

文章编号: 0258-2724(2010)04-0498-05 DOI: 10.3969/j.issn.0258-2724.2010.04.002

# 质量弹簧阻尼旋转系统的动频和复模态运动

刘占芳, 张凯, 颜世军  
(重庆大学资源与环境学院, 重庆 400030)

**摘要:** 为探讨复杂结构在离心振动复合环境下的动力学行为,建立了旋转系统的动力学方程,计算了系统的特征频率和复模态矢量,并对复模态矢量进行复分解,得到了系统复模态运动的表征.研究表明,两自由度质量弹簧阻尼旋转系统存在特征频率和2阶复模态;系统特征频率与旋转系统的转速有关,并受离心软化和科氏阻尼的影响;科氏阻尼导致系统出现复模态矢量,质点做极化的圆运动,说明科氏阻尼引起了旋转系统的运动耦合;科氏阻尼不是物理阻尼,不引起系统自由振动的衰减.

**关键词:** 旋转系统;离心软化;科氏力;复模态;圆螺旋运动

**中图分类号:** O321 **文献标识码:** A

## Dynamic Frequencies and Complex Modal Motion of Mass-Spring-Damping Rotating System

LIU Zhanfang, ZHANG Kai, YAN Shijun

(School of Resource and Environmental Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** In order to provide a basis for researching the dynamic behavior of engineering structures in a centrifugal and vibration compound environment, dynamic equations for a mass-spring-damping rotating system with two degrees-of-freedom were set up, and the eigenfrequencies and complex modal vectors of the system were calculated. The complex decomposition of the complex modal vectors were carried out to obtain the expression of complex modal motion. The research result shows that the mass-spring-damping rotating system has dynamic frequencies and two complex modes. The eigenfrequencies of the system are related to its rotation speed and influenced by centrifugal softening and Coriolis damping. Coriolis damping makes the system eigenvectors be complex modal vectors and mass point motion be a polarized circle to show that Coriolis damping produces a motion coupling. Coriolis damping is not real physical damping, so it does not result in the attenuation of free vibration of the system.

**Key words:** rotating system; centrifugal softening; Coriolis force; complex mode; helix circular motion

旋转结构会产生科氏力效应和离心软化效应,导致结构的振动特性不同于其固有振动特性<sup>[1-5]</sup>.对于一些尺寸很大的复杂结构,如兆瓦级风轮,不能忽略二者对结构特征频率和模态的影响.

在工程实践中,一方面需要进行结构优化设计,以调整旋转结构的特征频率,另一方面,通过控

制系统转速规避一些转速点或转速范围,以避免系统产生共振<sup>[6-8]</sup>.

为简化复杂旋转结构动力学特性的研究,本文中选取具有代表性的两自由度质量弹簧阻尼旋转系统,试图揭示系统特征频率与转速的关系、模态特征以及系统质点的运动轨迹,分析科氏力效应和

收稿日期: 2009-09-21

基金项目: 重庆市科技攻关计划资助项目(CSTC2008AC3105)

作者简介: 刘占芳(1963-),男,教授,博士,研究方向为结构动力学、冲击动力学和多孔介质,电话:023-65111659, E-mail: zhanfang@cqu.edu.cn

离心软化效应对质量弹簧阻尼旋转系统振动特性的影响,为大型复杂旋转结构的动力特性分析及其振动控制提供理论指导。

### 1 系统动力学方程

如图 1 所示,一个两自由度的质量弹簧阻尼系统以角速度  $\Omega_z$  旋转,坐标系建立在静力平衡的质点上,取旋转轴与坐标系  $z$  轴的方向一致。

建立系统沿坐标轴  $x$  和  $y$  方向的动力平衡方程.沿  $x$  方向,有

$$m\ddot{x} = -kx + m\Omega_z^2 x + 2m\Omega_z \dot{y} - c\dot{x},$$

式中: $m$  为质点质量; $k$  为弹簧系数; $c$  阻尼系数; $x$ ,  $\dot{x}$  和  $\ddot{x}$  分别为质点沿  $x$  方向的位移、速度和加速度。

