

矩形域和三角域上有理 Bézier 曲面片相互转换的 Blossoming 方法

张铭丽, 陈效群, 冯玉瑜

(中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026)

摘要: 采用 Blossoming 方法, 讨论了有理 Bézier 矩形曲面片和三角曲面片之间的相互转换, 将一个 (m, n) 次有理 Bézier 矩形片转换为两个 $m+n$ 次有理 Bézier 三角片, 以及通过重新参数化将一个 n 次有理 Bézier 三角片转换为三个非退化 (n, n) 次有理 Bézier 矩形片, 得到相互转换的显式表达, 并给出了算法. 数值例子表明了 Blossoming 方法的有效性.

关键词: 有理 Bézier 矩形曲面片; 有理 Bézier 三角曲面片; Blossoming

中图分类号: TP391; O241.5 **文献标识码:** A

AMS Subject Classification (2000): Primary 41A10; Secondary 68U07

Conversion between rational rectangular and rational triangular Bézier patches by Blossoming method

ZHANG Ming-li, CHEN Xiao-qun, FENG Yu-yu

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: The conversion problem between rectangular and triangular rational Bézier patches was studied by means of the Blossoming method. A rectangular rational Bézier patch of degree (m, n) was converted into two triangular rational Bézier patches of degree $m+n$ and a triangular rational Bézier patch of degree n was converted into three rectangular rational Bézier patches of degree (n, n) through reparametrization. Explicit expressions and algorithms were obtained. Some numerical examples were provided to illustrate the efficiency of Blossoming method.

Key words: rational rectangular Bézier patch; rational triangular Bézier patch; Blossoming

0 引言

Bézier 和 B 样条曲线(面)在 CAD/CAM 等领域中有着广泛而重要的应用. 矩形片和三角片是 Bézier 曲面的两种主要表示形式, 但在同一 CAD 系统中, 常常仅包含某一种表达形式, 这就有必要从一

种形式转化为另一种形式. Bézier 矩形片与三角片之间的相互转换方法已有了不少工作. 例如文献[1,2]将 (m, n) 次矩形片转换为 $m+n$ 次的三角片, 文献[3]将 n 次的三角片表示为三个 (n, n) 次的矩形片. 文献[4]采用函数复合的方法, 实现了 Bézier 三角片与四边 Bézier 曲面片之间的相互转换.

研究 Bézier 和 B 样条曲线(面)有多种途径,例如递推公式、卷积、傅氏变换等都是研究它们的重要方法,每种方法都有各自的特点. 在 20 世纪 80 年代末,文献[5]给出了称之为 Blossoming 的新方法,它的基本思想可以追溯到代数几何中的极形式(polar form),这种方法成功地再建和拓广了单变量样条的理论,并使得相关的定理和算法更加简单和易于理解. 对于多元样条,借助于 Blossoming 方法进行研究也已取得了部分成果^[6,7],现仍处于不断发展之中.

本文采用 Blossoming 方法讨论了有理 Bézier 矩形片与三角片之间的相互转换,得到了相互转换的显式表达式.

1 Blossoming 及其简单性质

本节介绍 Blossoming 的定义和一些基本性质,这些可在文献[5,8,9]中发现. 设 E 为一向量空间, $\Pi_n(t)$ 为不超过 n 次的单变量多项式的全体.

定义 1.1 设 $p(t) \in \Pi_n(t)$ 为 $R \rightarrow E$ 的多项式,把 n 个变量的对称、仿射且满足对角性质的多项式 $B_n[p](u_1, \dots, u_n): R^n \rightarrow E$ 称为多项式 $p(t)$ 的 Blossoming.

人们可以定义多元多项式的 Blossoming^[5,9],由于本文是讨论三维空间中的曲面,因而只考虑两个变量多项式的 Blossoming,对 n 个变量多项式的 Blossoming 可用相同的思想来完成.

设 $\Pi_n(x), x = (x_1, x_2) \in R^2$ 为 $R^2 \rightarrow E$ 的总次数不超过 n 的两变量多项式全体,有如下定义:

定义 1.2 设 $p(x) \in \Pi_n(x), x \in R^2$, 将对称的、 n -仿射的且满足对角性质的多项式 $B_n[p](x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in R^2$ 称为两变量多项式 $p(x)$ 的 Blossoming.

定义 1.3 设 $p(s, t) \in \Pi_m(s) \times \Pi_n(t)$ 是 $R \times R \rightarrow E$ 的 (m, n) 次的两变量多项式,将双对称、多仿射且满足对角性质的多项式 $B_{(m,n)}[p](u_1, \dots, u_m; v_1, \dots, v_n)$ 称为 $p(s, t)$ 的 Blossoming.

值得注意的是,若二变量多项式

$$p(x) = x_1^m x_2^n \in \Pi_m(x_1) \times \Pi_n(x_2) \subset \Pi_{m+n}(x),$$

一般地, $B_{(m,n)}[p](u_1, \dots, u_m; v_1, \dots, v_n)$ 与 $B_{m+n}[p](x^{(1)}, \dots, x^{(m+n)})$ 并不相同.

多项式的 Blossoming 有很多优良的性质,在此不能一一列举. 有兴趣的读者可参阅文献[5,8,9]. 下面仅列出最基本的本文用到的一些性质:

性质 1.4 定义 1.1, 1.2, 1.3 中的多项式的 Blossoming $B_n[p](u_1, \dots, u_n), B_n[p](x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ 和 $B_{(m,n)}[p](u_1, \dots, u_m; v_1, \dots, v_n)$ 是唯一存在的.

