S_{\lambda}(WA_{\mu}(f)) \varphi_{\mu} \quad (3)$$

其中: $WA_{\mu}(f) = \langle f, \varphi_{\mu} \rangle$; $S_{\lambda}(\cdot)$ 是硬阈值函数; $\Lambda = \{\mu | |WA_{\mu}(f)| \geq \lambda\}$ 为保留波原子系数的指标集。

2 全变差最小的改进去噪算法

由于硬阈值算子的不连续性和波原子变换 FFT 过程的周期化影响,使阈值去噪的同时在图像的不连续点邻域(边缘和纹理)产生伪吉普斯现象,出现新的方向性纹理等失真。这种失真可视作为一种整体振荡,而全变差正则化能较好地抑制图像的整体振荡性^[6,7]。因此,本文引入全变差正则化技术来抑制这些失真,提出一种波原子系数全变差最小的图像去噪改进算法。该算法不是直接将低于阈值的小系数置为零,而是对这些系数在全变差最小的意义上作修正迭代,得到最终的去噪图像。经典 ROF 模型在有界变差函数空间约束图像的光滑性,给出一种保边缘图像去噪方案:

$$\min_{u \in BV(\Omega)} TV(u) + \lambda \|f - u\|_{L^2}^2$$

其中:第一项 $TV(u)$ 是正则项;第二项 $\|f - u\|_{L^2}^2$ 是逼近项;参数 λ 在这两项之间起平衡作用。一般来说, λ 越大, f 与 u 越接近,去除的噪声少,而较小的 λ 值使 u 过光滑。

考虑图像恢复模型:

$$\begin{cases} \min_{u \in U} TV(u) \\ U = \{u : u \in BV(\Omega), WA_{\mu}(u) = WA_{\mu}(f), \mu \in \Lambda\} \end{cases} \quad (4)$$

若令 $V = \{v : v \in BV(\Omega), WA_{\mu}(v) = 0, \mu \in \Lambda\}$, 则 U 是由 V 确定的仿射空间,且有 $U = \{u : u \in BV(\Omega), u = \hat{u} + v, v \in V\} = \{\hat{u}\} + V$ 。式(4)的目标函数是凸函数,仿射空间 U 也是凸的,利用投影梯度算法进行迭代求解:

$$u^1 = \hat{u}, u^{k+1} = u^k + \tau_k P_v(g(TV(u^k))) \quad (5)$$

其中: $\tau_k \geq 0$ 为迭代步长; $g(\cdot)$ 表示次梯度; $P_v(\cdot)$ 表示在 V 空间上的正交投影。记 $(WA)^{-1}, S_{\lambda}^{-1}$ 分别表示波原子逆变换、反阈值函数,则 $P_v(x) = (WA)^{-1} S_{\lambda}^{-1}(WA)(x)$ 。

3 实验结果与分析

为了验证波原子在实际图像处理中的有效性,本文对图像非线性逼近、图像压缩及去噪做了大量仿真实验。实验所用测试图为 Brodatz 库中的纹理图、Finger 图像和 Barbara 图像,对图像加入高斯白噪声。采用的去噪方法分别为快速曲线波去噪^[8]、db5 小波去噪、波原子去噪。图 1 给出噪声方差为 20 的 Finger 图像去噪的效果,图 2 给出噪声方差为 25 的 Barbara 图像去噪的效果。可以明显看出,波原子对纯纹理图去噪的效果要优于传统小波去噪和快速曲线波去噪,特别是波原子方法恢复的图像更清晰。曲线波去噪能比小波更好地保留边缘,峰值信噪比也提高得多;而波原子既能很好地保留图像的曲线型边缘轮廓,同时在表征纹理上也优于其他两种方法,使用波原子算法更多地保留了指纹图像的纹理细节,视觉效果明显较曲线波、小波方法好。



图1 Finger图的去噪效果比较($\sigma=20$)

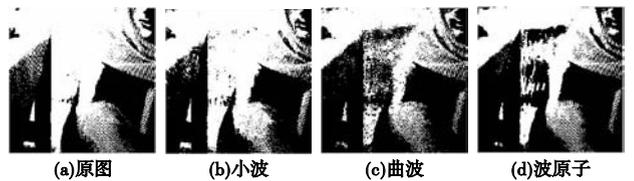


图2 Barbara图的去噪效果比较($\sigma=25$)

