【文章编号】 1004-1540(2009)04-0367-04

G^1 保凸分段二次多项式插值参数曲线

周林生[1],章仁江[2]
(1. 中国计量学院 理学院,浙江 杭州 310018;2. 浙江工商大学 统计学院,浙江 杭州 310018)

【摘　要】 给定平面上一列凸数据点,导出了用具有一阶几何连续性的分段二次多项式参数曲线插值各型值点且具有保凸性的充分必要条件. 并用一些实例进行验证. 结果表明,这种方法是正确和有效的.

【关键词】 保凸;插值;二次多项式
【中图分类号】 TP391.72　　【文献标识码】 A

G^1 convexity preserving quadratic polynomial parametric interpolating curve

ZHOU Lin-sheng[1], ZHANG Ren-jiang[2]
(1. College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China;
2. School of Statistics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Given a set of planar convex data points, a sufficient and necessary condition for using piecewise quadratic G^1-continuous polynomial parameter curve with interpolating and convexity preserving was derived. And some numerical examples support the proposed theory .

Key words: convexity preserving; interpolation; quadratic polynomial

在计算机辅助几何设计和图形重建领域中,保形插值的研究是其中一个重要的内容. 在汽车、飞机等一些工业产品的几何外形设计中,往往是依据采集的数据点重建其形状. 所构造的形状要保持所采集数据点集的几何性质尤为重要. 保形插值中最基本的要求是保单调和保凸,即给定一个单调或凸的数据点集,希望找到同样也是单调或凸的曲线曲面来插值给定的数据点集. 其中保凸插值是研究保形插值的关键,一般可用保凸插值算法直接构造保单调算法.

近年来,有许多学者致力于保形插值的研究,Gregory 讨论了一类有理三次样条函数的保形插值[1],潘永娟和王国瑾[2] 通过引进 α- 非均匀 B 样条曲线,研究了这种曲线保单调插值的可能性与算法. 在外形设计和逆向工程中最传统和广泛应用的是多项式插值,保凸的分段多项式插值也有许多研究成果[3-7]:方逵[3] 研究了 C^2 连续的四次多项式保形插值,通过在部分子区间上插入一个型值点,即可以构造 C^2 连续的四次多项式插值. Steven[4] 和 Azrcher[5] 几乎同时提出了一种 C^2 连

【收稿日期】 2009-10-19
【作者简介】 周林生(1984 -),男,山东临清人,硕士研究生. 主要研究方向为计算机辅助几何设计.

续的分段三次保形插值方法，这种方法需要在每个子区间插入两个节点，每个子区间上对应的曲线用三段多项式组成. 这种方法存在着一个缺点，就是曲线段数太多，计算复杂，不容易控制形状. Schumaker[6] 构造了 C^1 连续的保形二次样条插值，但是同样需要在每个子区间上增添一个细分点才能构造满足条件的曲线，文锦[7] 通过插值部分新节点，得到了一种保凸 C^1 分段二次多项式插值函数，但这种方法在每一个节点处的导数参数值计算比较复杂. 由上述的一些研究成果可知，用分段多项式构造保凸插值曲线的条件比较苛刻，即使对一般的凸数组也需要插入较多的内结点，才能满足构造的曲线具有保凸性.

笔者首先导出了用分段二次 G^1 连续的多项式参数曲线插值各型值点且具有保凸性的充分必要条件，应用这个结果构造了分段二次 G^1 连续的多项式参数插值曲线，不需要插入新的型值点，而且切矢的计算也比较简单. 通过这种方法构造的曲线不仅在整体上是 G^1 连续的，且曲线是保凸的，具有较好的光顺性. 该方法构造插值曲线算法简洁，计算简单. 最后我们给出了一些实例验证了这种方法的有效性.

1 G^1 保凸分段二次多项式插值

对于参数曲线，如果它的单位切向量连续变化，则称该曲线一阶几何连续，记为 G^1 连续. 所谓 G^1 保凸就是指该曲线既满足一阶几何连续又具有保凸性.

对于一般的保凸插值曲线，主要应考虑如下的基本问题[8]：首先是如何估计数据点的切矢，尽量满足保凸的要求；其次是插值曲线的构造，如果采用的是多项式，其次数一般不超过五次，而且参数曲线应有形状控制功能；最后是要求整体插值曲线有一定的光滑度和光顺性.