性质 1.5 设定义在以 T_1, T_2, T_3 为顶点的三角形 $\Delta = \{uT_1 + vT_2 + wT_3, u, v, w \geq 0, u + v + w = 1\}$ 上的 Bézier 曲面为

$$T(u, v, w) = \sum_{r+s+t=n} Q_{rst} B_{rst}^n(u, v, w). \quad (1)$$

式中, $B_{rst}^n(u, v, w) = \frac{n!}{r! s! t!} u^r v^s w^t$ 为 Bernstein 基函数. 则 $B_n[T](x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ 的显式表达^[10]为

$$B_n[T](x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \prod_{k=1}^n (u^{(k)} E_1 + v^{(k)} E_2 + w^{(k)} E_3) Q_{000}. \quad (2)$$

式中, $x^{(k)} = u^{(k)} T_1 + v^{(k)} T_2 + w^{(k)} T_3, (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)})$ 是 $x^{(k)}$ 关于 Δ 的重心坐标, $E_i (i=1, 2, 3)$ 是平移算子, 定义为

$$E_1 Q_{ijk} = Q_{i+1, j, k}, E_2 Q_{ijk} = Q_{i, j+1, k}, E_3 Q_{ijk} = Q_{i, j, k+1}. \quad (3)$$

从式(2)容易得到对偶泛函性质:

$$Q_{ijk} = B_n[T](\underbrace{T_1, \dots, T_1}_r, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_s, \underbrace{T_3, \dots, T_3}_t). \quad (4)$$

性质 1.6 设定义在 $\Delta = [0, 1] \times [0, 1]$ 上的 Bézier 矩形片为

$$G(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

则有对偶泛函性质

$$B_{(m,n)}[G(u, v)](\underbrace{0, \dots, 0}_{m-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j}, \underbrace{1, \dots, 1}_j) = P_{ij}. \quad (5)$$

当 Δ 退化为 $[0, 1]$ 时, 对 Bézier 曲线 $C(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u)$, 有 $P_i = B_n[C](\underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})$, 从而得到

$$B_n[B_i^n(u)](\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}) = \delta_{ki}, \quad (6)$$

式中, $\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k=i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$

2 有理 Bézier 矩形片转化为有理 Bézier 三角片

2.1 理论推导

设定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的 (m, n) 次有理

Bézier 矩形片为

$$R(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} \omega_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)}. \quad (7)$$

式中, $\{P_{ij}\}$ 为控制顶点, $\{\omega_{ij}\}$ 为相应的权因子, $B_i^m(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i}$ 为 Bernstein 基函数. 将 $R(u, v)$ 限制在三角域 $\Delta_1 = \{(u, v) : u+v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$ 上, 它可以表示为 $m+n$ 次的有理 Bézier 三角片

$$T(u, v) = \frac{\sum_{r+s+t=m+n} Q_{rst} \omega_{rst} B_{rst}^{m+n}(u, v, \omega)}{\sum_{r+s+t=m+n} \omega_{rst} B_{rst}^{m+n}(u, v, \omega)}. \quad (8)$$

式中, $\{Q_{rst}\}$ 为控制顶点, $\{\omega_{rst}\}$ 为相应的权因子, $B_{rst}^{m+n}(u, v, \omega) = \binom{m+n}{rst} u^r v^s \omega^t$ 为 Bernstein 基函数, 且 $\binom{m+n}{rst} = \frac{(m+n)!}{r! s! t!}, u+v+\omega=1$.

从已给的矩形片到三角片的转换表示问题即从矩形片的控制顶点 $\{P_{ij}\}$ 和权因子 $\{\omega_{ij}\}$, 求得三角片的控制顶点 $\{Q_{rst}\}$ 和权因子 $\{\omega_{rst}\}$.

式(7)和式(8)可分别表示为齐次形式

$$\left. \begin{aligned} \hat{R}(u, v) &= \left. \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \hat{P}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \right\} \quad (9) \\ \hat{P}_{ij} &= \{P_{ij} \omega_{ij}, \omega_{ij}\}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{T}(u, v) &= \left. \sum_{r+s+t=m+n} \hat{Q}_{rst} B_{rst}^{m+n}(u, v, \omega), \right\} \quad (10) \\ \hat{Q}_{rst} &= \{Q_{rst} \omega_{rst}, \omega_{rst}\}. \end{aligned}$$

记 Δ_1 的三个顶点为 $T_1 = (1, 0), T_2 = (0, 1), T_3 = (0, 0)$, 由 Blossoming 的对偶泛函性质式(4)知

$$B_{m+n}[\hat{R}(u, v)](\underbrace{T_1, \dots, T_1}_r, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_s, \underbrace{T_3, \dots, T_3}_t) = \hat{Q}_{rst}.$$

因而为了求得表示式(10), 只要求出 $\hat{R}(u, v)$ 的 Blossoming 在相关点的值即可. 为此先证明两个引理.

引理 2.1 设 $f \in \Pi_m(R), g \in \Pi_n(R)$ 为单变量多项式, 则它们乘积的 Blossoming 为

$$B_{m+n}[f \cdot g](u_1, \dots, u_{m+n}) = \sum_{\sigma_1} \frac{B_m[f](u_{i_1}, \dots, u_{i_m}) B_n[g](u_{i_{m+1}}, \dots, u_{i_{m+n}})}{\binom{m+n}{m}},$$

式中,

$\sigma_1 =$

$$\left\{ \begin{aligned} & i_1 < \dots < i_m \in (1, \dots, m+n) \\ & \{i_{m+1} < \dots < i_{m+n} \in \{(1, \dots, m+n) \setminus (i_1, \dots, i_m)\}\} \end{aligned} \right\}.$$

证明 因为等式的右边关于 u_1, \dots, u_{m+n} 是对称的、多仿射的函数, 且有对角线性性质, 即当 $u_i = x (i=1, \dots, m+n)$ 时, $B_m[f](x, \dots, x) = f(x), B_n[g](x, \dots, x) = g(x)$. 因而右边 $= f(x)g(x) =$ 左边, 由 Blossoming 的唯一性知, 上面等式成立. \square