数值实验进一步分析比较了不同噪声级含噪图像进行去噪的效果,如表 1 和 2 所示。数据的比较说明波原子去噪方法在性能参数上也有较明显的提高,而且在强噪声背景下,这种优势更加明显。

表 1 不同方差 Finger 图去噪的 PSNR dB

方法	σ			
	10	15	20	25
含噪图	22.15	24.61	22.12	20.16
小波	30.78	28.29	26.53	25.07
曲线波	30.35	28.38	26.96	25.77
波原子	31.16	28.73	27.15	25.94

表 2 不同方差 Barbara 图去噪的 PSNR dB

方法	σ			
	10	15	20	25
含噪图	28.14	24.61	22.07	20.16
小波	29.64	27.03	25.51	24.72
曲线波	31.70	28.88	26.92	25.48
波原子	33.19	30.96	29.46	28.37

波原子阈值去噪算法是对图像分解系数进行直接处理,保留大于阈值的系数再重构的结果,算法简单且运算量小,对去噪图像的细节信息保持得较好。但由于硬阈值算子的不连续性和波原子变换的 FFT 过程容易出现伪吉普斯现象,产生新的方向性纹理等失真。为了表明改进算法模型(式(4))抑制这一失真的优越性,通过实验比较波原子去噪及改进算法去噪

的效果。图 3 是噪声方差为 10 的 Seismic 图像迭代 15 次的去噪效果,图 4 是噪声方差为 15 的 Finger 图像迭代 20 次的去噪效果。波原子阈值去噪算法带来新的方向性纹理,出现较明显的伪吉普斯现象;而改进算法在去除噪声的同时,不仅保留了图像更多的边缘,而且这些失真得到了较好的抑制。

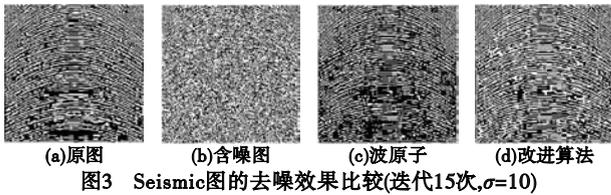


图3 Seismic图的去噪效果比较(迭代15次, $\sigma=10$)



图4 Finger图的去噪效果比较(迭代20次, $\sigma=5$)

4 结束语

波原子是一种图像处理和数值分析的新型方向多尺度变换,振荡周期和支撑大小满足抛物尺度关系。其显著特征是多尺度和各项异性,能对不同方向上光滑的振荡函数(如纹理)获得很稀疏的展开;波原子的构造避开了标准小波包,直接在频率域将 Lars Villemoes 策略推广到二维。鉴于波原子的这些良好特性,它在图像逼近、压缩分解及去噪中都发挥了很大的潜力。本文研究表明,波原子对纹理信息丰富的图像具有极好的表征能力,使用波原子去除噪声能更好地保留图像的边缘和纹理,处理后的纹理清晰度和对比度都优于传统的小波阈值和曲线波阈值方法。虽然波原子去噪算法具有与小波、曲线波去噪类似的伪吉普斯现象(如新的方向性纹理),但笔者给出的改进算法用全变差最小的波原子系数代替直接阈掉的小系数,有效地抑制了这一失真,去噪的视觉质量得到明显的提高。

(上接第 1961 页)(b)为去除了伪分段点的结果,伪分段点用黑色圆圈表示,真正的分段点用灰色圆圈表示;(c)为对分段后含有单个图元信息的子 strokes 进行图元识别后的结果,图中用虚线画出椭圆,用粗线画出直线。从图 19 可以看出,输入的复合笔画经过去噪、分段、识别等操作后可以成功地识别为基本图元。

图 20 为 strokes 经识别分类解释为三维体元的过程,可以通过调色板自由选择建模对象的颜色。由图 1 可知,可以在绘图窗口中进行手绘以生成基本体元,也可以在业已形成的三维场景中添加新的 strokes 从而生成新的基本体元。图 21 为绘制得到的三维场景。

