第 21 卷第 2 期
2010 年 6 月

中 国 计 量 学 院 学 报
Journal of China University of Metrology

Vol. 21 No. 2
Jun. 2010

【文章编号】 1004-1540(2010)02-0171-03

R_0 代数的可证等价类

张花荣
（中国计量学院 理学院，浙江 杭州 310018）

【摘　要】 讨论了 R_0 代数的滤子以及相应的可证等价类. 在 R_0 代数里给出了一些滤子的具体例子，得到：F 是 R_0 代数 M 的超滤当且仅当 F 是 M 的固执滤子；当 F 是 R_0 代数的蕴涵滤子时，$M/\square_F$ 是布尔代数；当 F 是 R_0 代数的极大布尔滤子时，$M/\square_F$ 是只有两个元的布尔代数.

【关键词】 R_0 代数；滤子；可证等价类
【中图分类号】 O159；O153　　【文献标识码】 A

Provable equivalence classes of R_0 algebras

ZHANG Hua-rong
(College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Filters and provable equivalence classes were discussed in R_0 algebras M. With some special examples of filters, it proves that F is an ultra-filter of R_0 algebras M if and only if F is an obstinate filter; if F is an implicative filter of M, then $M/\square_F$ is a Boolean algebra; if F is a maximal Boolean filter of M, then $M/\square_F$ is a Boolean algebra with two elements.

Key words: R_0 algebras; filters; provable equivalence classes

自模糊集的概念提出以来，关于模糊系统的研究得到了迅猛的发展，模糊控制技术[1-3]被广泛应用于工业控制和家电产品的制造中，并取得了巨大的成功. 但是，模糊逻辑缺乏深入的理论研究，特别是模糊推理这一模糊控制原理的核心部分，缺乏严格的逻辑基础，这引发了实质在于质疑模糊推理方法的理论基础的一场论战. 在完全解决模糊推理的逻辑基础问题中，形式演绎系统的完备性是非经典逻辑的主要研究方向之一. 对于一个形式系统而言，完备性是至关重要的逻辑性质，它反映了该系统语法与语义的和谐性，而证明完备性依赖于该系统的重要性质——可嵌入性，在引入滤子这个工具以后，我们可以证明很多代数系统具有可嵌入性，从而为这些形式演绎系统具有完备性作了准备. 鉴于滤子的重要作用，很多学者在许多代数系统中都引入了各种滤子的概念，像滤子、蕴涵滤子、布尔滤子、素滤子、极大滤子、MV 滤子，等等，同时对它们的性质也做了深刻的研究. 在与 R_0 代数的滤子有关的文章里，有些滤子并没有给出具体的例子，所以本文要讨论

【收稿日期】 2010-03-22
【作者简介】 张花荣(1976－)，女，山西临汾人，硕士. 主要研究方向为格上拓扑学与非经典逻辑.

的一个方面就是，给出 R_0 代数的一些滤子的具体例子，肯定这些滤子的存在. 另一方面，我们知道滤子对应着可证等价类，可证等价类在许多方面与原来的代数有相似的性质. 同时，可证等价类的结构又比原来的代数结构要简单，讨论可证等价类的性质相对来说要比讨论原来的代数的性质容易. 从而，借助于可证等价类，我们就可以部分地了解原来代数的性质. 而且，不同的可证等价类对应着不同的分类，这就为我们从多方面了解代数的结构提供了条件. 本文以 R_0 代数为研究对象，来研究 R_0 代数的可证等价类，使这些结果对研究 R_0 代数的结构具有一定的意义.

1 R_0 代数的概念与基本性质

定义 1.1[4] 设 M 是$(', \vee, \to)$ 型代数，如果在 M 上有偏序 $\leqslant$ 使$(M, \leqslant)$ 成为有界分配格，且 $\vee$ 是关于序 $\leqslant$ 的上确界运算，$'$ 是关于序 $\leqslant$ 的逆序对合对应，且

1) $x' \to y' = y \to x$

2) $1 \to x = x, x \to x = 1$

3) $y \to z \leqslant (x \to y) \to (x \to z)$

4) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$

5) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$

6) $(x \to y) \vee ((x \to y) \to x' \vee y) = 1$

其中 1 是$(M, \leqslant)$ 中的最大元，则称 M 为 R_0 代数.

注 1.1[5] 在 R_0 代数 M 上定义：

$$x \otimes y = (x \to y')'$$

易证$(M, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是剩余格.

