【文章编号】 1004-1540(2010)01-0078-04

Heisenberg 群上次拉普拉斯不等方程弱解的不存在性

赵 琼，韩亚洲
（中国计量学院 理学院，浙江 杭州 310018）

【摘 要】 利用 Heisenberg 群及其向量场的一些性质，通过选取适当特殊的非负试验函数和伸缩的方法，证明了 Heisenberg 群上的次拉普拉斯不等方程的非平凡弱解的不存在性.

【关键词】 Heisenberg 群；次拉普拉斯算子；弱解；试验函数
【中图分类号】 O175.2 【文献标识码】 A

Nonexistence of weak solutions for sub-Laplace inequalities on the Heisenberg group

ZHAO Qiong, HAN Ya-zhou
(College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Some nonexistences of the nontrivial weak solutions for sub-Laplace inequalities on the Heisenberg group were proved. This process completes by considering some properties of the Heisenberg group, its vector fields, and a careful selection of the special nonnegative test functions and scaling method.

Key words: Heisenberg group; sub-Laplace operator; weak solution; test function

近年来，很多学者研究了欧式空间 R^n 上具有奇异性的偏微分不等方程：

$$-\Delta u \geqslant \frac{|u|^p}{|x|^\gamma}, x \in R^n, \tag{1}$$

给出不存在非平凡弱解的 Liouville 型结果[1-3]

在 Heisenberg 群上，Pohozaev 和 Veron[4] 研究了不等方程

$$-\Delta_H(au) \geqslant \frac{|u|^p}{|\xi|_H^\gamma}, \xi \in H^n, \tag{2}$$

其中 $a \in L^\infty(H^n)$，发现当 $\gamma < 2, 1 < p \leqslant \frac{Q-\gamma}{Q-2}$（$Q = 2n+2$ 为 H^n 的齐次维数）时，(2) 式无非平凡弱解. 而 D'Ambrosio[5] 则讨论临界不等方程

$$-\frac{|\xi|_H^2}{\psi}\Delta_H(au) \geqslant |u|^p, \xi \in H^n \backslash \{0\}, \tag{3}$$

其中 $a \in L^\infty(H^n)$，ψ 的定义证明见预备知识. D'Ambrosio 利用基本解构造一类适当的试验函数，当 $p > 1$ 时得到类似的结果.

【收稿日期】 2009-12-20
【基金项目】 浙江省自然科学基金资助项目(No. Y606144)
【作者简介】 赵 琼(1985－)，女，河北定州人，硕士研究生. 主要研究方向为偏微分方程.

本文拟构造一类新的试验函数，研究下列加权不等方程：

$$-\Delta_H(au)\geqslant\psi\frac{|u|^p}{|\xi|_H^\gamma},\xi\in H^n \quad (4)$$

其中 $a\in L^\infty(H^n)$，给出如下的 Liouville 型结果：

定理 1 当 $\gamma<2$，且 $1<p\leqslant\frac{Q-\gamma}{Q-2}$ 时，(4) 式无非平凡弱解.

注 1) 定理 1 的条件与(2) 式的条件相同，但 $\psi\frac{|u|^p}{|\xi|_H^\gamma}\leqslant\frac{|u|^p}{|\xi|_H^\gamma}$，故定理 1 可推出文献[4] 中的结果；

2) 对 $\gamma=2$ 的“临界”情况，文献[5] 中得到类似结论；

3) 当$\frac{Q-\gamma}{Q-2}<p$ 时，如果

$0<\inf a(\xi)\leqslant\sup a(\xi)<+\infty$，则可构造非平凡解(见文献[6])

$$u=Ca^{-1}(1+\rho^2)^{-\frac{\alpha}{2}},$$

其中 $\alpha=Q-2-\varepsilon(\forall\varepsilon>0)$.