给定平面上的有序点列 $\{p_i\}_{i=0}^{n}$，依次用直线段连接相邻两点构成一个多边形，记为 $\langle p_0, p_1, \cdots, p_n\rangle$，称该多边形为型值多边形，并记它们的边向量分别为

$$\boldsymbol{D}_i = p_{i+1} - p_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

当 $\langle p_0, p_1, \cdots, p_n\rangle$ 是凸多边形（本文的凸多边形是指 $\boldsymbol{D}_i$ 到 $\boldsymbol{D}_{i-1}$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 的逆时针转角为正且小于 π）时，其目的是构造一条 G^1 连续的分段二次多项式曲线，插值于每个点 p_i，且该曲线是凸的，构造的基本思路就是在每两个相邻的型值点之间构造一条二次多项式曲线，且使段与段之间达到 G^1 连续.

设待构造的插值曲线为 $r(t)$，$r(t)$ 在 $p_i(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 处的左切矢记为 $\boldsymbol{T}_i$，右切矢则记为 $\boldsymbol{T}_i^* = \alpha_i \boldsymbol{T}_i$，式中 α_i 为构造曲线的调节参数.

由参考文献[7]可知，当满足条件 $\boldsymbol{T}_{i-1}^* + \boldsymbol{T}_i = 2\boldsymbol{D}_{i-1}$ 时，在两个相邻型值点 p_{i-1} 与 p_i 之间可以构造保凸的二次多项式插值函数 $r_{i-1}(t)$，该文献给出了构造二次多项式函数保凸的充分条件，其实 $\boldsymbol{T}_{i-1}^* + \boldsymbol{T}_i = 2\boldsymbol{D}_{i-1}$ 也是二次多项式函数保凸的必要条件：

由于 $r''_{i-1}(t)$ 恒为常向量，所以二次多项式函数不存在拐点，即都是保凸或保凹的. 根据参数二次多项式函数的系数与边向量、切矢量的关系易得：

$$r'_{i-1}(0) + r'_{i-1}(1) = 2[r_{i-1}(1) - r_{i-1}(0)],$$

即：$\boldsymbol{T}_{i-1}^* + \boldsymbol{T}_i = 2\boldsymbol{D}_{i-1}$，所以，二次参数多项式函数 $r_{i-1}(t)$ 保凸的充分必要条件是 $\boldsymbol{T}_{i-1}^* + \boldsymbol{T}_i = 2\boldsymbol{D}_{i-1}$. 因此，$r(t)$ 在 p_i 处的左右切矢可分别取值如下：

当 $i = 0$ 时，$r(t)$ 在 p_0 处仅取右切矢，记为

$$\boldsymbol{T}_0^* = \boldsymbol{D}_0 - \boldsymbol{D}_1$$

当 $i = 1, 2, \cdots, n-1$ 时，$r(t)$ 在 p_i 处的左右切矢分别为

$$\boldsymbol{T}_i = 2\boldsymbol{D}_{i-1} - \boldsymbol{T}_{i-1}^*, \tag{1}$$

及

$$\boldsymbol{T}_i^* = \alpha_i \boldsymbol{T}_i. \tag{2}$$

根据上述得到的 $\boldsymbol{D}_i$ 和 $\boldsymbol{T}_i^*$，在 p_i 和 $p_{i+1}(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 之间构造的二次多项式参数曲线方程为：

$$r_i(t) = (\boldsymbol{D}_i - \boldsymbol{T}_i^*)t^2 + \boldsymbol{T}_i^* t + p_i, \tag{3}$$

其中，$0 \leqslant t \leqslant 1$.

以上切矢的选取只是保证了在相邻的型值点间构造的曲线 $r_i(t)$ 是保凸的，并不能确定连接所有的型值点后构造的曲线 $r(t)$ 也是保凸的，如图1所示，型值点 p_3 同时也是曲线 $r(t)$ 的一个拐点，所以构造的这条曲线不具有保凸性.

针对上面不保凸的情况，加上一个限制条件可以解决这种问题，从图1可以看到 p_3 作为一个拐点是由于在 p_3 处取得的切矢 $\boldsymbol{T}_3$ 不恰当引起的，修改 $\boldsymbol{T}_3$ 的方向，就可以使构造的曲线具有保凸性.