引理 2.2 设 $f(u) \cdot g(v) \in \Pi_m \times \Pi_n \subset \Pi_{m+n}(u, v), \deg f=r \leq m, \deg g=s \leq n, r+s \leq m+n$, 则它们乘积的 Blossoming 为

$$B_{m+n}[f \cdot g]((u_1, v_1), \dots, (u_{m+n}, v_{m+n})) = \sum_{\sigma_2} \frac{B_r[f](u_{i_1}, \dots, u_{i_r}) B_s[g](v_{i_{r+1}}, \dots, v_{i_{r+s}})}{\binom{m+n}{r} \binom{m+n-r}{s}}, \quad (11)$$

式中,

$\sigma_2 =$

$$\left\{ \begin{aligned} & i_1 < \dots < i_r \in (1, 2, \dots, m+n) \\ & \{i_{r+1} < \dots < i_{r+s} \in \{(1, \dots, m+n) \setminus (i_1, \dots, i_r)\}\} \end{aligned} \right\}.$$

特别地, 当 $r=m, s=n$ 时, 有

$$B_{m+n}[f \cdot g]((u_1, v_1), \dots, (u_{m+n}, v_{m+n})) = \sum_{\sigma_1} \frac{B_m[f](u_{i_1}, \dots, u_{i_m}) B_n[g](v_{i_{m+1}}, \dots, v_{i_{m+n}})}{\binom{m+n}{m}}. \quad (12)$$

证明 由 f, g 的 Blossoming $B_r[f], B_s[g]$ 的多仿射性、对称性和对角线的性质, 可知等式的右边关于 $(u_1, v_1), \dots, (u_{m+n}, v_{m+n})$ 是对称的、多仿射的函数, 且有对角线性性质, 即当 $(u_i, v_i) = (u, v) (i=1, \dots, m+n)$ 时, 右边 $= f(u)g(v) =$ 左边. 由 Blossoming 的唯一性知, 上面等式成立. 当 $r=m, s=n$ 时, 由式(11), 式(12)显然成立. \square

定理 2.3 有理 Bézier 矩形片 $\hat{R}(u, v)$ 限制在三角形 Δ_1 上的有理 Bézier 三角片的显式表达为

$$\hat{T}(u, v) = \sum_{r+s+t=m+n} \hat{Q}_{rst} B_{rst}^{m+n}(u, v, \omega),$$

式中,

$$\hat{Q}_{rst} = \sum_{i=0}^{\min(m,r)} \sum_{j=\max(0, s+i-m)}^{\min(s, n-r+i)} \hat{P}_{ij} \frac{\binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{n-j-r+i}}{\binom{m+n}{m}}.$$

证明 因为

$$\hat{Q}_{rst} = B_{m+n}[\hat{R}(u, v)](\underbrace{T_1, \dots, T_1}_r, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_s, \underbrace{T_3, \dots, T_3}_t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \hat{P}_{ij} B_{m+n}[B_i^m(u) B_j^n(v)](\underbrace{T_1, \dots, T_1}_r, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_s, \underbrace{T_3, \dots, T_3}_t),$$

式中, $T_1 = (1, 0), T_2 = (0, 1), T_3 = (0, 0)$, 由引理 2.2 中式(12)可得

$$\hat{Q}_{rst} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left\{ \hat{P}_{ij} \cdot \sum_{\sigma_1} \frac{1}{\binom{m+n}{m}} B_m[B_i^m(u)](u_{i_1}, \dots, u_{i_m}) \cdot B_n[B_j^n(v)](v_{i_{m+1}}, \dots, v_{i_{m+n}}) \right\}. \quad (13)$$

由于 $T_i (i=1, 2, 3)$ 的坐标仅为 0 和 1, 所以式(13)中的 $u_{i_1}, \dots, u_{i_m}, v_{i_{m+1}}, \dots, v_{i_{m+n}}$ 仅取值 0 或 1. 又根据式(6), 可得式(13)中当且仅当 u_{i_1}, \dots, u_{i_m} 中有 i 个 1, $m-i$ 个 0, 且 $v_{i_{m+1}}, \dots, v_{i_{m+n}}$ 中有 j 个 1, $n-j$ 个 0 时, 对求和有贡献, 并且满足 σ_1 的取法. 因此

$$\sum_{\sigma_1} \left\{ B_m[B_i^m(u)](u_{i_1}, \dots, u_{i_m}) \cdot B_n[B_j^n(v)](v_{i_{m+1}}, \dots, v_{i_{m+n}}) \right\} = \binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{n-j-r+i}.$$

且由于

$$\begin{aligned} n-j \geq r-i &\Rightarrow j \leq n-(r-i), \\ m-i \geq s-j &\Rightarrow j \geq s-(m-i), \\ j \leq s, j \geq 0, i \leq m, i \leq r. \end{aligned}$$

从而

$$\hat{Q}_{rst} = \sum_{i=0}^{\min(m,r)} \sum_{j=\max(0,s+i-m)}^{\min(s,n-r+i)} \hat{P}_{ij} \frac{\binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{n-j-r+i}}{\binom{m+n}{m}}. \quad (14)$$

这就得到了 Q_{rst} 和 ω_{rst} 用 $\{P_{ij}\}$ 和 $\{\omega_{ij}\}$ 表达的显式表示. \square

特别地, 当 $\omega_{ij} = 1$ 时, 利用组合恒等式

$$\sum_{j=0}^k \binom{s}{j} \binom{N-s}{k-j} = \binom{N}{k} \quad (15)$$

和 $r+s+t = m+n$, 并约定当 $j < 0$ 或 $N < j$ 时,

$\binom{N}{j} = 0$, 由式(14)得到

$$\omega_{rst} = \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \sum_{i=0}^m \binom{r}{i} \sum_{j=0}^{n-r+i} \binom{s}{j} \binom{m+n-r-s}{n-r+i-j} = \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \sum_{j=0}^m \binom{r}{j} \binom{m+n-r}{m-j} = \frac{\binom{m+n}{m}}{\binom{m+n}{m}} = 1.$$

