

# 一种对称散布矩阵空间的人脸识别方法

段 旭, 张绛丽

(江苏科技大学 计算机科学与工程学院, 江苏 镇江 212003)

**摘要:** 为有效解决小样本问题,从线性子空间的角度出发,构造了一种矩阵变换,得到了类内散布矩阵的另一个对称线性子空间;通过对两个子空间的分别求解,从而得到样本有效的鉴别信息。该方法有效地解决了传统 Fisher 鉴别分析方法中的最终特征维数受类别数限制的问题。在 NUST603 和 ORL 人脸数据库上的实验结果验证了算法的有效性。

**关键词:** 特征抽取; 线性鉴别分析; 对称散布子空间; 小样本问题; 人脸识别

**中图分类号:** TP391.41      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-3695(2010)04-1557-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.04.100

## Face recognition approach based on symmetrical scatter matrix space

DUAN Xu, ZHANG Jiang-li

(School of Computer Science & Engineering, Jiangsu University of Science & Technology, Zhenjiang Jiangsu 212003, China)

**Abstract:** To solve the small sample size problem efficiently, proposed a matrix transform on the basis of linear subspace theory, by which constructed a new linear symmetrical subspace of within-class scatter matrix. By the Fisher's discriminant criterion, derived two solution spaces from the within-class scatter matrix and respectively utilized its corresponding symmetrical subspace to obtain the efficient discriminatory information of the samples. Therefore, overcame the shortcoming of final dimensionality of features obtained by Fisher's discriminant analysis was limited by the number of classes. Experimental results conducted on the NUST603 and ORL face databases demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** feature extraction; linear discriminant analysis; symmetrical scatter subspace; small sample size problem; face recognition

基于 Fisher 准则的线性鉴别分析是一种公认有效的特征抽取方法,其基本思想是选取使 Fisher 准则函数达到极值的矢量作为最佳鉴别矢量集,从而使原始样本在该矢量集上投影后,达到最大的类间离散度和最小的类内离散度。利用 Fisher 准则函数求解最佳鉴别矢量集时,其中一个内在的条件就是要求相应的类内散布矩阵是非奇异的<sup>[1]</sup>。然而,在人脸识别等实际应用领域中,由于受训练样本个数的限制,图像的维数又非常高,经常会遇到小样本问题<sup>[2]</sup>(small sample size problem, SSSP)。这是由于在实际问题中难以找到足够多的训练本来保证类内散布矩阵的可逆性。因此,在小样本情况下,如何利用 Fisher 鉴别准则抽取到最优鉴别特征集成为一个难题。目前,针对该问题的处理方法概括起来可分为以下两类:

a) 从算法本身出发,通过对相应的矩阵分析提出新的求解方法,发展直接针对于小样本问题的算法。例如 Tian<sup>[3]</sup>提出的利用矩阵伪转置的方法来解决类内散布矩阵的奇异问题;洪子泉等人<sup>[4,5]</sup>提出了在原始类内散布矩阵的基础上加扰动值的方法来解决奇异问题;王卫东等人<sup>[6,7]</sup>提出采用对训练样本进行扰动的方法来生成虚拟训练样本,利用这些虚拟训练样本克服了各类协方差矩阵的奇异性问题,从而可以直接使用二次判别分析。这些算法理论无疑为这一问题的解决奠定了基础;但是就其算法本身而言,这些方法均存在着一个共同的弱点,那就是需要在原始样本空间内求解最优鉴别矢量集,而原始样本的特征维数是非常高的。

b) 从模式样本出发,通过事先降低样本向量的维数来达到消除类内散布矩阵奇异性的目的。基于这一思想的处理方法是通过预处理原始空间的图像,然后在处理之后的图像空间内进行特征提取。该类型中比较常用的方法就是 PCA + LDA 的两步骤特征提取方法,此方法最为典型的例子就是 Belhumeur 等人<sup>[8]</sup>提出的 Fisherfaces 方法以及 Yang 等人<sup>[9,10]</sup>提出的 complete PCA + LDA (C-LDA) 方法。本文从一个变换的线性子空间的角度出发,构造并证明了相对于类内散布矩阵  $S_w$  的另一个对称线性子空间  $S_w^*$  的存在,通过分别求解  $S_w$  以及  $S_w^*$  的解空间,从而得到了一个完整描述样本鉴别信息的求解方法。理论及实验结果表明,该方法有效增大了特征维数,强化了鉴别信息的完整性,它从对称空间的角度提供了另一种解决小样本问题的有效方法。

