【文章编号】 1004-1540(2010)01-0075-03

导出匹配可扩二部图度和条件的改进

乔 诚，王 勤
（中国计量学院 理学院，浙江 杭州 310018）

【摘 要】 研究并改进了导出匹配可扩二部图的度和条件. 主要结论如下：若图 G 是一个有二部划分 (A,B) 的二部图，且 $|A|=|B|=n=3k+1(k\geqslant 2)$，如果对图 G 中任意不相邻的顶点 u 和 v，有 $\mathrm{d}(u)+\mathrm{d}(v)\geqslant 4k+1$，那么图 G 是导出匹配可扩的，并且该结果是最佳可能的.

【关键词】 完美匹配；导出匹配可扩的；二部图
【中图分类号】 O157.5 【文献标识码】 A

An improvement of the degree sum condition for induced matching extendable bipartite graphs

QIAO Cheng, WANG Qin
(College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: A simple graph G was induced matching extendable, if every induced matching of G was included in a perfect matching of G. The degree sum condition for induced matching extendable bipartite graphs was improved. The main results are as follows. Let G be a bipartite graph with bipartition (A,B), where $|A|=|B|=n=3k+1(k\geqslant 2)$. If $d(u)+d(v)\geqslant 4k+1$ for each pair of nonadjacent vertices u and v in G, then G is induced matching extendable, and the result is best possible.

Key words: perfect matching; induced matching extendable; bipartite graph

匹配理论是图论的一个基础分支，它在理论化学、组合优化等研究中有十分重要的应用[1,2]. 自 Cameron[3] 提出了导出匹配的概念以来，产生了许多关于导出匹配性质的结论[3-5]. 1998 年，原晋江[6] 提出了导出匹配可扩图的概念并研究了一些重要的性质. 关于导出匹配可扩图度和条件的研究结果可以在文献[6-9]中看到.

1 准备工作

本文所讨论的图 G 都是有限、无向的简单图. $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集. 图 G 中与 u 关联的边的数目称为 u 在 G 中的度，记为 $\mathrm{d}(u)$. $\delta(G)$ 表示 G 的顶点的最小度. 图 G 中奇分支的个数记作 $o(G)$. 对图 G 中的顶点集 $X\subseteq$

【收稿日期】 2009-12-09
【基金项目】 国家自然科学基金资助项目(No. 10601051)，浙江省自然科学基金资助项目(No. Y6090472)
【作者简介】 乔 诚(1986－)，男，山东青岛人，硕士研究生. 主要研究方向为图论与组合最优化.

$V(G)$，X 的邻集定义为 $V(G)\backslash X$ 中与 X 的顶点相邻的所有顶点的集合，记为 $N_G(X)$. 对图 G 的顶点集 $S\subseteq V(G)$，$E(S)$ 表示 S 所导出的边集，即 $E(S)=\{uv\in E(G): u,v\in S\}$. 对图 G 的边集 $M\subseteq E(G)$，$V(M)$ 表示 M 所关联的点的集合，即 $V(M)=\{v\in V(G)$：存在一点 $x\in V(G)$ 使 $vx\in M\}$. 对边集 $M\subseteq E(G)$，如果 G 的任意顶点至多与 M 中的一条边关联，则称 M 是 G 的匹配. 称覆盖所有顶点的匹配为完美匹配. 称图 G 的一个匹配 M 为 G 的导出匹配[3]，如果由 M 覆盖的顶点导出的子图以 M 为它的边集. 称图 G 是导出匹配可扩图[6]，如果图 G 的任一导出匹配都包含在一个完美匹配中.

引理 1.1[10]　设 G 是一个有二部划分 (A,B) 的二部图，则 G 有完美匹配当且仅当 $|A|=|B|$ 且 $|N_G(X)|\geqslant|X|$ 对所有 $X\subseteq A$ 成立.

引理 1.2　设 G 是一个有二部划分 (A,B) 的二部图，这里 $|A|=|B|=2k-1(k\geqslant 2)$，$B=B_1\cup B_2$，$B_1\cap B_2=\varnothing$，$|B_1|=k-2$，如果对任意顶点 $x\in A$，$y\in B_1$，$z\in B_2$，有 $d(x)\geqslant k-1$，$d(y)\geqslant k-1$，$d(z)\geqslant k$，那么 G 有完美匹配.

证明　对任意 $X\subseteq A$，当 $|X|\leqslant k-1$ 时，由 $d(x)\geqslant k-1$ 知 $|N_G(X)|\geqslant k-1\geqslant|X|$. 当 $|X|\geqslant k$ 时，设 $|X|=k+m(0\leqslant m\leqslant k-1)$，若 $|N_G(X)|<|X|$，则在 B 中至少有 $2k-1-(k+m-1)=k-m$ 个顶点，其度小于等于 $2k-1-(k+m)=k-m-1$，即当 $m=0$ 时，B 中存在 k 个顶点，其度小于等于 $k-1$；当 $m\geqslant 1$ 时，B 中存在 $k-m$ 个顶点其度小于等于 $k-m-1$，从而小于等于 $k-2$，均与假设矛盾. 因此对任意 $X\subseteq A$ 都有 $|N_G(X)|\geqslant|X|$. 由引理1.1可知 G 有完美匹配.

