【文章编号】 1004-1540(2010)01-0063-04

度量工业过程能力的重要指标 C_{PK}

陶靖轩
(中国计量学院 经济与管理学院,浙江 杭州 310018)

【摘　要】 讨论了基本的过程能力指数之一 C_{PK} 的重要作用及与其它指数之间的关系,以及确定的方法;最后说明 C_{PK} 在使用时应该注意的问题.

【关键词】 不合格品率;统计过程控制;过程能力;过程能力指数
【中图分类号】 O213.2　　【文献标识码】 A

Important indicator C_{PK} for measure of industrial process capability

TAO Jing-xuan
(College of Economics and Management, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The important role of one of the basic process capability indices-C_{PK}, its relationship with the other indices, and method of calculation are discussed . Finally, the problems when using C_{PK} are illustrated.

Key words: rate of unqualified products; statistical process control; process capability; process capability indices

在工业企业实施SPC(统计过程控制)中,对过程能力的测量、诊断是一项重要的工作,在此阶段准确地测算过程能力指数(如 C 系列指数:C_P,C_{PU},C_{PL},C_{PK},C_{PM},C_{PMK} 等)是非常必要的.以往作者曾就过程能力指数的功能和特性进行过一些分析、探索(见文献[1]);比如给定 $C_{PK}=C_P(1-K)$ 的值并不能唯一确定产品的不合格品率 P;但这只是问题的一个方面,并不是说 C_{PK} 不能在SPC中应用,甚至说 C_{PK} 是不对的等等;相反,C_{PK} 是度量工业过程能力的最重要指标之一,从某种意义上讲,C_{PK} 的使用在所有基本的过程能力指数中最为普遍.本文针对这一指数再次进行讨论,从四个方面对其存在的意义和价值及其确定方法进行讨论,以坚定我国企业推行六西格玛管理的信心,使这一目前世界上先进的管理理念和方法尽早发挥作用,为我国的社会主义经济建设事业做出贡献.

1　C_P、C_{PK} 配合使用是客观诊断过程能力的有效方法

根据《常规控制图》国家标准GB/T 4091-2001,对双侧公差情况过程能力指数规定:

$$C_P=\frac{T_U-T_L}{6\sigma}$$

T_U-T_L 通常代表技术公差的幅度,6σ 表示过程输出变量的标准差的六倍,用以表示过程的能力;他们的比值本是一个简单的相对指标.从广

【收稿日期】 2010-03-01
【作者简介】 陶靖轩(1948-),男,河南许昌人,教授.主要研究方向为数理统计与质量管理.

义统计意义上，一切相对数都可以称之为指数，所以这一指标称为过程能力指数是非常自然的. 当然，这公式的计算有一些必要的前提，比如要求过程中心（以下记 μ）与规范中心（以下记 M）重合；而在具体的生产过程中，要让 $\mu\equiv M$ 实际上是很困难的，所以又有“有偏离情况的过程能力指数”：$C_{PK}=\min\{C_{PU},C_{PL}\}$，可以证明：$C_{PK}=C_P(1-K)$，其中 $K=\dfrac{2\varepsilon}{T}$ 表示 μ 对 M 偏离的相对数，$\varepsilon=|M-\mu|$（无论左偏、右偏）：如果 $K=0$，就有 $C_{PK}=C_P$，所以前者又称为实际的过程能力指数，后者称为潜在的过程能力指数. 在 C_P 已知的情况下，如果我们能把 C_{PK} 测算出来，当然可以对过程有一个较全面的认识，正如文献[2]中所说：无偏移情况下的 C_P 表示过程加工的一致性，即“质量能力”，C_P 越大，则质量能力越强；而有偏移的情况下的 C_{PK} 反映过程中心与公差中心的偏移情况，C_{PK} 越大，则二者偏离越小，是过程的“质量能力”与“管理能力”二者综合的结果. 故 C_P、C_{PK} 二者的着重点不同，需要同时加以考虑，将 C_P、C_{PK} 数值联合使用，可以对产品质量有全面的了解（见文献[2]）

表1 联合应用 C_P、C_{PK} 所代表的合格品率

Table 1 Qualified rate of combinate C_P and C_{PK} %

C_{PK} C_P	0.33	0.67	1.00	1.33	1.67	2.00
0.33	68.269	84.000	84.134	84.134 4	84.134 47	84.134 47
0.67		95.450	97.722	97.725	97.724 99	97.724 99
1.00			99.730	99.865	99.865 0	99.865 01
1.33				99.994	99.996 83	99.996 83
1.67					99.999 94	99.999 97
2.00						99.999 999 8