进一步，本文在 H^n 上讨论加权不等方程组

$$\begin{cases}-\Delta_H(a_1u)\geqslant\psi\dfrac{|v|^{p_1}}{|\xi|_H^{\gamma_1}}\\ -\Delta_H(a_2v)\geqslant\psi\dfrac{|u|^{p_2}}{|\xi|_H^{\gamma_2}}\end{cases} \quad (5)$$

其中 $a_1,a_2\in L^\infty(H^n)$ 给出如下结论：

定理 2 当 $\gamma_i<2$，且 $1<p_i\leqslant\frac{Q-\gamma_i}{Q-2}$ 时，$i=1,2$ 时，(5) 式无非平凡弱解.

1 预备知识

首先介绍 Heisenberg 群及一些基本结论(见文献[7-9] 等). 令 $\xi=(z,\tau)=(x,y,\tau)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots y_n,\tau)$，$z=(x,y)$，$x\in R^n$，$y\in R^n$，$\tau\in R$，$n>1$. Heisenberg 群 H^n 是赋予如下群运算的 R^{2n+1} 集合

$$\xi\circ\tilde{\xi}=\Big(x+\tilde{x},y+\tilde{y},\tau+\tilde{\tau}+2\sum_{i=1}^n\Big(x_i\widetilde{y_i}-y_i\widetilde{x_i}\Big)\Big)$$

定义 Heisenberg 群 H^n 上距离为

$$|\xi|_H=\left[\sum_{i=1}^n(x_i^2+y_i^2)^2+\tau^2\right]^{\frac14}=(|z|^4+\tau^2)^{\frac14}$$

其中记 $|z|=\left(\sum_{i=1}^n(x_i^2+y_i^2)^2\right)^{\frac12}$，$\rho=|\xi|_H$.

Heisenberg 群 H^n 上的一组左不变向量场

$$\boldsymbol{X}_i=\frac{\partial}{\partial x_i}+2y_i\frac{\partial}{\partial\tau},\boldsymbol{Y}_i=\frac{\partial}{\partial y_i}-2x_i\frac{\partial}{\partial\tau}$$

$$i=1,2,\cdots n.$$

相应的广义梯度和次拉普拉斯算子分别为

$$\nabla_H=(X_1,X_2\cdots X_n,Y_1,Y_2\cdots Y_n),$$

$$\Delta_H=\sum_{i=1}^nX_i^2+Y_i^2$$

H^n 上的自然伸缩$\delta_\lambda(\xi)=(\lambda x,\lambda y,\lambda^2\tau)$. 容易得到 ρ 是关于 δ_λ 为一次拟齐次的，即

$$\rho(\delta_\lambda(z,\tau))=\lambda\rho((z,\tau)). \quad (6)$$

Δ_H 是关于 δ_λ 为二次拟齐次的，即

$$\Delta_H(\delta_\lambda(z,\tau))=\lambda^2\Delta_H((z,\tau)). \quad (7)$$

H^n 上的齐次维数为 $Q=2n+2$. 定义心在原点，半径为 R 的开球为

$$B_H(0,R)=\{\xi\in H^n:|\xi|<R\}.$$

函数 $u:\Omega\subset H^n\longrightarrow R$ 称为圆柱对称的，如果 $u(\xi)=u(|z|,\tau)$，(u 只依赖于 $|z|,\tau$). 特别地，如果 $u(|\xi|)=u(\rho)$，即 u 只依赖 ρ，那么称 u 是径向的.

设 $u\in C^2(\Omega)$，如果 u 是径向的[8]，那么容易得到

$$|\nabla_Hu|^2=\psi|u'|^2 \quad (8)$$

和

$$\Delta_Hu=\psi\Big(u''+\frac{Q-1}{\rho}u'\Big) \quad (9)$$

记 $\psi=\frac{|z|^2}{\rho^2}$.

记$C_0^2(\Omega)$为$C^2(\Omega)$中具有紧支集的函数构成的集合. 在后面将用到满足以下性质的函数 $\varphi_0\in C_0^2(R_+)$：

$$0\leqslant\varphi_0\leqslant1,$$

$$\varphi_0(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant1\\ 0, & y\geqslant2\end{cases} \quad (10)$$

且$\int_R\frac{|\varphi'_0(\eta)|^p}{\varphi_0(\eta)^{p-1}}\mathrm{d}\eta$、$\int_R\frac{|\varphi''_0(\eta)|^p}{\varphi_0(\eta)^{p-1}}\mathrm{d}\eta(p>1)$ 有限，具体构造见文献[1,2,10]，如果存在一个合适的具有性质式(10) 的函数 φ_0 使得上述积分有限，称函数 φ_0 为容许函数.