引理 1.3[7]　设 G 是一个有二部划分 (A,B) 的二部图，且 $|A|=|B|=n$. 如果 $\delta(G)\geqslant\dfrac{n}{2}$，那么 G 有完美匹配.

引理 1.4[7]　设 G 是一个有二部划分 (A,B) 的二部图，且 $|A|=|B|=n$. 如果 $\delta(G)\geqslant\left\lceil\dfrac{2n+1}{3}\right\rceil$，那么 G 为导出匹配可扩的.

引理 1.5[9]　设 G 是一个有二部划分 (A,B) 的二部图，且 $|A|=|B|=n$. 如果对 G 中任意不相邻的顶点 u 和 v，有 $d(u)+d(v)\geqslant\left\lceil\dfrac{4n+1}{3}\right\rceil$，那么 G 是导出匹配可扩的.

文献[9]证明了引理1.5中当 $n\not\equiv 1(\mathrm{mod}3)$ 和 $n=4$ 时度和条件为最佳可能的，但 $n\equiv 1(\mathrm{mod}3)$，$n\geqslant 7$ 时度和条件的最优性没有给出. 在进一步的研究中我们发现，当 $n=3k+1(k\geqslant 2)$ 时度和条件可以改进为 $d(u)+d(v)\geqslant\left\lceil\dfrac{4n+1}{3}\right\rceil-1=4k+1$，且此度和条件为最佳可能的. 下面给出本文的主要结果及证明.

2　主要结果及其证明

定理 2.1　设 G 是一个有二部划分 (A,B) 的二部图，且 $|A|=|B|=n=3k+1(k\geqslant 2)$，如果对 G 中任意不相邻的顶点 u 和 v，有 $d(u)+d(v)\geqslant 4k+1$，那么 G 是导出匹配可扩的.

证明　欲证 G 是导出匹配可扩的只需证明 G 的任意导出匹配 M 都包含于 G 的一个完美匹配中. 若 $|M|\geqslant k+2$，易知存在不相邻的顶点 $x,y\in V(M)$ 满足 $d(x),d(y)\leqslant 2k$. 从而 $d(x)+d(y)\leqslant 4k$，与已知度和条件矛盾，因此 $|M|\leqslant k+1$. 由 $|A|=|B|=3k+1$ 知，对任意顶点 $x\in V(G)$，有 $d(x)\leqslant 3k+1$，又由度和条件可得 $k\leqslant d(x)\leqslant 3k+1$. 下面记 $G'=G-V(M)$.

由引理1.4可知，若对任意顶点 $u\in V(G)$ 有 $d(u)\geqslant 2k+1$，则 G 为导出匹配可扩的. 所以下面假定存在一点 $u\in V(G)$，$d(u)\leqslant 2k$. 此时，由度和条件可知对所有不与 u 相邻的顶点，其度均大于等于 $2k+1$. 另外，至多有一点与 u 相邻且度小于等于 $2k$，如果这样的顶点存在我们记它为 v，否则记 v 为任一与 u 相邻的顶点. 假设 $u\in A$，$v\in B$.

情形 1　M 饱和顶点 u 和 v

此时 $\delta(G')-\dfrac{n-|M|}{2}\geqslant 2k+1-|M|-\dfrac{3k+1-|M|}{2}=\dfrac{k+1}{2}-\dfrac{|M|}{2}\geqslant 0$，由引理1.3知 G' 有完美匹配 M'，从而 M 包含于 G 的完美匹配 $M\cup M'$ 中.

情形 2　M 不饱和顶点 u 和 v

记 $H=G-V(M)-\{u,v\}$.

情形 2.1　$|M|\leqslant k$

此时 $\delta(H)-\dfrac{n-|M|-1}{2}\geqslant 2k+1-|M|-$

$1-\frac{3k-|M|}{2}=\frac{k-|M|}{2}\geqslant 0$,由引理 1.3 知 H 有完美匹配 M',从而 M 包含于 G 的完美匹配 $M\cup M'\cup\{uv\}$ 中.

情形 2.2　$|M|=k+1$

记 $H_1=V(H)\cap A$,$H_2=V(H)\cap B$.易知对任意顶点 $p\in V(M)$ 有 $d(p)=2k+1$,则 $V(M)\cap B$ 中的 $k+1$ 个顶点均与 u 相邻.由度和条件知 $d(u)\geqslant 2k$,又因为 $d(u)\leqslant 2k$,故 $d(u)=2k$,因此 u 还与 H_2 中的 $k-2$ 个顶点相邻.这样,H_2 中有 $k-2$ 个顶点在 H 中的度大于等于 $2k+1-(k+1+1)=k-1$,有 $k+1$ 个顶点在 H 中的度大于等于 $2k+1-(k+1)=k$,而 H_1 中的顶点在 H 中的度均大于等于 $2k+1-(k+1+1)=k-1$.进而 H 满足引理 1.2 中的假设,所以 H 有完美匹配 M'',从而 M 包含于 G 的完美匹配 $M\cup M''\cup\{uv\}$ 中.