沿  $y$  方向,有

$$m\ddot{y} = -ky + m\Omega_z^2 y - 2m\Omega_z \dot{x} - c\dot{y},$$

式中: $y$ ,  $\dot{y}$  和  $\ddot{y}$  分别为质点沿  $y$  方向的位移、速度和加速度。

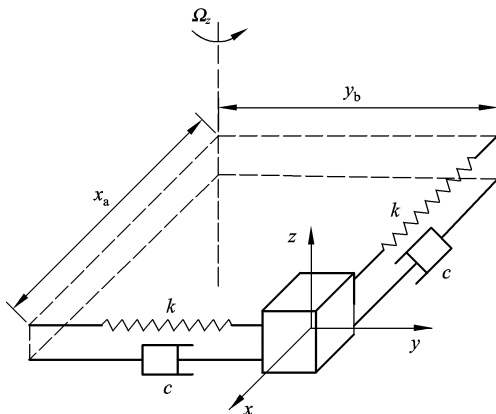


图 1 两自由度质量弹簧阻尼旋转系统  
Fig. 1 Sketch of a mass-spring-damping rotating system with two degrees-of-freedom

平衡方程的矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2m\Omega_z \\ 2m\Omega_z & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k - m\Omega_z^2 & 0 \\ 0 & k - m\Omega_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令  $\mathbf{X} = (x \ y)^T$ ,  $\mathbf{X}$  为质点的位移矢量,得到  $xy$  平面两自由度质量弹簧阻尼旋转系统的动力学方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_c)\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_s)\mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}$  为系统质量矩阵; $\mathbf{C}$  为系统阻尼矩阵; $\mathbf{C}_c$  为科氏矩阵; $\mathbf{K}$  为系统的线性刚度矩阵; $\mathbf{K}_s$  为离心

软化刚度矩阵。

它们的表达式如下:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{pmatrix} 0 & -2m\Omega_z \\ 2m\Omega_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_s = m\Omega_z^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然,离心力使系统刚度减小,科氏力造成系统运动耦合。

### 2 系统动力特性

动力方程(1)有以下矢量形式的解:

$$\mathbf{X} = \Phi e^{\lambda t}.$$

将上式代入方程(1),有

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_c)\lambda + \mathbf{K} - \mathbf{K}_s]\Phi = \mathbf{0}.$$

从矢量  $\Phi$  的非零解条件,并代入  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{C}_c, \mathbf{K}$  和  $\mathbf{K}_s$ ,可得特征方程

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + c\lambda + (k - m\Omega_z^2) & -2m\Omega_z\lambda \\ 2m\Omega_z\lambda & m\lambda^2 + c\lambda + (k - m\Omega_z^2) \end{vmatrix} = 0.$$

改写特征方程为:

$$[m\lambda^2 + c\lambda + (k - m\Omega_z^2)]^2 + (2m\Omega_z\lambda)^2 = 0. \quad (2)$$

解方程(2),得特征方程的特征值

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{\delta + c^2 - 4mk}{8m^2}} - \frac{c}{2m} \pm$$

$$\left( \sqrt{\frac{4mk - c^2 + \delta}{8m^2}} - \Omega_z \right) i, \quad (3)$$

$$\lambda_{3,4} = -\sqrt{\frac{\delta + c^2 - 4mk}{8m^2}} - \frac{c}{2m} \pm$$

$$\left( \sqrt{\frac{4mk - c^2 + \delta}{8m^2}} + \Omega_z \right) i, \quad (4)$$

式中: $\delta = [(4mk - c^2)^2 + (4mc\Omega_z)^2]^{1/2}$ 。

#### 2.1 系统特征频率与转速的关系

设系统的第 1 阶和第 2 阶圆频率分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ,系统第 1 阶模态衰减系数为  $\eta_1$ ,  $\eta_1 = \sqrt{(\delta + c^2 - 4mk)/(8m^2)} - c/(2m)$ ,系统第 2 阶模态衰减系数为  $\eta_2$ ,  $\eta_2 = -\sqrt{(\delta + c^2 - 4mk)/(8m^2)} - c/(2m)$ ,令  $\lambda_{1,2} = \eta_1 \pm i\omega_1$ ,  $\lambda_{3,4} = \eta_2 \pm i\omega_2$ ,得到