2　定理1的证明

令 $a\in L^{\infty}(H^n)$，$\gamma,p\in R$，且 $p\geqslant 1$. 我们将 H^n 中的点等同于 R^{2n+1} 中的点，从而 H^n 上的 Haar 测度等于 R^{2n+1} 上的 Lebesgue 测度，即 $d\xi=dxdyd\tau$，其中 $\xi\in H^n$，$R^{2n+1}=R^n\times R^n\times R$.

定义 2.1　函数 $u\in L^p_{loc}(R^{2n+1},|\xi|_H^{-\gamma}d\xi)$ 称为(4)式的一个弱解，而且仅当对任何非负函数 $\varphi\in C_0^2(H^n)$ 均有

$$\int_{H^n}(au\Delta_H\varphi+\psi|\xi|_H^{-\gamma}|u|^p\varphi)d\xi\leqslant 0. \tag{11}$$

定理1的证明　设 u 是式(4)的一个弱解，取 $\varphi=\varphi(|\xi|_H)\in C_0^2(H^n)$，且满足

$$0\leqslant\varphi\leqslant 1,$$

$$\varphi(|\xi|_H)=\begin{cases}1 & \text{当 } 0\leqslant|\xi|_H\leqslant\frac{1}{2}\text{ 时,}\\ 0 & \text{当 } |\xi|_H\geqslant 1\text{ 时,}\end{cases}$$

令 $\Phi_R=\varphi\circ\delta_{\frac{1}{R}}(\xi)$，(可见文献[11])，

$$\int_{H^n}\psi|\xi|_H^{-\gamma}\Phi_R d\xi\leqslant-\int_{H^n}au\Delta_H\Phi_R d\xi=$$

$$-R^{-2}\int_{\frac{R}{2}\leqslant\rho\leqslant R}au\psi\left(\left(\varphi''+\frac{Q-1}{\rho}\varphi'\right)\circ\delta_{\frac{1}{R}}(\xi)\right)d\xi \tag{12}$$

由 Hölder 不等式，得到

$$\int_{H^n}\psi|\xi|_H^{-\gamma}|u|^p\Phi_R d\xi\leqslant$$

$$R^{-2}\|a\|_{L^\infty}\left(\int_{\frac{R}{2}\leqslant\rho\leqslant R}\psi|\xi|_H^{-\gamma}|u|^p\Phi_R d\xi\right)^{\frac{1}{p}}I^{\frac{1}{q}} \tag{13}$$

其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

$$I=\int_{\frac{R}{2}\leqslant\rho\leqslant R}\psi\rho^{\frac{q\gamma}{p}}\Phi_R^{-\frac{q}{p}}\left|\left(\varphi''+\frac{Q-1}{\rho}\varphi'\right)\circ\delta_{\frac{1}{R}}(\xi)\right|^q d\xi$$

令 $\xi=\delta_R(\eta)$，有

$$I=R^{Q+\frac{q\gamma}{p}}\int_{\frac{1}{2}\leqslant\rho\leqslant 1}\psi\rho^{\frac{q\gamma}{p}}\varphi^{-\frac{q}{p}}\left|\varphi''+\frac{Q-1}{\rho}\varphi'\right|^q d\eta\leqslant$$

$$2^qR^{Q+\frac{q\gamma}{p}}\cdot\int_{\frac{1}{2}\leqslant\rho\leqslant 1}\left(\rho^{\frac{q\gamma}{p}}\frac{|\varphi''|^q}{\varphi^{q-1}}+\right.$$

$$\left.|Q-1|^q\rho^{\frac{q\gamma}{p}-1}\frac{|\varphi'|^q}{\varphi^{q-1}}\right)d\eta\leqslant MR^{Q+\frac{q\gamma}{p}} \tag{14}$$