情形 3　M 饱和 u 不饱和 v

设 $ux\in M$,则 $d_{G'}(v)>0$,因为若 $d_{G'}(v)=0$,则 $d(v)\leqslant|M|$,又因为 $d(x)\leqslant 3k+1-(|M|-1)=3k+2-|M|$,所以 $d(x)+d(v)\leqslant 3k+2<4k+1(k\geqslant 2)$.与度和条件矛盾.设 $vy\in E(G')$,记 $H=G-V(M)-\{v,y\}$.

情形 3.1　$|M|\leqslant k$

此时 $\delta(H)-\frac{n-|M|-1}{2}\geqslant 2k+1-|M|-1-\frac{3k-|M|}{2}=\frac{k-|M|}{2}\geqslant 0$,由引理 1.3 知 H 有完美匹配 M',从而 M 包含于 G 的完美匹配 $M\cup M'\cup\{vy\}$ 中.

情形 3.2　$|M|=k+1$

记 $H_1=V(H)\cap A$,$H_2=V(H)\cap B$.此时,对任意 $p\in V(M)\backslash\{u\}$ 有 $d(p)=2k+1$,则 $V(M)\cap A$ 中的 $k+1$ 个顶点均与 v 相邻.由度和条件知 $d(v)\geqslant 2k$.

情形 3.2.1　$d(v)=2k$

此时 v 还与 H_1 中的 $k-2$ 个顶点相邻,与情形 2.2 类似可知 H 满足引理 1.2 中的假设,所以 H 有完美匹配 M'',从而 M 包含于 G 的完美匹配 $M\cup M''\cup\{vy\}$ 中.

情形 3.2.2　$d(v)\geqslant 2k+1$

此时对任意 $w\in V(G')$,有 $d_{G'}(w)\geqslant 2k+1-(k+1)=k$.由引理 1.3 知 G' 有完美匹配 M''',从而 M 包含于 G 的完美匹配 $M\cup M'''$ 中.

情形 4　M 饱和 v 不饱和 u

设 $vy\in M$,由情形 3 同理可知存在顶点 $x\in V(G')$ 使 $ux\in E(G')$.记 $H=G-V(M)-\{u,x\}$.

情形 4.1　$|M|\leqslant k$

此时 $\delta(H)-\frac{n-|M|-1}{2}\geqslant 2k+1-|M|-1-\frac{3k-|M|}{2}=\frac{k-|M|}{2}\geqslant 0$,由引理 1.3 知 H 有完美匹配 M',从而 M 包含于 G 的完美匹配 $M\cup M'\cup\{ux\}$ 中.

情形 4.2　$|M|=k+1$

记 $H_1=V(H)\cap A$,$H_2=V(H)\cap B$.对任意 $p\in V(M)\backslash\{v\}$ 有 $d(p)=2k+1$,从而 $V(M)\cap B$ 中的 $k+1$ 个顶点均与 u 相邻.由度和条件知 $d(u)\geqslant 2k$.又因为 $d(u)\leqslant 2k$,所以 $d(u)=2k$.因此 u 还与 H_2 中的 $k-2$ 个顶点相邻.与情形 2.2 类似可知 H 满足引理 1.2 中的假设,所以 H 有完美匹配 M'',从而 M 包含于 G 的完美匹配 $M\cup M''\cup\{ux\}$ 中.

综上,定理 2.1 得证.

下面我们构造一个度和为 $\left\lceil\frac{4n+1}{3}\right\rceil-2=4k$ 的非导出匹配可扩二部图来说明定

理 2.1 中的度和条件为最佳可能的.令 G 是一个有二部划分 (A,B) 的二部图,且 $|A|=|B|=3k+1(k\geqslant 2)$.其中 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,$B=B_1\cup B_2\cup B_3$,$|A_1|=|B_1|=|A_3|=|B_3|=k+1$,$|A_2|=|B_2|=k-1$.令 $E(A_1,B_1)$,$E(A_2,B_2)$ 分别为具有 $k+1$ 和 $k-1$ 条边的导出匹配,$E(A_3,B_3)=\phi$,$E(A_i,B_j)=\{xy\mid x\in A_i,y\in B_j\}$,$1\leqslant i,j\leqslant 3$,$i\neq j$.定义 $E(G)=\bigcup_{1\leqslant i,j\leqslant 3}E(A_i,B_j)$.

易见,图 G 的最小度和为 $4k$,且 $M=E(A_1,B_1)$ 为 G 的一个导出匹配.令 $G'=G-V(M)$,则 $|N_{G'}(B_3)|=|A_2|=k-1<|B_3|=k+1$.由引理 1.1 知 G' 没有完美匹配,所以 G 不是导出匹配可扩的.

【参　考　文　献】

[1] BONDY J R, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan Press Ltd,1976:70-90.

[2] 王航平.图的 Hamilton 问题的着色否定方法[J].中国计量学院学报,2005,16(3):218-221.

[3] CAMERON K. Induced matchings[J]. Discrete Applied Mathematics,1989,24:97-102.

(下转第 86 页)