性质 1.1[6] 设 M 是 R_0 代数，则

$\forall x, y, z \in M$，以下各式成立：

1) $x \leqslant y$ 当且仅当 $x \to y = 1$

2) $x \to y \leqslant (y \to z) \to (x \to z)$

3) $x \otimes y \leqslant x \wedge y$

4) $x \wedge y \to z \geqslant (x \to z) \vee (y \to z)$

2 关于滤子的各种定义

定义 2.1[6] 设 M 为 R_0 代数，$F \subseteq M$，称 F 为 M 的滤子. 若

1) $1 \in F$；

2) 当 $x \in F, x \to y \in F$ 时，有 $y \in F$，

$\forall x, y \in M$. 若 $F \neq M$，则称 F 为 M 的真滤子.

注 2.1 在文献[6]中称这样定义的滤子为 MP 滤子.

定义 2.2[6] M 的真滤子 F 为素滤子，如果 $\forall x, y \in M$，有 $x \to y \in F$ 或 $y \to x \in F$.

定义 2.3[6] M 的真滤子 F 为极大滤子，如对于 M 的滤子 G，当 $F \subseteq G$ 时，有 $F = G$ 或 $G = M$.

定义 2.4[7] 设 M 是 R_0 代数，F 是 M 的滤子，称 F 为 M 的布尔滤子，若 $\forall x \in M, x \vee x' \in F$.

定理 2.1[8] 设 M 是 R_0 代数，则下列条件等价：

1) F 是 M 的蕴涵滤子；

2) F 是 M 的布尔滤子；

3) F 是 M 的正蕴涵滤子.

注 2.2 蕴涵滤子、正蕴涵滤子定义见文献[8].

定义 2.5[8] 设 M 是 R_0 代数，F 是 M 的滤子，若 $\forall x, y \in M$，当 $x \to y \in F$ 时，有 $((y \to x) \to x) \to y) \in F$，则称 F 为 M 的 MV 滤子.

定理 2.2[8] 设 M 是 R_0 代数，F 是 M 的 MV 滤子当且仅当 F 是 M 的奇异滤子.

注 2.3 奇异滤子的定义见文献[8].

定义 2.6[6] M 的真滤子 F 为超滤，如果 $\forall x \in M, x \in F$ 当且仅当 $x' \notin F$.

定理 2.3[9] 设 M 是 R_0 代数，F 是 M 的极大布尔滤子当且仅当 F 是 M 的超滤.

定义 2.7[9] M 的真滤子 F 为固执滤子，如果 $\forall x, y \in M$，有 $x \to y \in F, y \to x \in F$.

定理 2.4[9] 设 M 是 R_0 代数，F 是 M 的极大正蕴涵滤子当且仅当 F 是 M 的固执滤子.

推论 2.1 设 M 是 R_0 代数，F 是 M 的超滤当且仅当 F 是 M 的固执滤子.

3 各种滤子的例子

例 3.1 定义：

$$x \to y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ x' \vee y, & x > y \end{cases}, x' = 1 - x$$

那么 $M = ([0,1], ', \vee, \to, 0, 1)$ 是 R_0 代数.

$\{1\}$ 是 R_0 代数的滤子. $\{1\}$ 是 M 的素滤子. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 是 M 的极大滤子. 说明：容易验证 $\{1\}$ 是

R_0 代数的滤子. 又 $\forall x,y\in M$,或者 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$,从而有 $x\to y=1$ 或者 $y\to x=1$,这说明 $x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$. 从而$\{1\}$ 是 M 的素滤子. 容易验证 $F=\left(\frac{1}{2},1\right]$是 M 的滤子. 设 G 是包含 F 的滤子,则 $\exists a\in G$ 但 $a\notin F$,从而有 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$. 而 $a\to 0=a'\vee 0=a'\in F\subseteq G$,由 G 是滤子可知 $0\in G$. 从而就有 $G=M$. 这表明 F 是 M 的极大滤子.

例 3.2　设 $M=\{0,a,b,c,1\}$ 是链,其 Cayley 表如下:

x	x'	$\to$	0	a	b	c	1
0	1	0	1	1	1	1	1
a	c	a	c	1	1	1	1
b	b	b	b	b	1	1	1
c	a	c	a	a	b	1	1
1	0	1	0	a	b	c	1

定义:

$$x\vee y=\max\{x,y\},x\wedge y=\min\{x,y\}$$

$\forall x,y\in M$. 通过计算我们可以得到 M 是 R_0 代数,并且 $F=\{c,1\}$ 是 MV 滤子. 但是 $b\vee b'=b\notin\{c,1\}$,所以 F 不是布尔滤子.