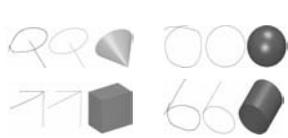


图20 从输入笔画到三维体元

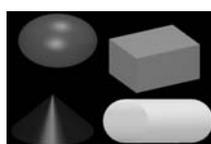


图21 由基本体元构成的三维场景

7 结束语

由上文和实验结果可知,本文研究并实现了基于手绘的三维建模系统。本手绘建模系统精度高、鲁棒性强、交互性好、速

由于波原子理论刚刚兴起,在波原子理论和应用的发展过程中仍存在许多有意义的工作有待进一步展开:a)波原子理论的进一步完善,如冗余性及平移不变性;b)波原子变换的算法复杂度很高,需要给出快速算法以减少运算代价;c)波原子变换与各种图像处理方法结合,如与其他多尺度几何分析方法、全变差正则化等 PDE 方法、逆尺度空间、压缩感知等结合起来;d)对波原子不同版本(正交基、2 冗余的紧框架、4 冗余的紧框架和镜面延拓波原子)的特性研究,找出其更恰当的应用领域。例如镜面延拓波原子用 DCT 代替 FFT,避免了标准波原子变换过程中的周期化效应所带来的冗余。若将这一新思想嵌入去噪过程中,会抑制方向性失真和伪吉普斯现象,这将是下一步的研究工作。

参考文献:

- [1] DEMANET L, YING Le-xing. Wave atoms and sparsity of oscillatory patterns[J]. Appl Comput Harmon Anal,2007,23(3):368-387.
- [2] DEMANET L. Curvelets, wave atoms and wave equations [D]. California; California Institute of Technology,2006.
- [3] DEMANET L, CANDLES E J. The curvelet representation of wave propagators is optimally sparse [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics,2005,58(11):1472-1528.
- [4] DONOHO D L, CANDLES E J. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise- C^2 singularities [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004,57(2):219-266.
- [5] DURAND S, FROMENT J. Reconstruction of wavelet coefficients using total variation minimization [J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2003,24(5):1754-1767.
- [6] MA Jian-wei,FENN M. Combined complex ridgelet shrinkage and total variation minimization[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2006,28(3):984-1000.
- [7] MA Jian-wei,PLONKA G. Combined curvelet shrinkage and nonlinear anisotropic diffusion [J]. IEEE Trans on Image Process, 2007,16(9):2198-2206.
- [8] CANDLES E, DEMANET L, DONOHO D ,et al. Fast discrete curvelet transforms [J]. Multiscale Modeling and Simulation,2006,5(3):861-899.

度快;可以对随意输入的笔画进行精确的分段处理;对分段后的子 strokes 进行图元识别,提取最符合输入笔画意图的图元参数;所生成的模型不受笔画输入顺序的限制;可在已经渲染好的三维场景中添加新的笔画生成新的基本体元;从 strokes 获取到绘制出三维场景只需要几十秒钟的时间。

参考文献:

- [1] OLSEN L, SAMAVATI F F, SOUSA M C, et al. A taxonomy of modeling techniques using sketch-based interfaces[R].2008.
- [2] 王淑侠,廖达雄,王关峰.一种快速手绘草图在线识别方法[J].机械制造,2005,43(12):29-31.
- [3] WOLIN A, EOFF B, HAMMOND T. Shortstraw: a simple and effective corner finder for polylines [C]//Proc of the 5th Annual Workshop on Sketch Based Interfaces and Modeling.2008:33-40.
- [4] QIN Sheng-feng. Intelligent classification of sketch strokes [C]//Proc of International Conference on Computer as a Tool.2005:1374-1377.
- [5] EGGLI L, BRIIDERLIN B D, ELBER G. Sketching as a solid modeling tool [C]//Proc of the 3rd ACM Symposium on Solid Modeling and Applications. New York; ACM Press,1995:313-322.
- [6] ROSIN P L. A note on the least squares fitting of ellipses [J]. Pattern Recognition Letters,1993,14(10):799-808.
- [7] OLSEN L, SAMAVATI F F, SOUSA M C, et al. Sketch-based modeling: a survey [J]. Computers and Graphics,2009,33(1):85-103.