因此我们得到了矩形域上多项式 Bézier 曲面片转换为三角域上多项式 Bézier 曲面片的表达式. 叙述为如下的推论:

推论 2.4 设定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上 (m, n) 次的多项式曲面片为

$$R(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

则它在三角域 Δ_1 上可表示为 $m+n$ 次多项式 Bézier 三角曲面片

$$T(u, v, w) = \sum_{r+s+t=m+n} Q_{rst} B_{rst}^{m+n}(u, v, w),$$

式中,

$$Q_{rst} = \sum_{i=0}^{\min(m,r)} \sum_{j=\max(0,s+i-m)}^{\min(s,n-r+i)} P_{ij} \frac{\binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{n-j-r+i}}{\binom{m+n}{m}}. \quad \square$$

同理我们可以得到该有理 Bézier 矩形片限制在三角域 $\Delta_2 = \{(u, v) : u+v \geq 1, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ 上的有理 Bézier 三角片的显式表达

$$\hat{Q}_{rst} = \sum_{i=0}^{\min(m,r)} \sum_{j=\max(0,s+i-m)}^{\min(s,n-r+i)} \hat{P}_{m-i,n-j} \frac{\binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{n-j-r+i}}{\binom{m+n}{m}}. \quad (16)$$

2.2 算法

计算 $\hat{Q}_{rst} (r+s+t=m+n)$.

输入: $\{\hat{P}_{ij}\}$,

输出: $\{\hat{Q}_{rst}\}$,

for $t := m+n$ to 0 do

 for $s := 0$ to $m+n$ do

$r := m+n-s-t$

 if $r \geq 0$ then $\hat{Q}_{rst}^{(0,0)} = \{0, 0, 0, 0\}$

```

for  $i := 0$  to  $\min(m, r)$  do
  for  $j := \max(0, s+i-m)$  to
     $\min(s, n-r+i)$  do
 $\hat{Q}_{st}^{(i+1)(j+1)} = \hat{Q}_{st}^{(i)(j)} +$ 
 $\hat{P}_{ij} \frac{\binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{n-j-r+i}}{\binom{m+n}{m}}$ 
  endfor
endfor

```

```

endfor
 $\hat{Q}_{st} = \hat{Q}_{st}^{(\min(m, r)+1)(\min(s, n-r+i)+1)}$ 
endfor
endfor

```

由上面算法可得所求曲面片的控制顶点和权： $\{\hat{Q}_{rst}, \omega_{rst}\}$ 。

3 有理 Bézier 三角片转换为有理 Bézier 矩形片

3.1 理论推导

设定义在以 T_1, T_2, T_3 为顶点的三角域 $D = \{(u, v) : u, v \geq 0, u+v \leq 1\}$ 上的 n 次有理 Bézier 三角片及其齐次化表示为

$$T(u, v, w) = \frac{\sum_{r+s+t=n} Q_{rst} \omega_{rst} B_{rst}^n(u, v, w)}{\sum_{r+s+t=n} \omega_{rst} B_{rst}^n(u, v, w)}, \quad (17)$$

$$u + v + w = 1;$$

$$\hat{T}(u, v, w) = \sum_{r+s+t=n} \hat{Q}_{rst} B_{rst}^n(u, v, w), \quad (18)$$

$$\hat{Q}_{rst} = \{Q_{rst} \omega_{rst}, \omega_{rst}\}.$$

三角域 D 可分为 3 个四边形 D_1, D_2, D_3 , 如图 1 所示, 其中, $p_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 的重心坐标分别为 $p_1(0, 0), p_2(b, 0), p_3(a, c), p_4(0, d), p_5(e, f)$. 它们可用顶点 $T_i (i=1, 2, 3)$ 表示为

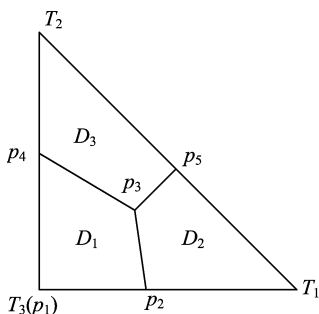


图 1 定义域的分割

Fig. 1 The domain partition

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= T_3, \\ p_2 &= (1-b)T_3 + bT_1, \\ p_3 &= (1-a-c)T_3 + aT_1 + cT_2, \\ p_4 &= (1-d)T_3 + dT_2, \\ p_5 &= eT_1 + fT_2. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

定义双线性映射

$$L: H = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D_1,$$

$$L(s, t) = (1-s)(1-t)p_1 + s(1-t)p_2 + stp_3 + (1-s)tp_4 \in D_1. \quad (20)$$

如图 2 所示, 对任意 $(s, t) \in H$, 重新参数化后, 有理 Bézier 三角片 $\hat{T}(u, v, w)$ 限制在四边形 D_1 上, 可表示为