方程(1)的2对共轭特征值,则系统具有2阶特征模态.特征值的实部 $\eta_1$ 和 $\eta_2$ 分别对应系统的2阶特征模态振幅衰减函数.系统有2阶特征频率,第1阶特征频率 $f_1$ 和第2阶特征频率 $f_2$ 分别为:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{4mk - c^2 + \delta}{8m^2}} - \Omega_z \right); \quad (5)$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{4mk - c^2 + \delta}{8m^2}} + \Omega_z \right). \quad (6)$$

作为例子,令 $m = 4 \text{ kg}$ ,  $k = 900 \text{ N/m}$ ,  $c = 110 \text{ kg/s}$ ,图2为系统的2阶特征频率 $f_1$ 和 $f_2$ 随转速变化的关系曲线.可见,第1阶特征频率随转速增大而降低,表明结构软化;与此对应的特征模态衰减系数 $\eta_1$ 随转速增大而增大(图3),表明系统的第1阶特征模态振幅的衰减速度变慢.当转速达到某值(143 r/min)时,第1阶特征频率为0,对应的衰减系数 $\eta_1$ 也为0,这时振动消失,系统不稳定.系统的第2阶特征模态衰减系数 $\eta_2$ 随转速增大而减小,则模态振幅的衰减速度加快,对应的第2阶特征频率 $f_2$ 增大.

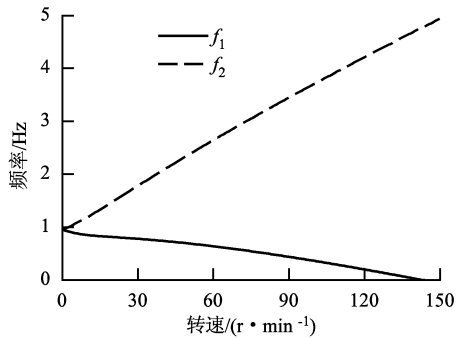


图2 系统特征频率 $f_1$ 和 $f_2$ 与转速的关系  
Fig. 2 The relationship of system eigenfrequencies and rotation speed

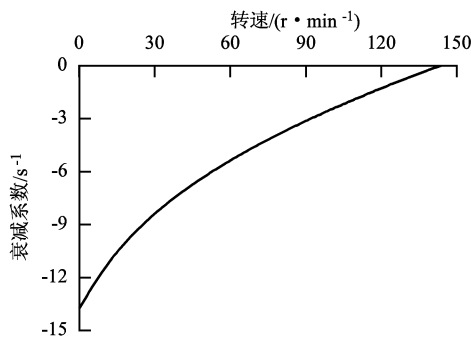


图3 第1阶复模态衰减系数 $\eta_1$ 与转速的关系  
Fig. 3 The relationship of attenuation parameter  $\eta_1$  of the first complex mode and rotation speed

若忽略结构阻尼,即令阻尼系数 $c = 0$ ,则2个衰减系数均为0,而系统特征频率分别退化为:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} - \Omega_z \right), \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} + \Omega_z \right).$$

即系统的特征频率与转速成线性关系,当转速为0时,特征频率即为系统固有频率.

## 2.2 系统单一模态的运动轨迹

容易得到质量弹簧阻尼旋转系统的第1阶复模态特征矢量 $\Phi_1$ 和第2阶复模态特征矢量 $\Phi_2$ 的矩阵形式:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的共轭矩阵分别为

$$\Phi_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \Phi_2^* = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

系统的第1阶复模态矢量可以分解为

$$\Phi_1 = \Phi_1^+ + i\Phi_1^-, \quad (7)$$

式中: $\Phi_1^+$ 和 $\Phi_1^-$ 均为实矢量,分别为系统第1阶复模态矢量的实部矢量和虚部矢量.