### 1 Fisher 鉴别准则

设  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_c$  为  $C$  个模式类,模式  $X$  为  $n$  维实向量,那么由该训练样本集构成的类间散布矩阵  $S_b$ 、类内散布矩阵  $S_w$  和总体散布矩阵  $S_t$  分别定义为

$$S_b = \sum_{i=1}^c P(\omega_i) (\mu_i - \mu) (\mu_i - \mu)^T \quad (1)$$

$$S_w = \sum_{i=1}^c P(\omega_i) E\{(X - \mu_i)(X - \mu_i)^T / \omega_i\} \quad (2)$$

$$S_t = S_b + S_w = E\{(X - \mu)(X - \mu)^T\} \quad (3)$$

收稿日期: 2009-08-20; 修回日期: 2009-10-15

作者简介: 段旭(1978-), 女, 陕西三原人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为模式识别与智能系统(zjduanxu@yahoo.com.cn); 张绛丽, 女, 硕士, 讲师, 主要研究方向为智能系统、计算机信息安全等。

其中:  $P(\omega_i)$  为第  $i$  类训练样本的先验概率,  $\mu_i = E\{X/\omega_i\}$  为第  $i$  类训练样本的均值,  $\mu = E\{X\} = \sum_{i=1}^C P(\omega_i) \mu_i$  为全体训练样本的均值。

由式(1)~(3)的定义可知,  $S_w$ 、 $S_b$ 、 $S_t$  均为非负定矩阵。当  $S_w$  可逆时,  $S_w$  与  $S_t$  均为正定矩阵, 且满足  $S_t = S_b + S_w$ 。

笔者希望原始数据经过投影后, 在低维空间内得到最有助于模式分类的信息。因此, 如果类内散布矩阵  $S_w$  非奇异, 最优的投影方向  $W_{opt}$  就是使样本类间散布矩阵和类内散布矩阵的行列式比值最大的那些正交特征向量, 由此 Fisher 鉴别准则函数定义为

$$f(W_{opt}) = \arg \max_w \frac{W^T S_b W}{W^T S_w W} \quad (4)$$

其求解过程也就是对下列广义特征方程求取相应的特征值和特征向量的过程。

$$S_b W_i = \lambda S_w W_i \quad (5)$$

当类内散布矩阵奇异时, Fisher 鉴别准则函数也可以采用如下推广形式:

$$F(W_{opt}) = \arg \max_w \frac{W^T S_b W}{W^T S_t W} \quad (6)$$

### 2 一种 LDA 对称子空间

根据上一章理论, 在传统 Fisher 鉴别准则的模式下, 由于  $C$  个模式类的中心点通常是线性独立的,  $\text{rank}(S_b) = C - 1$ 。也就是说, 通过 Fisher 鉴别准则函数得到的最优鉴别向量的个数受到类间散布矩阵的秩的限制, 能得到的最优鉴别向量的个数通常小于等于  $C - 1$ 。因此, 如何有效增大鉴别特征维数成为提高模式判别能力的一个重要因素。本章从一个矩阵变换入手, 构造了一个相对于  $S_w$  的对称矩阵空间  $S_w^*$ , 从而解决了上述问题。

**定理 1** 设  $A$  是秩为  $r$  的  $n$  阶方阵, 则一定存在秩为  $n - r$  的阶方阵  $B$ , 使得  $AB = 0$ 。

**证明** 因为  $\text{rank}(A) = r$ , 根据矩阵理论, 存在  $n$  阶可逆方阵  $P$  和  $Q$ , 使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \triangleq I_r$$