$\hat{T}(u, v, w) = \hat{T} \circ L(s, t) \triangleq \hat{R}(s, t) \in \Pi_n \times \Pi_n$, 因而在 H 上表示成有理 Bézier 矩形片的齐次化形式为

$$\hat{R}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \hat{P}_{ij} \omega_{ij} B_i^n(s) B_j^n(t),$$

$$\hat{P}_{ij} = \{P_{ij} \omega_{ij}, \omega_{ij}\}.$$

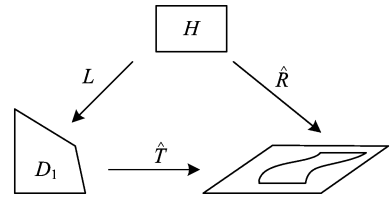


图 2 映射关系

Fig. 2 The mappings

下面用 Blossoming 方法求得控制顶点 $\{P_{ij}\}$ 和权 $\{\omega_{ij}\}$, 即用已知的控制顶点 $\{Q_{rst}\}$ 和权 $\{\omega_{rst}\}$ 表示, 这将在定理 3.2 中给出, 为此先证明一个引理。

引理 3.1 设 $f \in \Pi_n(R^2), g \in \Pi_1(R) \times \Pi_1(R)$, 则有

$$B_{(n,n)}[f \circ g](u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n) = \sum_{\tau} \frac{B_n[f](B_{(1,1)}[g](u_{\tau(1)}, v_1), \dots, B_{(1,1)}[g](u_{\tau(n)}, v_n))}{n!}, \quad (21)$$

式中, τ 是 $1, \dots, n$ 的置换排列。

证明 由 f, g 的 Blossoming $B_n[f], B_{(1,1)}[g]$ 的对称性、多仿射性和对角线性质, 可知等式右边关于 $u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n$ 是双对称、多仿射的函数, 且有对角线性质, 即当 $u_i = u, v_i = v (i=1, \dots, n)$ 时, 有右边 $= f \circ g(u, v) =$ 左边, 由 Blossoming 的唯一性知, 上面等式成立。□

定理 3.2 有理 Bézier 三角片 $\hat{T}(u, v, \omega)$ 限制在 D_1 上, 表示为矩形域 H 上的有理 Bézier 矩形片的显式表达为

$$\hat{R}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \hat{P}_{ij} B_i^n(s) B_j^n(t), \quad 0 \leq s, t \leq 1.$$

式中,

$$\hat{P}_{ij} = \sum_{k=0}^i \left\{ \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} \cdot (aE_1 + cE_2 + (1-a-c)E_3)^k (bE_1 + (1-b)E_3)^{i-k} \cdot (dE_2 + (1-d)E_3)^{j-k} E_3^{n-i-j+k} \hat{Q}_{000} \right\}.$$

证明 由式(20)可得 $L(0, 0) = p_1, L(1, 0) =$

$p_2, L(1, 1) = p_3, L(0, 1) = p_4$. 由对偶泛函性质(5)知

$$\hat{P}_{ij} = B_{(n,n)}[\hat{R}(s, t)](\underbrace{0, \dots, 0}_{n-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i; \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j}, \underbrace{1, \dots, 1}_j).$$

由引理 3.1 知

$$\hat{P}_{ij} = \sum_{\tau} \frac{1}{n!} (B_n[\hat{T}(u, v, \omega)] \cdot (B_{(1,1)}[L](u_{\tau(1)}, v_1), \dots, B_{(1,1)}[L](u_{\tau(n)}, v_n))).$$

上式共有 $n!$ 项求和, 由于 u_i, v_j 只能取 0 或 1, 以及 $B_n[\hat{T}]$ 的对称性, 并约定当 $l < 0$ 或 $m < l$ 时, $\binom{m}{l} = 0$, 因而把值相同的项合并后, 可得到

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ij} &= \sum_{k=0}^i \left\{ \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} B_n[\hat{T}(u, v, \omega)] (\underbrace{L(0, 0), \dots, L(0, 0)}_{n-i-j+k}, \underbrace{L(1, 0), \dots, L(1, 0)}_{i-k}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{L(1, 1), \dots, L(1, 1)}_k, \underbrace{L(0, 1), \dots, L(0, 1)}_{j-k}) \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^i \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} B_n[\hat{T}(u, v, \omega)] (\underbrace{p_1, \dots, p_1}_{n-i-j+k}, \underbrace{p_2, \dots, p_2}_{i-k}, \underbrace{p_3, \dots, p_3}_k, \underbrace{p_4, \dots, p_4}_{j-k}). \end{aligned} \quad (22)$$

利用 p_i 与 T_j 的关系式(19), 以及三角域上对偶基的显式表示式(2)得到

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ij} &= \sum_{k=0}^i \left\{ \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} B_n[\hat{T}(u, v, \omega)] (\underbrace{T_3, \dots, T_3}_{n-i-j+k}, \underbrace{bT_1 + (1-b)T_3, \dots, bT_1 + (1-b)T_3}_{i-k}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{aT_1 + cT_2 + (1-a-c)T_3, \dots, aT_1 + cT_2 + (1-a-c)T_3}_k, \underbrace{dT_2 + (1-d)T_3, \dots, dT_2 + (1-d)T_3}_{j-k}) \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^i \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} (aE_1 + cE_2 + (1-a-c)E_3)^k (bE_1 + (1-b)E_3)^{i-k} (dE_2 + (1-d)E_3)^{j-k} E_3^{n-i-j+k} \hat{Q}_{000}. \end{aligned} \quad (23)$$

式中, $E_i (i=1, 2, 3)$ 为式(3)所定义的平移算子. 这就得到了 P_{ij} 和 ω_{ij} 用 $\{Q_{rst}\}$ 和 $\{\omega_{rst}\} (r+s+t=n)$ 表达的显式表示. \square

特别地, 当 $\omega_{rst} = 1 (r+s+t=n)$ 时, 由式(15)和式(23), 可得 $\omega_{ij} = 1 (i=0, \dots, n; j=0, \dots, n)$. 这就得到了多项式 Bézier 三角片转换为多项式 Bézier

矩形片的表达式. 叙述为如下推论:

推论 3.3 设定义在 D 上的多项式 Bézier 三角片为

$$T(u, v, \omega) = \sum_{r+s+t=n} Q_{rst} B_{rst}^n(u, v, \omega),$$

将它限制在 D_1 上表示成定义在 H 上的多项式 Bézier 矩形片为

$$R(s,t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n P_{ij} B_i^n(s) B_j^n(t),$$

式中,

$$P_{ij} = \sum_{k=0}^i \left\{ \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} \right\} \cdot$$

$$(aE_1 + cE_2 + (1-a-c)E_3)^k (bE_1 + (1-b)E_3)^{i-k} \cdot (dE_2 + (1-d)E_3)^{j-k} E_3^{n-i-j+k} \hat{Q}_{000} \Big\}. \quad \square$$

特别当 $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ 时, D_1 成为矩形域

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

这时有如下推论:

推论 3.4 定义在 D 上的有理 Bézier 三角片, 如式(17)和式(18)所示, 将其限制在矩形域 $D_1 =$

$\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的有理 Bézier 矩形片为

$$\hat{R}(s,t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \hat{P}_{ij} B_i^n(s) B_j^n(t),$$

式中,

$$\hat{P}_{ij} = \sum_{k=0}^i \left\{ \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} \frac{1}{2^{i+j-k}} (E_1 + E_2)^k \cdot$$

$$(E_1 + E_3)^{i-k} (E_2 + E_3)^{j-k} E_3^{n-i-j+k} \hat{Q}_{000} \Big\}. \quad \square$$

当有理 Bézier 三角片 $\hat{T}(u, v, w)$ 限制在 D_2 和 D_3 上时, 与定理 3.2 的证明类似, 我们可分别得出它们表示为矩形域上有理 Bézier 矩形片的显式表达 $\hat{R}(s,t)$, 其中, \hat{P}_{ij} 分别为

$$\hat{P}_{ij, D_2} = \sum_{k=0}^i \left\{ \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} (eE_1 + fE_2)^k \cdot$$

$$(bE_1 + (1-b)E_3)^{n-i-j+k} \cdot$$

$$(aE_1 + cE_2 + (1-a-c)E_3)^{j-k} E_1^{i-k} \hat{Q}_{000} \Big\}. \quad (24)$$

$$\hat{P}_{ij, D_3} = \sum_{k=0}^i \left\{ \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} (eE_1 + fE_2)^k \cdot$$

$$(dE_2 + (1-d)E_3)^{n-i-j+k} \cdot$$

$$(aE_1 + cE_2 + (1-a-c)E_3)^{i-k} E_2^{j-k} \hat{Q}_{000} \Big\}. \quad (25)$$

3.2 算法

为了给出转换算法, 首先介绍一下定义在三角域 $T_1 T_2 T_3$ 上的有理 Bézier 曲面片的 Blossoming 算法. 记

$$\hat{Q}_{rst} = B_{rst}^0 = B_n[\hat{T}(u, v, w)](\underbrace{T_1, \dots, T_1}_r, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_s, \underbrace{T_3, \dots, T_3}_t) (r+s+t=n).$$

有理三角域 Bézier 曲面的 Blossoming 算法表示为

$$B_{ijk}^d(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) = u^{(d)} B_{i+1, jk}^{d-1}(x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}) + v^{(d)} B_{ij+1, k}^{d-1}(x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}) + w^{(d)} B_{ijk+1}^{d-1}(x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}),$$

式中, $i+j+k = n-d, d=1, \dots, n; (u^{(d)}, v^{(d)}, w^{(d)})$ 是 $x^{(d)}$ 的重心坐标, $B_{ijk}^d(x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$ 是 $B_{ijk}^d(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}, \underbrace{T_1, \dots, T_1}_i, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_j, \underbrace{T_3, \dots, T_3}_k)$ 的简记. 从而有

$$B_n[\hat{T}(u, v, w)](x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = B_{000}^n(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}). \quad (26)$$

例如, 当 $d=2$ 时 Blossoming 算法如图 3 所示.

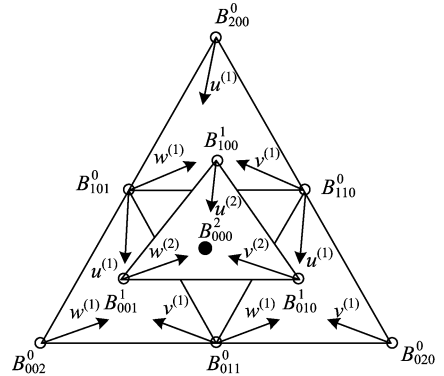


图 3 $d=2$ 时 Blossoming 算法图示

Fig. 3 The Blossoming algorithm with $d=2$

下面给出转换算法, 由定理 3.2 中式(22)知

$$\hat{P}_{ij} = \sum_{k=0}^i \frac{\binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} \hat{Q}_{k, j-k}^{(i)},$$

式中,

$$\hat{Q}_{k, j-k}^{(i)} = B_n[\hat{T}(u, v, w)](\underbrace{p_1, \dots, p_1}_{n-i-j+k}, \underbrace{p_2, \dots, p_2}_{i-k}, \underbrace{p_3, \dots, p_3}_k, \underbrace{p_4, \dots, p_4}_{j-k}).$$

转换算法: (I) 计算 $\hat{Q}_{k, j-k}^{(i)}$ ($0 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq i$,

$k \leq j \leq n-i+k$, 不妨记 $j-k=l$, 即计算 $\hat{Q}_{k,l}^{(i)}$ ($0 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq i, 0 \leq l \leq n-i$).