同时由 C_{PK} 的表达式可以看出，当 $\mu=M$ 时，$C_P=C_{PK}$，当 $\mu\neq M$ 时，$C_{PK}<C_P$. 所以只要双侧规范给定，C_P 有意义，就应同时考虑 C_P、C_{PK} 两个指数，以便对整个过程的状况有较全面的了解. 例如：当 C_P、C_{PK} 都较小，且二者差别不大（如 $C_P=0.72$，$C_{PK}=0.69$），说明过程的主要问题是 σ 太大，改进过程应首先着眼于降低过程的波动. 若 C_P 较大，而 C_{PK} 较小（如 $C_P=1.33$，$C_{PK}=0.72$），二者差别较大，说明过程的主要问题是 μ 偏离 M 太多，改进过程应首先着眼于移动 μ 值，使之接近 M. 如果 C_P 原本就比较小，C_{PK} 更小（如 $C_P=0.84$，$C_{PK}=0.35$）二者差别较大时，说明过程的 σ 和 μ 都有问题，通常改进过程应首先移动 μ 值，使之更接近 M，然后设法降低过程的波动，总之不要单独使用这两个中的一个.

2 C_{PK}、C_P、C_{PM} 之间的数量关系

C_{PM} 称为田口指数（Taguchi），它被定义为

$$C_{PM}=\frac{d}{3\sqrt{E[(x-T)^2]}}=\frac{d}{3\sqrt{\sigma^2-(\mu-T)/\sigma^2}}$$

干扰引起了产品功能的波动，有波动就会造成质量损失，如何度量由于功能波动所造成的损失，田口玄一提出了质量损失函数的概念. 它把功能波动和经济损失联系起来，田口先生把产品（或者工艺项目）看作一个系统，这个系统的因素分为输入因素和输出因素，系统的设计目标值 T，他认为只要输出的质量特性偏离目标值就会产生质量（经济）损失，在给定目标值和标准差可测定情况下，田口指数是非常有效的. 为了解 C_P、C_{PK}、C_{PM} 之间的数量关系，以下我们假定 T 代表设定目标值，M 表示规范中心且具有对称容差，即 $M=T$，过程输出均值 μ 位于一个特定区间：

$T_L<\mu<T_U$（见文献[3]）

并定义 $d=(T_U-T_L)/2$，$M=(T_U+T_L)/2$，于是：

$$C_{PK}=C_P-C_PK=C_P-C_P\frac{2|\mu-M|}{T_U-T_L}=C_P-\frac{1}{3}\left|\frac{\mu-M}{\sigma}\right|$$

$$C_{PM}=\frac{C_P}{\sqrt{1+[(\mu-T)/\sigma]^2}}$$

若记 $\beta = |\mu - M| / \sigma$,故 $C_P = C_{PM}\sqrt{1+\beta^2}$

$$\beta^2 = \left(\frac{C_P}{C_{PM}}\right)^2 - 1$$

$$C_{PK} = \frac{-\beta}{3} + \sqrt{1+\beta^2}C_{PM} = C_P - \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{C_P}{C_{PM}}\right)^2 - 1}$$

从田口指数我们看到,质量特性的波动被分成两部分,要提高产品质量就必须使方差和偏离越小越好. 这一思想将质量损失理解为"社会损失",它最终会影响到设计制造方,给制造方带来市场的丢失和企业竞争力减弱.

3 C_{PK} 给出了过程产生的产品不合格品率的一个上界

我们知道,C_P 仅仅是一种理想的状况,即"潜在"的含义;实际的过程中心 μ 与规范中心 M 通常都是有偏离的. 一旦这种偏离被准确地测定出来,C_{PK} 就立即可以确定. 根据正态分布的性质,如果我们把介于 T_U 和 T_L 之间的分布函数增量(概率)当做产品的合格品率,那么就有(只推导 $\mu > M$ 情况):

$$P(T_L \leqslant X \leqslant T_U) = \int_{\frac{T_L-\mu}{\sigma}}^{\frac{T_U-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t =$$

$$\Phi\left(\frac{T_U-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{T_L-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{T_U-M}{\sigma} - \frac{\mu-M}{\sigma}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{T_L-M}{\sigma} - \frac{\mu-M}{\sigma}\right) =$$

$$\Phi\left(3C_P - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-3C_P - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) =$$

$$\Phi(3C_P - 3KC_P) - \Phi(-3C_P - 3KC_P) =$$

$$\Phi(3C_{PK}) - \Phi(-3C_P(1+K)) =$$

$$\Phi(3C_{PK}) - \Phi(-3C_{PK} - 6KC_P)$$

所以,

产品的不合格品率:

$$P = 1 - \Phi(3C_{PK}) + \Phi(-3C_{PK} - 6KC_P) \leqslant 1 - \Phi(3C_{PK}) + \Phi(-3C_{PK}) = 2\Phi(-3C_{PK})$$