其中,  $E_r$  为  $r$  阶单位矩阵,  $I_r$  为  $A$  的等价标准形。令

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0_{r \times r} & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & E_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \triangleq B_{n-r}^*$$

显然  $\text{rank}(B_{n-r}^*) = n - r$ , 并且  $PAQB_{n-r}^* = PAQQ^{-1}B = PAB = 0$ 。因为  $P$  和  $Q$  均可逆, 所以  $AB = 0$ ,  $\text{rank}(B) = \text{rank}(B_{n-r}^*) = n - r$ , 从而  $B = QB_{n-r}^*$ , 即为所求。

定理 1 构造了相对于  $S_w$  的一个对称线性子空间  $S_w^*$ , 从而有效增大了鉴别特征的维数, 解决了传统 Fisher 线性鉴别方法中特征的最终维数受类别数限制的问题。

### 3 对称子空间的特征抽取算法

根据上面的理论分析, 在人脸图像的特征抽取过程中, 笔者在 Fisher 鉴别准则的基础上提出了完整的基于对称线性子空间变换的特征抽取算法, 从而获得了类内散布矩阵  $S_w$  及其对称子空间  $S_w^*$  的共同最优鉴别矢量。算法具体步骤如下:

a) 对原始图像作 PCA 变换, 将图像降维到  $m$  维空间, 其中  $m = \text{rank}(S_t)$ 。在  $R^m$  空间中计算类内散布矩阵  $S_w$  的特征值是正值所对应的特征向量  $P_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ 。由此重新得

到  $S_w$  值域空间下对应的类间散布矩阵  $\hat{S}_b = P_1^T S_b P_1$  和总体散布矩阵  $\hat{S}_t = P_1^T S_t P_1$ , 计算  $\hat{S}_b$  和  $\hat{S}_t$  的正交特征向量  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$  ( $l \leq C - 1$ ), 将这些特征向量按其对应的特征值从大到小的顺序排列, 因此获得了类内散布矩阵  $S_w$  值域空间下的最优鉴别矢量集  $\alpha_j = P_1 \mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ )。

b) 由于  $S_w$  为秩为  $r$  的  $n$  阶方阵,  $r = \min\{n, N - C\}$ 。其中  $n$  为样本维数,  $N$  为总训练样本数,  $C$  为类别数。根据定理 1, 构造秩为  $n - r$  的  $n$  阶方阵  $S_w^*$ , 使得  $S_w S_w^* = 0$ 。对求得的矩阵  $S_w^*$  计算特征值是正值所对应的特征向量  $P_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-r})$ 。同样重新得到  $S_w^*$  值域空间下对应的类间散布矩阵  $\bar{S}_b = P_2^T S_b P_2$  和总体散布矩阵  $\bar{S}_t = P_2^T S_t P_2$ , 计算  $\bar{S}_b$  和  $\bar{S}_t$  的正交特征向量  $v_1, v_2, \dots, v_k$  ( $k \leq C - 1$ ), 将这些特征向量按其对应的特征值从大到小的顺序排列, 因此获得了相对于  $S_w$  的矩阵  $S_w^*$  解空间下的最优鉴别矢量集  $\beta_j = P_2 v_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ )。

c) 通过对两组最优鉴别矢量集的合并, 构成了最终的基于  $S_w$  及其  $S_w^*$  解空间下的共同最优鉴别矢量集  $\text{disc\_set} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_k)$ 。用测试样本在此最优鉴别矢量集上的投影数据进行分类。

### 4 实验结果及分析

本文分别采用南京理工大学 NUST603 和 ORL<sup>[11]</sup> 人脸图像数据库进行性能验证, 实验共考察了 Eigenface<sup>[8]</sup>、Fisherface<sup>[8]</sup>、D-LDA<sup>[12]</sup> 和本文方法的分类效果。最终经过特征提取后的图像数据都采用 K 近邻分类器实现分类。其中, 近邻参数  $k$  取 3。NUST603 人脸数据库中包含 96 人, 每人由 10 幅图像构成, 每幅图像的原始分辨率均为  $256 \times 256$ 。为了降低内存和实验消耗, 首先将图像中的脸像切割出来, 并归一化为  $32 \times 32$  的标准图像。图 1 为 NUST603 人脸数据库的部分标准化后的人脸图像。