$\Phi_1^+$ 和 $\Phi_1^-$ 的矩阵形式分别为

$$\Phi_1^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Phi_1^+$ 和 $\Phi_1^-$ 满足正交条件,即

$$\Phi_1^+ \cdot \Phi_1^- = 0. \quad (8)$$

质量弹簧阻尼旋转系统第1阶复模态质点的运动方程为:

$$X_1 = A\Phi_1 e^{\lambda_1 t} + B\Phi_1^* e^{\bar{\lambda}_1 t}, \quad (9)$$

式中: $\Phi_1 e^{\lambda_1 t}$ 和 $\Phi_1^* e^{\bar{\lambda}_1 t}$ 为系统第1阶单一模态质点运动方程的2个特解; $t$ 为时间; $A$ 和 $B$ 为复数.

方程(9)中, $X_1$ 为复位移表达.因为实位移才有物理意义,为获得 $X_1$ 的实数解形式,须对方程(9)的2个特解进行变换.由二阶线性微分方程解的叠加原理<sup>[6]</sup>,有

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} (\Phi_1 e^{\lambda_1 t} + \Phi_1^* e^{\bar{\lambda}_1 t}) = \exp(\eta_1 t) (\Phi_1^+ \cos(\omega_1 t) - \Phi_1^- \sin(\omega_1 t)),$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2i} (\Phi_1 e^{\lambda_1 t} - \Phi_1^* e^{\bar{\lambda}_1 t}) = \exp(\eta_1 t) (\Phi_1^+ \sin(\omega_1 t) + \Phi_1^- \cos(\omega_1 t)),$$

式中: $\kappa_1$ 和 $\kappa_2$ 为系统单一模态对应质点运动方程的2个特解.

则 $X_1$ 的实数解形式为

$$X_1 = C_1 \exp(\eta_1 t) (\Phi_1^+ \cos(\omega_1 t) - \Phi_1^- \sin(\omega_1 t)) + D_1 \exp(\eta_1 t) (\Phi_1^+ \sin(\omega_1 t) + \Phi_1^- \cos(\omega_1 t)), \quad (10)$$

式中: $C_1$ 和 $D_1$ 为实常数,由初始条件确定.

同理,质量弹簧阻尼旋转系统第 2 阶模态对应质点的位移

$$X_2 = C_2 \exp(\eta_2 t) (\Phi_2^+ \cos(\omega_2 t) - \Phi_2^- \sin(\omega_2 t)) + D_2 \exp(\eta_2 t) (\Phi_2^+ \sin(\omega_2 t) + \Phi_2^- \cos(\omega_2 t)). \quad (11)$$

则系统自由振动的通解形式为:

$$X = C_1 \exp(\eta_1 t) (\Phi_1^+ \cos(\omega_1 t) - \Phi_1^- \sin(\omega_1 t)) + D_1 \exp(\eta_1 t) (\Phi_1^+ \sin(\omega_1 t) + \Phi_1^- \cos(\omega_1 t)) + C_2 \exp(\eta_2 t) (\Phi_2^+ \cos(\omega_2 t) - \Phi_2^- \sin(\omega_2 t)) + D_2 \exp(\eta_2 t) (\Phi_2^+ \sin(\omega_2 t) + \Phi_2^- \cos(\omega_2 t)). \quad (12)$$

令初始条件  $t = 0$  时,  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$ , 则有

$$C_1 = \frac{-\omega_1 \omega_2 \dot{x}_0 + \omega_1 x_0}{\omega_1 + \omega_2},$$

$$D_1 = \frac{\omega_1 \omega_2 \dot{y}_0 + \omega_1 y_0}{\omega_1 + \omega_2},$$

$$C_2 = \frac{-\omega_1 \omega_2 \dot{y}_0 + \omega_2 y_0}{\omega_1 + \omega_2},$$

$$D_2 = \frac{\omega_1 \omega_2 \dot{x}_0 + \omega_2 x_0}{\omega_1 + \omega_2}.$$

一般,当振动系统出现复模态时,往往令各阶模态的常系数取复数共轭形式,目的是与 2 个共轭特解的线性组合产生实数解<sup>[10-12]</sup>. 这种数学处理导致质点运动为直线运动,掩盖了振动系统的固有属性,并且这种假设在数学上也有问题.