比如

$C_{PK} = 1, P \leqslant 2\Phi(-3C_{PK}) = 2\Phi(-3) = 0.002\,7$

$C_{PK} = 1.33, P \leqslant 2\Phi(-3C_{PK}) = 2\Phi(-4) = 0.000\,063\,34$

由上看到,C_{PK} 能够单独地给出产品的不合格品率的上界. 为我们改进过程给出了一个数量上明确的标示,因此从这个角度说,C_{PK} 比 C_P 更具有实用价值.

4 C_{PK} 的一个区间估计

以下介绍一种估计 C_{PK} 的随机区间方法. 由于测算 C_{PK} 通常只能依赖样本数据估计,而样本的随机性导致我们寻找尽可能真实的过程能力指数最好应用区间估计方法. 设:

$$\hat{C}_{pu} = \frac{t_u - \bar{x}}{3s}, \qquad \hat{C}_{pl} = \frac{\bar{x} - t_l}{3s},$$

$$\hat{C}_{pk} = \min(\hat{C}_{pu}, \hat{C}_{pl})$$

利用概率论的方法我们给出 C_{PK} 的置信水平 $1-\alpha$ 的区间估计. 首先我们假定在大样本的正态分布数据中 S 的分布逼近于 $N(\sigma, \sigma^2/2n)$;其次假定在正态分布的随机抽样结果中得到的 s 和 $\bar{x}$ 相互独立;第三,假定 A、B 两个事件满足 Bonferroni 条件:

$$P(A) = 1-\alpha/2, P(B) = 1-\alpha/2$$

那么 $P(A \cap B) \geqslant 1-\alpha$

为简便记我们设:

$\rho_1 = C_{pl}, \rho_2 = C_{pu}, \omega = C_{pk}$

则由 $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n), \bar{x} - t_l \sim N(\mu - t_l, \sigma^2/n)$

进一步 $\bar{x} - t_l - 3s\rho_1 \sim N(0, (\sigma^2/n)(1+(9/2)\rho_1^2))$

在大样本情况下

$$\frac{(\bar{x} - t_l - 3s\rho_1)^2}{\frac{s^2}{n}\left(1+\frac{9}{2}\rho_1^2\right)} \sim F(1, n-1)$$

于是

$$P\left\{\frac{(\bar{x} - t_l - 3s\rho_1)^2}{\frac{s^2}{n}\left(1+\frac{9}{2}\rho_1^2\right)} \leqslant F_{1-\alpha/2}(1, n-1)\right\} = 1-\alpha/2$$

用 $\rho_{1\alpha}^{(l)}$、$\rho_{1\alpha}^{u}$ 表达方程的两个实根如果存在,从

$$(\bar{x} - t_l)^2 - 6s\rho_1(\bar{x} - t_l) + 9s^2\rho_1^2 = F_{1-\alpha/2}(1, n-1)\frac{s^2}{n}\left(1+\frac{9}{2}\rho_1^2\right)$$

将其改写为

$$9s^2\left(1 - \frac{F_{1-\alpha/2}(1, n-1)}{2n}\right)\rho_1^2 - 6s(\bar{x} - t_l)\rho_1 + \left[(\bar{x} - t_l)^2 - s^2\frac{F_{1-\alpha/2}(1, n-1)}{n}\right] = 0$$

在 $\bar{x} - t_l = 3s\hat{C}_{pl}$ 我们得到

$$\left\{1-\frac{F_{1-\alpha/2}(1,n-1)}{2n}\right\}\rho_1^2-2\hat{C}_{pl}\rho_1+\left(\hat{C}_{pl}{}^2-\frac{F_{1-\alpha/2}(1,n-1)}{9n}\right)=0$$

设 $n>[F_{1-\alpha}(1,n-1)/2]$

$$1-[F_{1-\alpha/2}(1,n-1)/2n]>0$$

可得以上方程两实根：

$$\rho_{1\alpha}^{(l,u)}=\frac{\hat{C}_{pl}\pm\sqrt{\frac{F_{1-\alpha/2}(1,n-1)}{n}}\left[\frac{\hat{C}_{pl}{}^2}{2}+\frac{1}{9}\left(1-\frac{F^2_{1-\alpha/2}(1,n-1)}{2n}\right)\right]^{1/2}}{1-\frac{F_{1-\alpha/2}(1,n-1)}{2n}}$$

由此得出的两个实根（$\rho_{1\alpha}^{(l)},\rho_{1\alpha}^{(u)}$）就是 $1-\alpha/2$ 的 ρ_1 的区间估计.