注 3.1　在文献[9]中谈到 R_0 代数的 MV 滤子不一定是布尔滤子,并没有明确给出反例,在这里我们给出如上反例.

例 3.3　设 $M=\{0,a,b,1\}$ 为四元格,其 Cayley 表如下:

x	x'	$\to$	0	a	b	1
0	1	0	1	1	1	1
a	b	a	b	1	b	1
b	a	b	a	a	1	1
1	0	1	0	a	b	1

定义:

$$x\vee y=\max\{x,y\},x\wedge y=\min\{x,y\}$$

$\forall x,y\in M$,且 $a\vee b=1$. 则容易验证 M 是 R_0 代数,且 $F=\{1,b\}$ 是 M 的极大布尔滤子. 说明:容易验证$\{1,b\}$是M的滤子. 又 $\forall x\in M$,$x\vee x'=1\in F$,这说明 F 是M 的布尔滤子. 设 G 是包含 F 的滤子,则 $\exists x\in G$ 但 $x\notin F$,从而有 $a\in G$ 或者 $0\in G$. 若 $a\in G$,$a\to 0=b\in F\subseteq G$,由 G 是滤子知,$0\in G$. 从而 $G=M$,这表明 F 是 M 的极大布尔滤子.

4　R_0 代数的可证等价类

定理 4.1[6]　F 是 M 的滤子,M 上的二元关系 $\square_F$ 定义为 $x\square_F y$ 当且仅当 $x\to y\in F$ 且 $y\to x\in F$. 记$[x]_F=\{y\in M\mid x\square_F y\}$,那么

(i) $\square_F$是 M 上的可证等价关系,$M/\square_F=\{[x]_F\mid x\in M\}$ 关于商运算也构成 R_0 代数. 其中的偏序为:$[x]_F\leqslant[y]_F$ 当且仅当 $x\to y\in F$.

(ii) 当 F 是 M 的素滤子时,$M/\square_F$是 R_0 链.

定理 4.2[7]　在 R_0 代数中,若 F 是布尔滤子,则 $M/\square_F$是布尔代数.

证明　由定理 4.1 知,$M/\square_F$是 R_0 代数,从而由定义 1.1,可得 $M/\square_F$是分配格. 由 F 是布尔滤子知,对任意 $x\in M$,$x\vee x'\in F$,且 $x\vee x'\to 1=1\in F$,从而 $x\vee x'\square_F 1$,故$[1]_F=[x\vee x']_F=[x]_F\vee[x']_F$;又

$$x\wedge x'\to 0\geqslant(x\to 0)\vee(x'\to 0)\geqslant x\vee x',$$

且 $x'\vee x\in F$,所以 $x\wedge x'\to 0\in F$,又 $0\to x\wedge x'\in F$,从而 $x\wedge x'\square_F 0$,进而$[x\wedge x']_F=[x]_F\wedge[x']_F=[0]_F$. 而$[1]_F$,$[0]_F$ 分别是 $M/\square_F$的最大元与最小元,所以 $M/\square_F$是布尔代数.

推论 4.1　在 R_0 代数中,若 F 是蕴涵滤子、正蕴涵滤子,则 $M/\square_F$是布尔代数.

引理 4.1　$\forall a\in M$,设 F 是 M 的蕴涵滤子,$F_a=\{x\in M\mid a\to x\in F\}$,则 F_a 是包含 a 与 F 的滤子.

证明　因为 $a\to 1=1\in F$,所以 $1\in F_a$;设 $x\in F_a$,$x\to y\in F_a$,从而$(a\to x)\in F$,$a\to(x\to y)\in F$,由 F 是蕴涵滤子,就有$(a\to y)\in F$,这说明 $y\in F_a$. 又 $a\to a\in F$,就有 $a\in F_a$. 若 $y\in F$,则 $y\to(a\to y)\in F$. 由 F 是滤子可知,$a\to y\in F$,这表明 $y\in F_a$,得证.

定理 4.3　在 R_0 代数中,若 F 是极大布尔滤子,则 $M/\square_F$是只有两个元的布尔代数.