图1 NUST603人脸数据库部分归一化人脸图像

实验中, 分别采用 NUST603 人脸数据库中每类人脸的前  $\theta$  ( $\theta = 3, 4, 5, 6$ ) 个样本组成训练样本集, 同时所有样本组成测试样本集。表 1 是 Eigenface、Fisherface、D-LDA 和本文方法的识别性能比较。

表 1 不同数量训练样本集识别率比较

number of training samples	Eigenface/%	Fisherface/%	D-LDA/%	proposed method/%
3	93.75	97.46	97.81	98.12
4	95.73	98.23	98.12	99.17
5	96.19	98.65	98.65	99.48
6	97.60	99.17	99.28	99.69

ORL 人脸数据库包含 40 人, 每人由不同表情或不同视点的 10 幅图像组成。首先对所有样本进行两次小波变换, 将原始图像预处理成  $23 \times 28$  维的形式。图 2 为 ORL 人脸数据库中的部分归一化的人脸图像。

实验中, 样本的训练数据集随机产生, 在不同的训练样本个数下做 10 次不同的测试, 得到 10 次不同数据集下的均值。

每组实验从每类人脸图像中随机抽取  $\vartheta$  ( $\vartheta = 3, 4, 5$ ) 个样本组成训练样本集,同时所有样本组成测试样本集。表 2 是 Eigenface、Fisherface、D-LDA 和本文方法的识别性能比较,实验结果显示了各算法在 10 次不同实验数据下的均值。



图2 ORL人脸数据库部分人脸图像

表 2 不同数量训练样本集下 ORL 人脸数据库上识别率比较

number of training samples	Eigenface/%	Fisherface/%	D-LDA/%	Proposed method/%
3	83.25	88.25	91.78	92.24
4	90.50	91.25	94.58	95.16
5	93.00	95.50	96.46	97.25

根据文献 [10, 13, 14] 的研究可知, Fisherface 算法执行效率的高低一定程度上依赖于特征维数的使用数量。通过表 1 和 2 的实验数据可以看出,基于对称线性子空间的特征抽取方法的性能在不同人脸数据库下均优于其他代数特征抽取方法。

### 5 结束语

本文在 Fisher 鉴别准则下,提出了一种新的对称线性子空间的 LDA 特征抽取方法。与其他的经典方法相比,基于 PCA 思想的 Eigenface 得到的特征向量是有效重构数据的向量,但不是最有助于分类的特征向量。Fisherface 虽然采用了 PCA + LDA 的变换过程,但是该组合方法在变换过程中损失了有助于分类的鉴别信息。D-LDA 方法是一种简单有效的线性特征提取方法,该方法剔除了不含最有判别力信息的类间散布矩阵的零空间,但在实际应用中去除  $S_b$  零空间的同时往往间接丢失了  $S_b$  零空间中的有用信息。本文通过构造一种矩阵变换,得到了相对于  $S_b$  的另一个对称线性子空间,从而巧妙地解决了传统 Fisher 线性鉴别分析方法中的最终特征维数受类别数限制的问题。实验结果表明,该算法是一种解决小样本问题的有效方法,而如何充分利用对偶代数理论进一步增大有效鉴别特征的数量,这是后续的研究方向。

(上接第 1556 页)

标为帧的编号,纵坐标为对应的 PSNR 值。本文中给出了具有 mobile(码率限制较高比特 128 kbps)的视频序列 PSNR 图,如图 4 所示,即限定码率分别为 32 kbps、64 kbps 和 128 kbps 的典型视频。从图 4 中可以看出,改进算法的 PSNR 值波动相对较小,从而在视觉上不会感觉到明显的图像质量变化,这就保证了图像质量的平稳过渡,具有较高的主观视觉质量。

