第 21 卷第 2 期
2010 年 6 月

中国计量学院学报
Journal of China University of Metrology

Vol. 21 No. 2
Jun. 2010

【文章编号】 1004-1540(2010)02-0167-04

带弧费用约束的最短路径问题

吴龙树
(中国计量学院 理学院,浙江 杭州 310018)

【摘 要】 对一类带弧费用约束的最短路径问题进行了研究,即对于网络中两个给定的顶点 s,t,找出 s 和 t 之间的一条路,使得在满足总费用不超过一个给定正整数的 s 和 t 之间所有的路中,该条路的长度最短.通过将背包问题多项式时间变换为该问题的判定问题,证明了该问题是 NP-完全的.并给出了求解此问题的一个动态规划算法.最后,我们得到了最优值的一个下界估计.

【关键词】 最短路;判定问题;多项式时间变换;NP-完全;动态规划
【中图分类号】 TP301.6　　【文献标识码】 A

The shortest path problem with cost restriction on edges

WU Long-shu
(College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: A kind of the shortest path problem with cost restriction on edges was studied to find a path between two given vertices s and t in a network, such that the length of this path was the shortest among all the paths between s and t with total cost not exceeding a given positive integer. It was shown that this problem was NP-complete by a polynomial-time reduction from the knapsack problem. A dynamic programming method was presented to solve this problem. And finally an estimation of the lower bound for the optimal value is obtained.

Key words: shortest path; decision problem; polynomial-time reduction; NP-complete; dynamic programming

最短路径问题在最优化领域中占据着重要的地位,因为任何离散状态的多阶段决策过程都可归结为最短路径问题.最短路径问题在交通运输、通信、工程规划等方面有着十分广泛的应用[1-3],是解决许多网络问题的工具和桥梁.随着科技的发展,最短路问题也逐渐推广到一些更为复杂的问题[4-6].我们在本文中主要考虑带弧费用约束的最短路径问题,该问题有着很广泛的应用意义.比如,在一个生产控制系统中,求从一个状态 s 到另一个状态 t 的作业路线,使其在满足消耗费用不超过一个给定的界的情况下,总的作业时间最短.我们通过将背包问题多项式时间变换为该问题的判定问题,证明了该问题是 NP-完全的.并给出了求解此问题的一个拟多项式时间的动

【收稿日期】 2010-04-14
【基金项目】 国家自然科学基金资助项目(No. 10601051),浙江省自然科学基金资助项目(No. Y6090472)
【作者简介】 吴龙树(1975－),男,河南信阳人,讲师.主要研究方向为算法复杂性分析.

态规划算法.最后,我们得到了最优值的一个下界估计.

1 问题描述

给定一个无向网络 $G=(V,E,l,c)$,其中顶点集 $V=\{s,v_1,v_2,\cdots,v_n,t\}$,边集 $E=\{e_1,e_2,\cdots e_m\}$,$l(e_i)(i=1,\cdots,m)$ 表示边 e_i 的长度,$c(e_i)$ 表示边 e_i 相对应的费用;C 是一个给定的正整数.带弧费用约束的最短路问题就是找到网络中一条 s 到 t 的路,使得这条路的总费用不超过 C,且在满足 s 到 t 总费用不超过 C 的所有路中这条路的长度最短.

带弧费用约束的最短路问题的判定问题可以描述如下:给定一个无向网络 $G=(V,E,l,c)$,给定两个正整数 C 和 L.能否找到网络中一条从 s 到 t 的路,使得路的长度不超过 L 而其总费用不超过 C?即若 P 为满足此问题的一条 s 到 t 的路,那么它同时满足 $\sum_{e\in P}l(e)\leqslant L$ 和 $\sum_{e\in P}c(e)\leqslant C$.