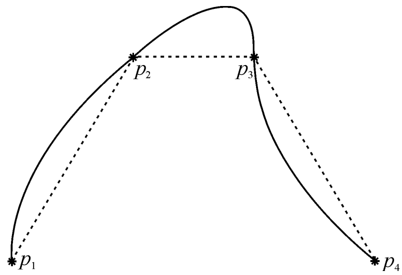

图 1　构造的曲线不具有保凸性

Figure 1　Constructed curve doesn't hold convex

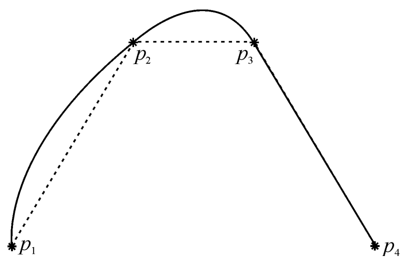

图 2　$\boldsymbol{T}_3//\boldsymbol{D}_2$ 时得到的插值曲线

Figure 2　Interpolating curve is obtained when $\boldsymbol{T}_3//\boldsymbol{D}_2$

由式(1)以及(2)可以知道，$\boldsymbol{T}_3 = 2\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{T}_2^* = 2\boldsymbol{D}_2 - \alpha_2\boldsymbol{T}_2$，所以切矢 $\boldsymbol{T}_3$ 的方向与 α_2 的大小有关. 为了满足构造的曲线具有保凸性，$\boldsymbol{T}_3$ 的方向应该介于边向量 $\boldsymbol{D}_2$ 与边向量 $\boldsymbol{D}_3$ 之间. 当 $\alpha_2 = 0$ 时，$\boldsymbol{T}_3$ 与 $\boldsymbol{D}_2$ 方向相同，而当取 $\alpha_2 = \dfrac{|2\boldsymbol{D}_2 \times \boldsymbol{D}_3|}{|\boldsymbol{T}_2 \times \boldsymbol{D}_3|}$ 时，如图 2，$\boldsymbol{T}_3 = 2\boldsymbol{D}_2 - \dfrac{|2\boldsymbol{D}_2 \times \boldsymbol{D}_3|}{|\boldsymbol{T}_2 \times \boldsymbol{D}_3|}\boldsymbol{T}_2//\boldsymbol{D}_3$，即 T_3 与 $\boldsymbol{D}_3$ 方向相同，因此只要选取 $0 < \alpha_2 \leqslant \dfrac{|2\boldsymbol{D}_2 \times \boldsymbol{D}_3|}{|\boldsymbol{T}_2 \times \boldsymbol{D}_3|}$，即可保证构造的插值曲线 $r(t)$ 是保凸的，所以我们有：

定理　由(3)式构造的 G^1 保凸分段二次多项式插值曲线 $r(t)$ 不存在拐点(即具有保凸性)的充分必要条件是

$$0 < \alpha_i \leqslant \frac{|2\boldsymbol{D}_i \times \boldsymbol{D}_{i+1}|}{|\boldsymbol{T}_i \times \boldsymbol{D}_{i+1}|}.$$

α_i 为(2)中的调节参数.

如上构造的曲线具有以下性质：

(1)$r_i(0) = p_i$，$r_i(1) = \boldsymbol{D}_i + p_i = p_{i+1}$，即 $r(t)$ 插值所有经过的点 p_i.

(2)$r(t)$ 具有保凸性，上述已经说明.

$$(3)\begin{cases} r'_{i-1}(t) = 2(\boldsymbol{D}_{i-1} - \boldsymbol{T}_{i-1}^*)t + \boldsymbol{T}_{i-1}^*, \\ r'_i(t) = 2(\boldsymbol{D}_i - \boldsymbol{T}_i^*)t + \boldsymbol{T}_i^*, \\ r'_{i+1}(t) = 2(\boldsymbol{D}_{i+1} - \boldsymbol{T}_{i+1}^*)t + \boldsymbol{T}_{i+1}^*. \end{cases}$$

根据式(1)和(2)可知

$r'_{i-1}(1) = 2\boldsymbol{D}_{i-1} - \boldsymbol{T}_{i-1}^* = \boldsymbol{T}_i//\boldsymbol{T}_i^* = r'_i(0)$，

$r'_{i+1}(0) = \boldsymbol{T}_{i+1}^*//2\boldsymbol{D}_i - \boldsymbol{T}_i^* = r'_i(1)$.

$r'_{i-1}(1)$ 与 $r'_i(0)$，$r'_{i+1}(0)$ 与 $r'_i(1)$ 方向相同，故 $r(t)$ 在 p_i，p_{i+1} 处是 G^1 连续的.

综合(1)(2)(3)，我们构造的插值曲线 $r(t)$ 是 G^1 连续且具有保凸性.

文献[7]给出了构造满足 C^1 连续并且具有保凸性的二次多项式，虽然可以满足较好的广顺性，但是在构造曲线的过程中需要插入新的点才能具有保凸性，而本文给出的方法无需再增加新的点即可构造一条满足保凸性的插值曲线.