输入: $p_i (i=1, \dots, 4)$,

输出: $\{\hat{Q}_{k,j-k}^{(i)}\}$,

for $i := 0$ to n do

for $k := 0$ to i do

for $l := 0$ to $n-i$ do

由式(26), 可计算出 $\hat{Q}_{k,l}^{(i)} =$

$$B_n[\hat{T}(u, v, w)] (\underbrace{p_1, \dots, p_1}_{n-i-l}, \underbrace{p_2, \dots, p_2}_{i-k}, \underbrace{p_3, \dots, p_3}_k, \underbrace{p_4, \dots, p_4}_l).$$

endfor

endfor

endfor

(II) 计算 \hat{P}_{ij} ($0 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq n$), 见文献[3],

由于

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} A_k = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} A_k + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} A_{k+1},$$

所以

$$\hat{P}_{ij} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{\binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} \hat{Q}_{k,j-k}^{(i)} =$$

$$\sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} \frac{\binom{n-i}{j-k}}{\binom{n}{j}} \hat{Q}_{k,j-k}^{(i)} +$$

$$\sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} \frac{\binom{n-i}{j-(k+1)}}{\binom{n}{j}} \hat{Q}_{k+1,j-(k+1)}^{(i)} =$$

$$\frac{n-j}{n} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} \frac{\binom{n-i}{j-k}}{\binom{n-1}{j}} \hat{Q}_{k,j-k}^{(i)} +$$

$$\frac{j}{n} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} \frac{\binom{n-i}{j-(k+1)}}{\binom{n-1}{j-1}} \hat{Q}_{k+1,j-(k+1)}^{(i)}.$$

计算上式的算法为

输入: $\{\hat{Q}_{k,j-k}^{(i)}\}$,

输出: $\{\hat{P}_{ij}\}$,

for $i := 0$ to n do

for $j := 0$ to n do

for $k := 0$ to i do

$$\hat{f}_{k,j-k}^{(0)} := \hat{Q}_{k,j-k}^{(i)}$$

endfor

if $i \geq 1$ then

for $r := 1$ to i do

for $k := 0$ to $i-r$ do

$$\hat{f}_{k,j-k}^{(r)} := \frac{n-i+r-(j-k)}{n-i+r} \hat{f}_{k,j-k}^{(r-1)} + \frac{j-k}{n-i+r} \hat{f}_{k+1,j-(k+1)}^{(r-1)}$$

endfor

endfor

$$\hat{P}_{ij} = \hat{f}_{0j}^{(i)}$$

endfor

endfor

由上面算法可得所求曲面片的控制顶点和权:

$\{P_{ij}, \omega_{ij}\}$.

4 例子

本节给出了有理 Bézier 矩形片和有理 Bézier 三角片相互转换的例子. 为了更清楚的看出控制顶点所占的权重, 我们已将所求曲面片的权规范化. 即满足:

$$\sum_{r+s+t=m+n} \omega_{rst} = 1, \quad \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{ij} = 1.$$

4.1 有理 Bézier 矩形片转换为两个有理 Bézier 三角片

图 4(a) 是一个双 2 次的有理 Bézier 矩形片, 该矩形片控制顶点 $\{P_{ij}\}$ 和权 $\{\omega_{ij}\}$ 为

$$\begin{pmatrix} P_{00} & \omega_{00} \\ P_{01} & \omega_{01} \\ P_{11} & \omega_{11} \\ P_{10} & \omega_{10} \\ P_{02} & \omega_{02} \\ P_{12} & \omega_{12} \\ P_{22} & \omega_{22} \\ P_{21} & \omega_{21} \\ P_{20} & \omega_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0.07 \\ 0 & 1 & 2 & 0.03 \\ 1 & 1 & 4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 2 & 0.1 \\ 0 & 2 & -2 & 0.04 \\ 1 & 2 & 3 & 0.3 \\ 2 & 2 & 0 & 0.05 \\ 2 & 1 & 2 & 0.1 \\ 2 & 0 & 1 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

下面将该曲面片表示成两个 4 次的有理 Bézier 三角片. 当限制在 Δ_1 上时, 由式(14) 得到有理 Bézier 三角片的控制顶点 $\{Q_{rst}\}$ 和权 $\{\omega_{rst}\}$ 为

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{004} \\ \bar{Q}_{103} \\ \bar{Q}_{013} \\ \bar{Q}_{202} \\ \bar{Q}_{112} \\ \bar{Q}_{222} \\ \bar{Q}_{301} \\ \bar{Q}_{211} \\ \bar{Q}_{121} \\ \bar{Q}_{031} \\ \bar{Q}_{400} \\ \bar{Q}_{310} \\ \bar{Q}_{220} \\ \bar{Q}_{130} \\ \bar{Q}_{040} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000\ 00 & 0.000\ 00 & -1.000\ 00 & 0.049\ 07 \\ 0.588\ 24 & 0.000\ 00 & 0.764\ 71 & 0.059\ 58 \\ 0.000\ 00 & 0.300\ 00 & -0.100\ 00 & 0.035\ 05 \\ 0.875\ 00 & 0.000\ 00 & 1.541\ 67 & 0.056\ 07 \\ 0.804\ 60 & 0.724\ 14 & 2.896\ 55 & 0.101\ 64 \\ 0.000\ 00 & 0.869\ 57 & 0.391\ 30 & 0.026\ 87 \\ 1.090\ 91 & 0.000\ 00 & 1.909\ 09 & 0.038\ 55 \\ 1.030\ 93 & 0.721\ 65 & 3.020\ 62 & 0.113\ 32 \\ 0.873\ 79 & 1.223\ 30 & 3.252\ 43 & 0.120\ 33 \\ 0.000\ 00 & 1.571\ 43 & -0.285\ 71 & 0.024\ 53 \\ 2.000\ 00 & 0.000\ 00 & 1.000\ 00 & 0.007\ 01 \\ 1.500\ 00 & 0.500\ 00 & 2.000\ 00 & 0.070\ 09 \\ 0.984\ 85 & 0.984\ 85 & 3.583\ 33 & 0.154\ 21 \\ 0.909\ 09 & 1.909\ 09 & 2.909\ 09 & 0.115\ 65 \\ 0.000\ 00 & 2.000\ 00 & -2.000\ 00 & 0.028\ 04 \end{pmatrix}.$$

式中, $\bar{Q}_{rst} = \{Q_{rst}, \omega_{rst}\}$.