现在我们对 0-1 背包问题进行描述.0-1 背包问题的判定问题是给定一个具有固定载重量的背包,能否将 n 个不可分割的物体装入这个背包,使得装入背包的物体价值总和不小于一个给定的价值.即假定 n 个物体 v_i,其重量为 b_i,价值为 p_i,$1\leqslant i\leqslant n$,背包的载重量为 B,给定的价值约束为 K.令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为满足此问题的一个解向量,其中 $x_i=0,1(1\leqslant i\leqslant n)$ 表示物体 v_i 被装入背包的情况.当 $x_i=0$ 时,表示物体没被装入背包;当 $x_i=1$ 时,表示物体被装入背包.则 x 满足 $\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\geqslant K$ 和 $\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\leqslant B$.

在下一节中,我们将 0-1 背包问题多项式时间变换为带弧费用约束的最短路问题的判定问题.已知 0-1 背包问题是 NP-完全的,所以可得带弧费用约束的最短路问题也是 NP-完全的,从而除非 P=NP,该问题不可能有多项式时间算法.

2 NP-完全性证明

定理 1 带弧费用约束的最短路问题的判定问题是 NP-完全的.

证明 对于网络中一条从 s 到 t 的路,我们可以在多项式时间内验证是否该路的总长度不超过 L 且总费用不超过 C.因此带弧费用约束的最短路问题的判定问题是属于 NP 的.

下面我们通过构造一个从 0-1 背包问题到带弧费用约束的最短路问题的判定问题的一个多项式时间变换来证明该问题是 NP-完全的.

给定背包问题的任意一个实例,考虑任意一个背包,其载重量为 B,和任意 n 个物体 v_i,其重量为 b_i,价值为 p_i,$1\leqslant i\leqslant n$,价值约束为 K.我们来构造带弧费用约束的最短路问题的判定问题的一个实例.无向网络 $G=(V,E)$ 如下:

$V=\{v_0\}\cup\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$E=\{\overline{e_1},e_1,\cdots,\overline{e_n},e_n\}$,其中 $e_i=(v_{i-1},v_i)$,$i=1,2,\cdots n$,且 $\overline{e_i}=(v_{i-1},v_i)$,$i=1,2,\cdots n$,即 (v_{i-1},v_i) 为双重边.令 e_i 的长度为 0,费用为 $M=\max\{p_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$;$\overline{e_i}$ 的长度为 b_i,费用为 $M-p_i$.$L=B$,$C=nM-K$.令 $s=v_0$,$t=v_n$.

下面我们证明 0-1 背包问题有解当且仅当上述网络 G 中存在从 v_0 到 v_n 的总长度不超过 L 且总费用不超过 C 的路.

若 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为满足 0-1 背包问题的解向量,我们可以得到一条从 v_0 到 v_n 的总长度不超过 L 且总费用不超过 C 的路 P.当 $x_i=0$ 时,表示物体 v_i 没被装入背包,对应于网络 G 中的边 $e_i\in P$;当 $x_i=1$ 时,表示物体 v_i 被装入背包,对应于网络 G 中的边 $\overline{e_i}\in P$.因为 e_i 的长度为 0,此时路 P 的总长度为 $\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\leqslant B=L$.因为 $\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\geqslant K$,而路 P 中包含的边为 $\overline{e_i}$ 的总费用为 $\sum_{i=1}^{n}(M-p_i)x_i$;路 P 中包含的边为 e_i 的总费用为 $nM-\sum_{i=1}^{n}Mx_i$,所以路 P 的总费用为:

$$\sum_{i=1}^{n}(M-p_i)x_i+nM-\sum_{i=1}^{n}Mx_i=$$
$$nM-\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\leqslant nM-K=C,$$

从而证明了路 P 即为一条从 v_0 到 v_n 的总长度不超过 L 且总费用不超过 C 的路.