由式(13)和式(14)，得到

$$\int_{H^n}\psi|\xi|_H^{-\gamma}|u|^p\Phi_R d\xi\leqslant$$

$$M\|a\|_{L^\infty}\left(\int_{\frac{R}{2}\leqslant\rho\leqslant R}\psi|\xi|_H^{-\gamma}|u|^p\Phi_R d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$R^{\frac{Q}{q}+\frac{\gamma}{p}-2} \tag{15}$$

当 $\gamma<2$，且 $1<p<\dfrac{Q-\gamma}{Q-2}$ 时，

$$\frac{Q}{q}+\frac{\gamma}{p}-2=Q-2-\frac{Q-\gamma}{p}<0$$

结合不等式(15)可知

$$\int_{H^n}\psi|\xi|_H^{-\gamma}|u|^p d\xi=$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{H^n}\psi|\xi|_H^{-\gamma}|u|^p\Phi_R d\xi=0.$$

得到 $u\equiv 0$，结论成立.

另一方面，如果 $\gamma<2$，$p=\dfrac{Q-\gamma}{Q-2}$，不等式(15)化为

$$\int_{H^n}\psi|\xi|_H^{-\gamma}|u|^p\Phi_R d\xi\leqslant$$

$$M\|a\|_{L^\infty}\left(\int_{\frac{R}{2}\leqslant\rho\leqslant R}\psi|u|^p\rho^{-\gamma}\Phi_R d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

所以左端积分有界，从而当 $R\to+\infty$ 时，上式的右端积分收敛于零，故左端的积分也收敛于零. 结论成立.

3　定理2的证明

定义 3.1　取 $v\in L^{p_1}_{loc}(R^{2n+1},|\xi|_H^{-\gamma_1}d\xi)$，$L^{p_2}_{loc}(R^{2n+1},|\xi|_H^{-\gamma_2}d\xi)$，$(u,v)$ 称为方程组(5)的一个弱解，当且仅当对任何非负函数 $\varphi\in C_0^2(R^{2n+1})$，均有

$$\int_{H^n}(a_1u\Delta_H\varphi+\psi|\xi|_H^{-\gamma_1}|v|^{p_1}\varphi)d\xi\leqslant 0 \tag{16}$$

$$\int_{H^n}(a_2u\Delta_H\varphi+\psi|\xi|_H^{-\gamma_2}|v|^{p_2}\varphi)d\xi\leqslant 0 \tag{17}$$

定理2的证明　由定理1的证明，得到

$$\begin{cases}I_v\leqslant M_1\|a_1\|_{L^\infty}I_u^{\frac{1}{p_2}}(R^{Q+\frac{q_2\gamma}{p_2}-2})^{\frac{1}{q_2}}\\ I_u\leqslant M_2\|a_2\|_{L^\infty}I_v^{\frac{1}{p_1}}(R^{Q+\frac{q_1\gamma}{p_1}-2})^{\frac{1}{q_1}}\end{cases}$$

其中

$$I_v=\int_{H^n}\psi|\xi|_H^{-\gamma_1}|v|^{p_1}\Phi_R d\xi,$$

$$I_u=\int_{H^n}\psi|\xi|_H^{-\gamma_2}|u|^{p_2}\Phi_R d\xi,$$

M_1，M_2 与 R 无关.

由 Young 不等式，得到

$$\begin{cases} I_v \leqslant \dfrac{1}{2} I_u + C_1 R^{Q+\frac{q_2\gamma_2}{p_2}-2q_2} \\ I_u \leqslant \dfrac{1}{2} I_v + C_2 R^{Q+\frac{q_1\gamma_1}{p_1}-2q_1} \end{cases} \tag{18}$$

其中 C_1，C_2 与 R 无关.

由式(18) 得到

$$I_u + I_v \leqslant 2C_1 R^{Q+\frac{q_2\gamma_2}{p_2}-2q_2} + 2C_2 R^{Q+\frac{q_1\gamma_1}{p_1}-2q_1} = C\left(R^{Q+\frac{q_2\gamma_2}{p_2}-2q_2} + R^{Q+\frac{q_1\gamma_1}{p_1}-2q_1}\right) \tag{19}$$

当 $\gamma_i < 2$，且 $1 < p_i \leqslant \dfrac{Q-\gamma_i}{Q-2}$ 时，$Q + \dfrac{q_i\gamma_i}{p_i} - 2q_i \leqslant 0$，$i = 1,2$. 后面的证明如定理 1 情况下的证明. 定理证毕.