证明　因为 F 是极大布尔滤子,则 $\exists a\notin F$,由引理 4.1 知,F_a 是包含 a 与 F 的滤子. 而 F 是极大滤子,所以 $F_a=M$. 从而 $0\in F_a$,即 $a\to 0\in F$;又 $0\to a=1\in F$,所以 $0\in[a]_F$,即$[0]_F=[a]_F$. 设 $b\notin F$,类似可证,$[0]_F=[b]_F$. 又若 $x\in F$,则 $1\to x=x\in F$,$x\to 1=1\in F$,故$[x]_F=[1]_F$. 从而 $M/\square_F$,只有两个元$[0]_F$,$[1]_F$,得证.

（下转第 182 页）

【参 考 文 献】

[1] 周 云,蒋魁强,王珊珊,等.铌酸钠钾基压电陶瓷的结构与性能研究[J].中国计量学院学报,2009,20(1):89-90.

[2] ZHANG S J, XIA R, SHROVT T R, et al. Piezoelectric properties in perovskite 0.948($K_{0.5}$ $Na_{0.5}$)NbO_3-0.052$LiSbO_3$ lead-free ceramics[J]. Journal of Applied Physics, 2006,100:104-108.

[3] 彭东文.钛酸锶钡非线性介质薄膜的高介电调谐率和低介电损耗的研究[D].上海:上海大学博士学位论文,2005.

[4] 杨同青,刘 鹏,翟继卫,等.电场诱导陶瓷 PZST 反铁电-铁电相变[J].材料研究学报,2006,14(3):321-324.

[5] 梁晓峰,吴文彪,孟中岩.顺电态下掺铝酸锶钡陶瓷微结构和介电调谐性能[J].无机材料学报,2003,18(6):1240-1244.

[6] 孙小华,付建科,邹 隽,等.富钛梯度($Ba_{0.6}Sr_{0.4}$)TiO_3 薄膜的介电调谐性能研究[J].功能材料,2003,38(3):373-376.

[7] 王中财,程素君,朱利娜,等.Cu 掺杂对 Fe/Mo 双钙钛矿居里温度的影响[J].中国计量学院学报,2006,17(4):330-332.

[8] 蒋丽珍,何雪竹,余 虹,等.$La_{1-x}Sr_xCoO_3$ 体系的绝缘体-金属相变[J].中国计量学院学报,2006,17(3):224-227.

[9] KAMBLE Y B, CHOUGULE S S, CHOUGULE B K. Characterization and property measurements of (y)$Co_{0.9}$ Cd0.1Fe_2O_4+(1-y)PZT ME composites[J]. Journal of Alloys and Compound, 2009,476:733-737.

[10] TANG X G, CHEW K H, WANG J, et al. Dielectric tunability of ($Ba_{0.90}Ca_{0.10}$)($Ti_{0.75}Zr_{0.25}$)O_3 ceramics[J]. Applied Physics Letters, 2004,85:991-993.

(上接第 173 页)

推论 4.2 在 R_0 代数中,若 F 是固执滤子,则 $M/\square_F$ 是只有两个元的布尔代数.

定理 4.4[10] 在 R_0 代数中,若 F 是 MV 滤子,则 $M/\square_F$ 是正规 R_0 代数.

【参 考 文 献】

[1] 杨其华.一种实用的自组织模糊控制器设计方法[J].中国计量学院学报,1999,10(2):49-53.

[2] 朱维斌,李轶凡,段玉培,等.模糊控制器在即热式热水器的应用[J].中国计量学院学报,2007,18(2):114-117.

[3] 窦亮亮,徐伟中,李 雄,等.温室环境模糊控制器的设计.中国计量学院学报[J].2007,18(1):34-37.

[4] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京:科学出版社,2000:60-70.

[5] 裴道武.剩余格与正则剩余格的几个特征定理[J].数学学报,2002,45(2):271-278.

[6] 裴道武.R_0 代数中的 MP 滤子与可证等价关系[J].模糊系统与数学,2000,14:22-25.

[7] 张小红,薛占熬,马盈仓.R_0 代数(NM-代数)的布尔 MP 滤子与布尔 MP 理想[J].工程数学学报,2005,22(02):287-294.

[8] 吴苏朋.R_0 代数中的正蕴涵 MP 滤子和固执 MP 滤子[J].计算机工程与应用,2008,44(20):67-69.

[9] 张花荣.R_0 代数的滤子理论[J].模糊系统与数学,2009,23(3):17-21.

[10] LIU Y L, REN M Y. Normal MP-filters of R_0 Algebras[J]. Fuzzy Info. and Engineering, 2009,54:113-118.