当限制在 Δ_2 上, 由式(16)得到有理 Bézier 三角片的控制顶点 $\{Q_{rst}\}$ 和权 $\{\omega_{rst}\}$, 在此省略了. 得到的两个有理三角片的图形如图 4(b) 所示.

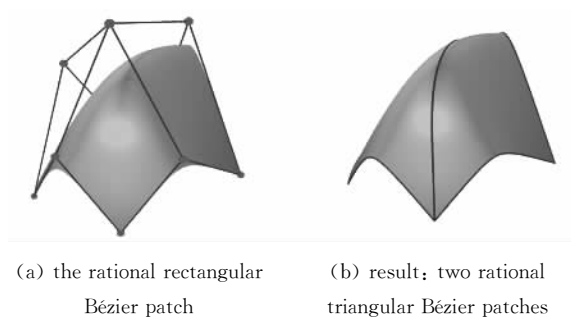


图 4 一个有理 Bézier 矩形片转换为两个有理 Bézier 三角片
Fig. 4 The conversion from a rational rectangular Bézier patch into two rational triangular Bézier patches

4.2 有理 Bézier 三角片转换为三个有理 Bézier 矩形片

图 5(a) 是一个 2 次的有理 Bézier 三角片, 该三角片的控制顶点 $\{Q_{rst}\}$ 和权 $\{\omega_{rst}\}$ 为

$$\begin{pmatrix} Q_{002} & \omega_{002} \\ Q_{101} & \omega_{101} \\ Q_{011} & \omega_{011} \\ Q_{200} & \omega_{200} \\ Q_{110} & \omega_{110} \\ Q_{020} & \omega_{020} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0.07 \\ 1.5 & 1 & 1 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 2 & 0.4 \\ 1 & 2 & -2 & 0.04 \\ 0.5 & 1 & 3 & 0.09 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix},$$

重新参数化并取 $a=c=0.3, b=d=e=f=0.5$, 下面将其表示成三个双 2 次的有理 Bézier 矩形片. 当

限制在 D_1 上时, 由式(23)得到有理 Bézier 矩形片的控制顶点 $\{P_{ij}\}$ 和权 $\{\omega_{ij}\}$ 为

$$\begin{pmatrix} \bar{P}_{00} \\ \bar{P}_{01} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{02} \\ \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{22} \\ \bar{P}_{21} \\ \bar{P}_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000\ 00 & 0.000\ 00 & -1.000\ 00 & 0.043\ 26 \\ 0.723\ 40 & 0.000\ 00 & 1.553\ 19 & 0.145\ 24 \\ 0.947\ 86 & 0.332\ 91 & 1.437\ 19 & 0.122\ 99 \\ 1.629\ 63 & 0.740\ 74 & 0.481\ 48 & 0.083\ 44 \\ 0.504\ 67 & 0.000\ 00 & 1.429\ 91 & 0.165\ 33 \\ 0.658\ 24 & 0.191\ 21 & 1.479\ 12 & 0.140\ 61 \\ 0.798\ 45 & 0.369\ 95 & 1.400\ 00 & 0.119\ 28 \\ 1.074\ 92 & 0.584\ 10 & 1.250\ 76 & 0.101\ 05 \\ 1.529\ 41 & 0.941\ 18 & 0.490\ 20 & 0.078\ 80 \end{pmatrix},$$

式中, $\bar{P}_{ij} = \{P_{ij}, \omega_{ij}\}$.

当限制在 D_2 和 D_3 上时, 分别由式(24)和式(25)得到有理 Bézier 矩形片的控制顶点 $\{P_{ij}\}$ 和权 $\{\omega_{ij}\}$, 在此省略了. 得到的三个有理矩形片的图形如图 5(b) 所示.

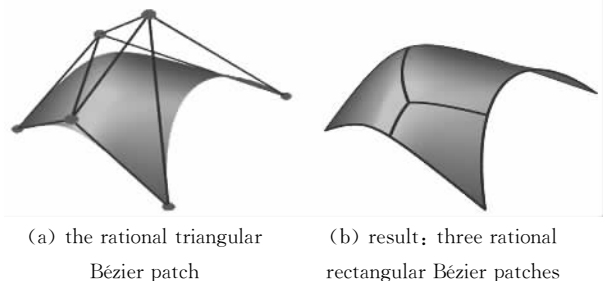


图 5 一个有理 Bézier 三角片转换为三个有理 Bézier 矩形片
Fig. 5 The conversion from a rational triangular Bézier patch into three rational rectangular Bézier patches

5 结论

本文利用 Blossoming 方法以及重新参数化得到了有理 Bézier 矩形片和 Bézier 三角片之间相互转化的显式表达和算法, 并给出了转换的例子, 表明了方法和算法是有效的. Blossoming 方法是曲面(曲线)造型中一种较新颖的方法, 还可以应用于曲面造型的其他领域中, 诸如曲面变形、曲面拼接等.

参考文献(References)

[1] Goldman R, Filip D. Conversion from Bézier rectangles to Bézier triangles[J]. Computer Aided Design, 1987, 19(1):25-27.
[2] CAO Yu-xiu, SUN Yan-kui, TANG Long, et al. Triangular Bézier surface algorithms[J]. Journal of Tsinghua University(Science and Technology), 2001, 41(7):83-85. (下转第 162 页)