【参　考　文　献】

[1] MITDIERI E, POHOZAEV S I. Nonexistence of positive solutions for quasilinear elliptic problems on R^N[J]. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 1999, 227:1-32.

[2] MITDIERI E, POHOZAEV S I. Nonexistence of weak solutions for some degenerate elliptic and parabolic problems on R^N[J]. Journal of Evolution Equations, 2001, 1(2): 189-220.

[3] BIRINDELLI I, MITIDIERI E. Liouville theorems for elliptic inequalities and applications[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1998, 128:1217-1247.

[4] PHOZAEV S I, VERON L. Nonexistence results of semilinear differential inequalities on the Heisenberg group[J]. Manuscripta Math, 2000, 102:85-99.

[5] D'AMBROSIO L. Critical degenerate inequalities on the Heisenberg group[J]. Manuscripta Math, 2001, 232:240-259.

[6] BIRINDELLI I, CAPUZZO DOLCETTA I, CUTRI A. Liouville theorems for semilinear equations on the Heisenberg groups[J]. Ann IHP, 1997, 14:295-308.

[7] BIRINDELLI I, CAPUZZO DOLCETTA I, CUTRI A. Indefinite semi-linear equations on the Heisenberg group: a priori bounds and existence[J]. Comm in PDE, 1998, 23: 1123-1157.

[8] 罗学波，钮鹏程，韩亚洲. 拟线性偏微分算子的分析[M]. 西安：西北工业大学出版社，2007:138-165.

[9] FOLLAND G B. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups[J]. Ark Math, 1975, 13:161-207.

[10] MITDIERI E, POHOZAEV S I. Absence of global positive solutions of quasilinear elliptic inequalities[J]. Dokl Akad Nauk, 1998, 359:456-460.

[11] 韩亚洲. 与向量场相关的 Liouville 型定理、Hardy-Sobolev 型不等式及其应用[D]. 西安：西北工业大学，2005.

(上接第 45 页)

[8] SHAO X G, WANG G Q, WANG S F, et al. Extraction of mass spectra and chromatographic profiles from overlapping GC/MS signal with background[J]. Anal Chem, 2004, 76:5143-5148.

[9] WANG G Q, CAI W S, SHAO X G. A primary study on resolution of overlapping GC-MS signal using mean-field approach independent component analysis[J]. Chemom Intell Lab Syst, 2006, 82:137-144.

[10] LEE J M, YOO C, LEE I B. Statistical monitoring of dynamic processes based on dynamic independent component analysis[J]. Chem Eng Sci, 2004, 59:2995-3006.

[11] 毕　贤，李通化，吴　亮. 独立组分分析在近红外光谱分析中的应用[J]. 高等学校化学学报，2004, 25(6):1023-1027.

[12] 侯振雨，姚树文，谷永庆，等. 连续小波变换－独立成分回归算法及其在多组分分析中的应用[J]. 理化检验－化学分册，2006, 42(7):517-520.

[13] 侯振雨，王　伟，蔡文生，等. 基于独立成分的局部建模方法及其在近红外光谱分析中的应用研究[J]. 计算机与应用化学，2006, 23(3):224-226.

[14] 方利民，林　敏. 近红外光谱数据处理的独立分量分析方法研究[J]. 中国计量学院学报，2008, 19(2):137-141.

[15] ANDRZEJ C, SHUN-ICHI A. Adaptive Blind Signal and Image Processing[M]. New York: John Wiley & Sons, 2002:1-156.

[16] 胡立志，张树生，董　莲. LabVIEW 在时间频率计量测试中的应用[J]. 中国计量学院学报，2008, 19(2):133-136.

[17] 周　娟，蒋登峰. 基于 Matlab 的 ADC 自动测试系统开发[J]. 中国计量学院学报，2008, 19(3):219-224.