类似可以求出的$1-\alpha/2$的ρ_2的区间估计（$\rho_{2\alpha}^{(l)},\rho_{2\alpha}^{(u)}$）；在文献[4]中，给出了 C_{PK} 区间估计的选择方案. 见表2.

表2　置信区间界限表

Table 2　Confidence intorval limits

下限	上限	符合的条件
$\rho_{1\alpha}^{(l)}$	$\rho_{1\alpha}^{(u)}$	$(\rho_{1\alpha}^{(u)}<\rho_{2\alpha}^{(l)})$
$\rho_{1\alpha}^{(l)}$	$\rho_{1\alpha}^{(u)}$	$(\rho_{1\alpha}^{(l)}<\rho_{2\alpha}^{(l)}<\rho_{1\alpha}^{(u)}<\rho_{2\alpha}^{(u)})$
$\rho_{1\alpha}^{(l)}$	$\rho_{2\alpha}^{(u)}$	$(\rho_{1\alpha}^{(l)}<\rho_{2\alpha}^{(l)}<\rho_{2\alpha}^{(u)}<\rho_{1\alpha}^{(u)})$
$\rho_{2\alpha}^{(l)}$	$\rho_{1\alpha}^{(u)}$	$(\rho_{2\alpha}^{(l)}<\rho_{1\alpha}^{(l)}<\rho_{1\alpha}^{(u)}<\rho_{2\alpha}^{(u)})$
$\rho_{2\alpha}^{(l)}$	$\rho_{2\alpha}^{(u)}$	$(\rho_{2\alpha}^{(l)}<\rho_{1\alpha}^{(l)}<\rho_{2\alpha}^{(u)}<\rho_{1\alpha}^{(u)})$
$\rho_{2\alpha}^{(l)}$	$\rho_{2\alpha}^{(u)}$	$(\rho_{2\alpha}^{(u)}<\rho_{1\alpha}^{(l)})$

比如，$\rho_{1,0.05}^{(l)}=0.6845$　$\rho_{1,0.05}^{u}=1.5060$　$\rho_{2,0.05}^{l}=0.5859$　$\rho_{2,0.05}^{u}=1.4687$

判断属于第五种情况，C_{PK} 的 $1-0.05=0.95$ 置信度的区间估计应是：(0.585 9，1.468 7)

5　结　语

在实际的生产过程中，由于恰当地运用过程能力指数可以比较合理地全面反映系统因素、随机因素对过程能力的影响，从而帮助我们监控产品的生产过程，查找影响产品质量波动的因素，为推进持续的质量改进提供科学的量化指标；同时也方便操作员及时发现问题、解决问题，使过程处于较好的能力状态，减少损耗，节约开支[3]，所以人们已经深刻认识到应用和研究过程能力指数的重要性，尤其是 C_{PK} 指数使用最为普遍. 但我们必须注意在使用前的一些基本的要求，比如过程的输出变量是否可以检测，过程是否处于统计控制状态（统计稳态），目标值与规范中心是否重合，特性值是否服从正态分布等等. 最后，我们利用文献[3]的一句话："没有一个过程能力指数能够适用于所有过程，单个的过程能力指数很难揭示过程的全貌."所以实际应用中可以用多个过程能力指数综合考查过程的能力，这其中 C_{PK} 的重要应用是不可忽视的.

【参　考　文　献】

[1]　陶靖轩. 关于过程能力分析的若干思考[J]. 科技通报，2006(3)：34-37.

[2]　全国质量专业技术人员职业资格考试办公室. 质量专业理论与实务[M]. 北京：中国人事出版社，2009：116-169.

[3]　汤淑明，王飞跃. 过程能力指数综述[J]. 应用概率统计，2004(5)：207-216.

[4]　SON S KENETT，ZACKS S. 现代工业统计：质量与可靠性的设计及控制[M]. 北京：中国统计出版社，2002：378-380.