反之,若 P 为一条从 v_0 到 v_n 的总长度不超过 L 且总费用不超过 C 的路,我们可以得到满足 0-1 背包问题的解向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 如下.$x_i=1$ 当且仅当 $\overline{e_i}\in P$,$x_i=0$ 当且仅当 $e_i\in P$,即

路 P 中包含的边$\overline{e_i}$ 对应的物体 v_i 装入背包. 因为此时路 P 的总长度等于 $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \leqslant L = B$；路

P 的总费用为：

$$\sum_{i=1}^{n}(M - p_i)x_i + nM - \sum_{i=1}^{n} Mx_i =$$
$$nM - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant C,$$

可得 $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geqslant nM - C = K$，因此我们证明了 x 为满足 0-1 背包问题的解向量.

综上所述，我们得到带弧费用约束的最短路问题的判定问题是 NP-完全的，定理得证.

3　动态规划算法求解

在这一节中，我们给出一种基于动态规划的拟多项式时间算法. 该算法可以得到带弧费用约束的最短路问题的最优解. 由于无向网络可以看作是将每一条边换成两条方向相反的弧的有向网络，下面我们假定所研究的网络为有向网络. 于是我们可以在 $O(|E|)$ 时间内对顶点进行标号 $1,\cdots,n+2$，使其满足：$(i,j) \in E$ 意味着 $i < j$，$s = 1$，$t = n+2$. 带弧费用约束的最短路问题即是求一条在总费用约束 C 下的从 1 到 $n+2$ 的最短 C-限制路. 用 $h_j(c)$ 表示从 1 到 j 的最短 c-限制路的长度. 我们有如下算法：

算法 1

$$h_1(c) = 0, c = 0,\cdots,C,$$
$$h_j(0) = \infty, j = 2,\cdots,n+2,$$
$$h_j(c) = \min\{h_j(c-1),$$
$$\min_{k \mid c(k,j) \leqslant c}\{h_k(c - c(k,j)) + l(k,j)\}\},$$
$$j = 2,\cdots,n+2, c = 1,\cdots,C.$$

注意到 $h_{n+2}(C)$ 即为我们要求的从 1 到 $n+2$ 的最短 C-限制路的长度. 算法 1 动态规划求解过程的时间界为 $O(mC)$，其中 $m = |E|$. 因为此时间界中含有费用值 C，这是一个拟多项式时间算法.

4　计算实例

下面我们通过一个计算实例求图 1 中从顶点 1 到顶点 4 的最优路，其中圈中数字为边的长度，方框中数字为费用，总费用 $C = 4$. 易见，路 $1 \to 3 \to 4$ 为最优路，现在我们按照算法 1 的步骤来详细地求解.

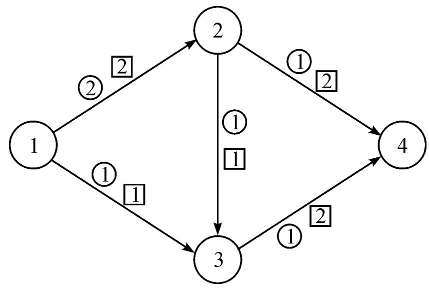

图 1　网络实例

Figure 1　A network example

首先，可知

$$h_1(c) = 0, c = 0,1,2,3,4;$$
$$h_j(0) = \infty, j = 2,3,4.$$

$h_4(4)$ 即为我们要求的从 1 到 4 的最短 4-限制路的长度. 根据算法 1 可得：

$$h_2(1) = \infty, h_2(2) = h_2(3) = h_2(4) = 2;$$
$$h_3(1) = h_3(2) = h_3(3) = h_3(4) = 1;$$
$$h_4(1) = h_4(2) = \infty, h_4(3) = h_4(4) = 2.$$

通过计算过程可得路径为 $1 \to 3 \to 4$，最短路的长度为 $h_4(4) = 2$，与该问题的最优解一致. 至此我们通过本实例验证了算法 1 的可行性.

5　最优值的估计

我们考虑如下的比值型最短路问题(BSP)：在给定网络中找一条路 P，使得 $\sum_{e_i \in P} c(e_i)$ 与 $\sum_{e_i \in P} l(e_i)$ 的比值最小.

定理 2[7]　用二分法可在多项式时间内解(BSP)问题.