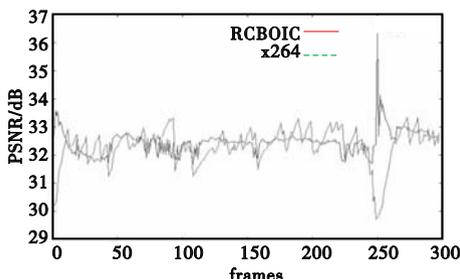


图4 Mobile序列每帧图像的PSNR值比较

### 5 结束语

本文设计并实现了基于 3G 和 H. 264 技术的无线实时监

### 参考文献:

- [1] FUKUNAGA K. Introduction to statistical pattern recognition [M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1990.
- [2] CHEN Li-fen, LIAO H Y M, LIN J C, et al. A new LDA-based face recognition system which can solve the small sample size problem [J]. Pattern Recognition, 2000, 33 (10): 1713-1726.
- [3] TIAN Q. Image classification by the Foley-Sammon transform [J]. Optical Engineering, 1986, 25(7): 834-839.
- [4] HONG Zi-quan, YANG Jing-yu. Optimal discriminant plane for a small number of samples and design method of classifier on the plane [J]. Pattern Recognition, 1991, 24(4): 317-324.
- [5] 洪子泉,杨静宇.用于图像识别的图像代数特征抽取[J].自动化学报,1992,18(2):232-238.
- [6] 王卫东,郑宇杰,杨静宇.采用虚拟训练样本优化正则化判别分析[J].计算机辅助设计与图形学学报,2006,18(9):1327-1331.
- [7] 王卫东,杨静宇.采用虚拟训练样本的二次判别分析方法[J].自动化学报,2008,34(4):400-407.
- [8] BELHUMEUR P N, HESPANHA J P, KRIEGMAN D J. Eigenfaces vs. fisherfaces: recognition using class specific linear projection [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7): 711-720.
- [9] YANG Jian, YANG Jing-yu. Why can LDA be performed in PCA transformed space [J]. Pattern Recognition, 2003, 36(2): 563-566.
- [10] YANG Jian, FRANGI A F, YANG Jing-yu, et al. KPCA plus LDA: a complete kernel Fisher discriminant framework for feature extraction and recognition [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(2): 230-244.
- [11] AT&T Laboratories Cambridge. ORL face database [EB/OL]. [2009-08-20]. http://www.camorl.co.uk/face/database.htm.
- [12] YU Hua, YANG Jie. A direct LDA algorithm for high-dimensional data-with application to face recognition [J]. Pattern Recognition, 2001, 34 (11):2067-2070.
- [13] LU Ju-wei, PLATANOTISM K N, VENETSANOPOULOS A N. Regularization studies of linear discriminant analysis in small sample size scenarios with application to face recognition [J]. Pattern Recognition Letters, 2005, 26(2): 181-191.
- [14] SONG Xiao-ning, ZHENG Yu-jie, WU Xiao-jun, et al. A complete fuzzy discriminant analysis approach for face recognition [J]. Applied Soft Computing, 2010, 10 (1):208-214.

控系统,并结合无线传输以及智能手机处理能力弱的特点,对 H. 264 标准中码率控制策略进行了优化。实验表明,在码率没有明显增加的情况下,图像 PSNR 值明显提高,从而较好地实现了码率控制效果。

### 参考文献:

- [1] 何浩,王玲,马文科.基于 H. 264 无线网络视频监控系统的的设计 [J]. 电视技术, 2008(10):212-216.
- [2] WIEGAND T, SCHWARZ H, JOCH A, et al. Rate-constrained coder control and comparison of video coding standards [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems for Video Technology, 2003, 13 (7): 688-703.
- [3] JVT-H017, Joint Video Team (JVT) of ISO/IEC MPEG & ITU-T VCEG document[S]. 2003.
- [4] JIANGM Q, LNGN. On enhancing H. 264 /AVC video rate control by PSNR-based frame complexity estimation [J]. IEEE Trans Consumer Electronics, 2005, 51(1):281-286.