由于  $\Phi_1^+$  和  $\Phi_1^-$  的正交性,由式(10)得:

$$(X_1 \cdot \Phi_1^+)^2 + (X_1 \cdot \Phi_1^-)^2 = x^2 + y^2 = [\exp(\eta_1 t)]^2 (C_1^2 + D_1^2), \quad (13)$$

式中:  $X_1 \cdot \Phi_1^+$  和  $X_1 \cdot \Phi_1^-$  分别为质点沿局部坐标轴  $x$  和  $y$  方向的位移.

方程(13)描述了转速一定时,质量弹簧阻尼旋转系统质点的位移矢量  $X_1$  在  $xy$  平面的一个极化的圆螺旋运动轨迹(图 4),其初始圆半径为  $(C_1^2 + D_1^2)^{1/2}$ ,极化运动方向取决于系统的初始条件,圆周运动角速度为  $\omega_1$ .

由于  $\Phi_2^+$  和  $\Phi_2^-$  的正交性,同理,有

$$(X_2 \cdot \Phi_2^+)^2 + (X_2 \cdot \Phi_2^-)^2 = x^2 + y^2 = [\exp(\eta_2 t)]^2 (C_2^2 + D_2^2). \quad (14)$$

所以,系统第 2 阶模态质点的运动也是极化的圆螺旋运动轨迹. 与第 1 阶模态不同的是,初始圆半径为  $(C_2^2 + D_2^2)^{1/2}$ ,极化运动方向取决于系统的初始

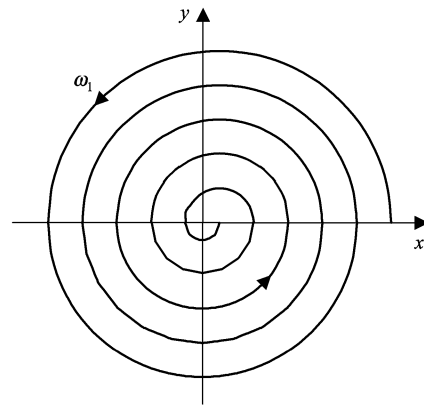


图 4 系统第 1 阶复模态质点的圆螺旋运动轨迹  
Fig. 4 Helix circle motion trajectory of mass related to the first system complex mode

条件,圆周运动角速度为  $\omega_2$ .

因此,二阶动力学方程出现运动耦合的一阶科氏项,导致旋转系统存在复模态矢量,意味着质点的运动将不再是单一的偏离平衡点的直线运动,而是一种极化圆周运动( $\eta_1 = \eta_2 = 0$  时). 当系统存在结构阻尼时,其单一复模态质点的运动是极化的圆螺旋运动轨迹.

### 3 结 论

基于两自由度质量弹簧阻尼旋转系统的动力学方程,研究了离心力、科氏力和结构阻尼对系统 2 阶振动特性的影响. 系统特征频率与转速的关系表明,第 1 阶振动存在不稳定现象. 旋转系统的运动耦合形成科氏力效应,科氏项使系统的模态矢量为复矢量,表示单一复模态对应的系统质点的运动为极化的圆螺旋运动. 结构阻尼造成系统振动衰减,但科氏一阶项并非真实的物理阻尼,不导致振动衰减.

#### 参考文献:

- [1] 张锦,刘晓平. 叶轮机振动模态分析理论与数值方法[M]. 北京:国防工业出版社,2001: 142-148.
- [2] THOMAS G, CARNE T G, LOBITZ D W, et al. Finite element analysis and modal testing of a rotating wind turbine [R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1982.
- [3] GENTA G. Dynamics of rotating systems[M]. Berlin: Springer, 2005: 93-127.
- [4] 廖日东,左正兴,陈宏,等. 考虑旋转软化效应的涡轮叶片模态特性研究[J]. 内燃机学报,2000,18(1): 77-79.

(下转第 513 页)