我们假设带弧费用约束的最短路问题的最优值为 L_{opt}，其所对应的路的总费用为 $C_{\text{opt}} \leqslant B$. 并假定在没有弧费用约束的条件下的最短费用路为 P_{copt}；最短长度路为 P_{lopt}. 令 $L_A = \sum_{e_i \in P_{\text{copt}}} l(e_i)$，$C_A = \sum_{e_i \in P_{\text{copt}}} c(e_i)$，$L_S = \sum_{e_i \in P_{\text{lopt}}} l(e_i)$. 下面我们比较 L_A 与 L_{opt} 的关系. 令 $F = \{P \mid P$ 是从 s 到 t 的有向路$\}$，由定理 2，我们可以在多项式时间内求得

$$w = \min_{P \in F}\left(\sum_{e_i \in P} c(e_i) \Big/ \sum_{e_i \in P} l(e_i)\right),$$

$$u=\min_{P\in F}\left(\sum_{e_i\in P}l(e_i)/\sum_{e_i\in P}c(e_i)\right).$$

因为$\frac{C_A}{L_A}\geqslant w$,可得$\frac{L_A}{C_A}\leqslant\frac{1}{w}$,即 $L_A\leqslant\frac{C_A}{w}$.又因为$\frac{L_{\rm opt}}{C_{\rm opt}}\geqslant\frac{L_S}{B}$,可得 $L_{\rm opt}\geqslant\frac{L_S}{B}C_{\rm opt}\geqslant\frac{L_S C_A}{B}$.因此得到$\frac{L_A}{L_{\rm opt}}\leqslant\frac{B}{wL_s}$,其中 B 为已知的值,w 和 L_S 均可在多项式时间内求出.当$\frac{B}{wL_s}$接近于1或满足我们所需要的精度时,L_A 即为带弧费用约束的最短路问题的一个较好的近似解.同时我们也得到了最优值的一个下界估计 $L_{\rm opt}\geqslant\frac{wL_S L_A}{B}$.

6　结　语

在本文中,我们证明了带弧费用约束的最短路问题是 NP-完全的,从而除非 P = NP,该问题不可能有多项式时间算法.我们给出了一个解该问题的拟多项式时间的动态规划算法,同时还对问题最优值的下界进行了估计.接下来还可以对以下几方面的相关问题进行研究:首先可以研究其它的精确算法,如分支定界法等求解该问题的效率;还可以对解该问题的近似算法或启发式算法进行研究[8,9],设计出相应的算法并分析算法的性能比.其次,可以对网络中顶点和弧均有费用约束的最短路径问题进行研究[10].

【参　考　文　献】

[1] BONDY J R, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan Press Ltd, 1976:70-90.

[2] CORMEN T H, LEISERSON C E, RIVEST R L. Introduction to Algorithms[M]. London: The MIT Press, 2001:165-189.

[3] 谢　政,李建平.网络算法与复杂性理论[M],长沙:国防科技大学出版社,1995:121-150.

[4] 闫灿伟,曹飞龙. m 依赖过程经验风险最小化算法的泛化性能[J].中国计量学院学报,2009,20(4):357-361.

[5] 王航平.图的 Hamilton 问题的着色否定方法[J].中国计量学院学报,2005,16(3):218-221.

[6] 李帮义,姚恩瑜.关于最短路问题的一个双目标优化问题[J].运筹学学报,2001,5(4):67-71.

[7] 王　勤,杨爱峰,林　浩.双目标最优路问题[J].河南科学,2000,18(1):28-31.

[8] 林　浩,皮军德.有向网络上单源多汇的最优连接问题[J].系统工程学报,2008,23(1):16-21.

[9] 赵　敏.图的2-距离控制数为$\left\lfloor\frac{p}{3}\right\rfloor$的必要条件[J].中国计量学院学报,2008,19(3):265-268.

[10] 杨　会,刘振宇.含结点等待费用的离散时变最短路径[J].系统工程理论与实践,2007,27(1):113-117.