2　算法与实例

2.1　算法

本文构造保凸插值曲线的算法描述如下：

for $i \leftarrow 0$ to $n-1$

do $\boldsymbol{D}_i \leftarrow p_{i+1} - p_i$.

$\boldsymbol{T}_0^* \leftarrow \boldsymbol{D}_0 - \boldsymbol{D}_1$.

for $i \leftarrow 1$ to $n-1$

do $\boldsymbol{T}_i \leftarrow 2\boldsymbol{D}_{i-1} - \boldsymbol{T}_{i-1}^*$.

if$\left(0 < \alpha_i \leqslant \dfrac{|2\boldsymbol{D}_i \times \boldsymbol{D}_{i+1}|}{|\boldsymbol{T}_i \times \boldsymbol{D}_{i+1}|}\right)$

then $\boldsymbol{T}_i^* \leftarrow \alpha_i\boldsymbol{T}_i$.

else 报告“调节参数 α_i 取值不正确”.

for $i \leftarrow 0$ to $n-1$

do $r_i(t) \leftarrow (\boldsymbol{D}_i - \boldsymbol{T}_i^*)t^2 + \boldsymbol{T}_i^* t + p_i$.

绘制 $r_i(t)$，$t \in [0,1]$.

算法结束.

2.2　数值实例

本小节采用上述提到的算法，构造通过已知型值点的两条保凸曲线，图 3 显示的是含有四个型值点的一种情况，图中已知的型值多边形与图 1、图 2 所给的型值多边形一致，只是在这个实例中，我们把调节参数 $\alpha_2 < \dfrac{|2\boldsymbol{D}_2 \times \boldsymbol{D}_3|}{|\boldsymbol{T}_2 \times \boldsymbol{D}_3|}$ 进行修改，得到其中较为光顺的一种.

图 4 显示的是含有较多个型值点的一种情况，根据已知的型值点间的位置关系，构造了一条螺旋曲线. 由这两个实例，我们可以看到所构造的插值曲线不仅具有保凸性，而且在每个型值点处有较好的连续性，整条曲线具有较好的光顺性.

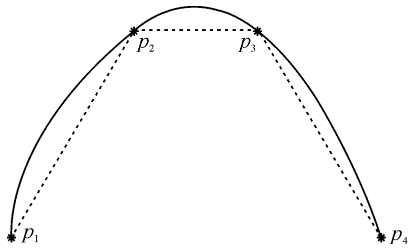

图 3　型值点较少时构造的图形

Figure 3　Curve is constructed with less data points

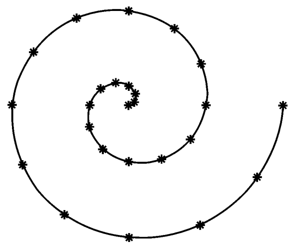

图 4　型值点较多时构造的图形

Figure 4　Curve is constructed with more data points

3　结　语

文中首先导出了用分段二次 G^1 连续的多项式参数曲线插值各型值点且具有保凸性的充分必要条件，由此得出了一种构造 G^1 连续的二次参数多项式保凸插值曲线的新方法．该方法不同于Schumaker等人已有的方法，在相邻的型值点之间不需要加入一个新的节点，而且在每个节点处切矢选取简单，因此可以减少计算量．由文中给出的一些实例可以看到这种方法具有保凸性，构造的曲线具有理想的光顺性．

【参　考　文　献】

［1］ GREGORY J A. Shape preserving spline interpolation［J］. Computer-Aided Design，1986，18(1)：53-57.

［2］ 潘永娟，王国瑾．α-非均匀B样条曲线的保单调插值［J］．计算机辅助设计与图形学学报，2004，16(10)：1386-1391.

［3］ 方　逵．C^k 连续保形插值 $2k$ 次样条函数［J］．数值计算与计算机应用，1994，15(4)：299-307.

［4］ PRUESS S. Shape preserving C^2 cubic spline interpolation［J］. IMA Journal of Numerical Analysis，1983，13(4)：493-507.

［5］ ARCHER J C，GRUYER E L. Two shape preserving lagrange C^2-interpolants［J］. Numerische Mathematik，1993，64(1)：1-11.

［6］ SCHUMAKER L L. On shape preserving quadratic spline interpolation［J］. SIAM J Nume Anal，1983，20(4)：62-71.

［7］ 文　锦．保凸 C^1 分段二次多项式插值方法［J］．数学理论与应用，2000，20(2)：33-36.

［8］ 雷开彬，杨　珂．参数 G^2 连续保凸插值的充分条件［J］．西南民族大学学报(自然科学版)，2007，33(3)：443-445.