

## 轴对称功能梯度圆板稳态热传导的精确解

刘五祥

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

**摘要:** 对轴对称功能梯度圆板稳态热传导问题进行精确分析. 根据正交各向异性功能梯度圆板稳态热传导的基本方程, 假设材料热传导率沿板厚方向按指数函数形式梯度分布, 利用分离变量法, 获得了在上、下表面作用任意热载荷情况下的精确解. 通过数值算例, 分析了材料性质的梯度变化和板厚对温度场分布的影响. 所获得的精确结果, 可以作为评价其它近似方法的标准解答.

**关键词:** 功能梯度圆板; 稳态热传导; 分离变量法; 精确解  
**中图分类号:** TB 330.1 **文献标识码:** A

### Exact Solution of Steady-state Heat Conduction for Axisymmetric Functionally Graded Circular Plate

LIU Wuxiang

(College of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** An exact analysis of steady-state heat conduction was presented for the axisymmetric functionally graded circular plate. Based on the basic equation of heat conduction of an orthotropic functionally graded circular plate and the assumption that the heat conductivity had the exponential dependence on the plate-thickness direction, an exact solution was obtained for the axisymmetric functionally graded circular plate subjected to arbitrary thermal loads on its upper and lower surfaces with variable separation method. With the variation of material graded distributions and plate-thickness, the influence of the temperature field distributions of the circular plate was studied through a numerical example. The obtained exact solution can serve as a benchmark result to assess other approximate methodologies.

**Key words:** functionally graded circular plate; steady-state heat conduction; variable separation method; exact solution

功能梯度材料(functionally graded materials, FGMs)是一种多相材料,能够充分发挥陶瓷耐高温、抗腐蚀和金属强度高、韧性好的特点,还能很好地解决金属和陶瓷强行匹配而引起的粘结强度低和热膨胀系数不协调等问题. 由于这些优点,它在航空航天、核反应堆、内燃机和燃气机等领域中有着十分广阔的应用前景. 因此,梯度材料的热分析已成为梯度材料设计的重要课题. 从事该领域研究的学者也越来越多. Marin<sup>[1]</sup>研究了二维功能梯度材料稳态热传导问题的数值解; Noda 和 Ohmichi<sup>[2]</sup>对具有倾斜边界的功能梯度板进行了二维热传导研究; Sladek<sup>[3]</sup>采用无网格局部边界积分方程法对非均匀体进行了热传导分析; Wang 等人<sup>[4]</sup>采用三维格林函数,对功能梯度半空间和相关问题具有稳定点热源的情况进行了研究; 田云德等人<sup>[5-6]</sup>在考虑变物性的情况下,采用数值方法对功能梯度材料的稳定热传导进行了分析; Jabbari 等人<sup>[7]</sup>得到了轴对称稳态荷载作用下,功能梯度空心圆柱关于机械和热应力的通解; Pelletier 和 Vel<sup>[8]</sup>得到了正交各向异性功能梯度圆柱壳稳态热弹性响应的精确解; Michalak 等人<sup>[9]</sup>对功能梯度材料的热传导进行了模拟和分析; Tarn 等<sup>[10]</sup>假设材料参数沿径向幂函数变化,利用状态空间法对各向异性功能梯度材料柱形圆管的热传导问题进行了分析,他们利用特征函数展开和矩阵代数学获得了在一般热边界条件下,功能梯度材料管的瞬态和稳态热传导的解析解. 对于轴对称功能梯度圆板稳态热传导问题的精确分析目前尚未见诸报道.

本文从正交各向异性材料热传导基本方程出发,针对功能梯度材料的热传导率沿板厚方向指数函数形式的梯度分布情况,利用分离变量法,获得了在上下表面作用任意热载荷情况下的精确解. 通过算例,分析了在热载荷作用下,材料性质不同梯度变

收稿日期: 2009-08-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10432030); 同济大学青年优秀人才培养行动计划资助项目(2009KJ047)

作者简介: 刘五祥(1976—),男,讲师,工学博士,主要研究方向为新型材料的力学行为. E-mail: wxliu@tongji.edu.cn

化时不同板厚对温度场分布的影响.

## 1 问题的描述与基本方程

如图1所示,考虑一正交各向异性功能梯度轴对称圆板(半径为 $a$ ,高为 $h$ ),圆周表面恒温,上、下表面施加不同的温度.

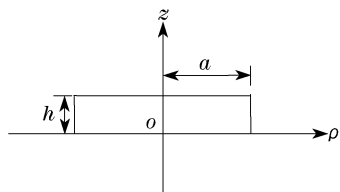


图1 圆板示意图

Fig.1 Schematic of circular plate

则此热传导问题可以当作二维问题来考虑.它在柱坐标下的控制方程为<sup>[9]</sup>

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( k_{11} \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

其中: $k_{11}, k_{33}$ 为热传导系数; $T$ 表示温度增量.

假设热传导系数沿厚度方向( $z$ 方向)按指数函数规律变化,即

$$K = K^0 e^{\alpha z/h} \quad (2)$$

其中: $K^0$ 是热传导系数在 $z=0$ (下表面)处的值; $\alpha$ 为梯度变化参数.

由问题描述可知,温度场的边界条件是

$$z = 0 \quad T = T^0(\rho) \quad (3)$$

$$z = h \quad T = T^h(\rho) \quad (4)$$

$$\rho = a \quad T = 0 \quad (5)$$

## 2 温度场的求解

由于热传导系数满足式(2)的梯度变化规律,则式(1)可改写为

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( k_{11}^0 e^{\alpha z/h} \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{33}^0 e^{\alpha z/h} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (6)$$

利用分离变量法,把温度场函数分离成函数 $R(\rho)$ 和 $Z(z)$ 的乘积,即

$$T(\rho, z) = R(\rho)Z(z) \quad (7)$$

由式(5)和式(7)可知

$$R(a) = 0 \quad (8)$$

如果 $R(a) \neq 0$ ,则必有 $Z(z) \equiv 0$ ,这样整个求解就失去了意义.

将式(7)代入式(6)后得

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = - \frac{k_{33}^0}{k_{11}^0} \left( \frac{\alpha}{h} \frac{Z'(z)}{Z(z)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} \right) \quad (9)$$

其中:

$$R''(\rho) = d^2 R(\rho)/d\rho^2, R'(\rho) = dR(\rho)/d\rho,$$

$$Z''(z) = d^2 Z(z)/dz^2, Z'(z) = dZ(z)/dz$$

式(9)的右端只是变量 $z$ 的函数,与变量 $\rho$ 无关;而左端只是平面变量 $\rho$ 的函数,与变量 $z$ 无关.两者要相等,一般来讲是不可能的.唯一例外的是两端实际上均为同一常数,设为 $-\lambda$ ,即

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = - \frac{k_{33}^0}{k_{11}^0} \left( \frac{\alpha}{h} \frac{Z'(z)}{Z(z)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} \right) = -\lambda \quad (10)$$

于是,函数 $R(\rho)$ 和 $Z(z)$ 分别满足

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \lambda R(\rho) = 0 \quad (11)$$

$$Z''(z) + \frac{\alpha}{h} Z'(z) - \frac{k_{11}^0}{k_{33}^0} \lambda Z(z) = 0 \quad (12)$$

### 2.1 函数 $R(\rho)$ 的确定

(1) 当 $\lambda = \beta^2$ 时,式(11)是个零阶的Bessel方程,它的解为

$$R(\rho) = C_1 J_0(\beta\rho) + C_2 Y_0(\beta\rho) \quad (13)$$

式中: $J_0, Y_0$ 分别是零阶的第一类与第二类Bessel函数; $C_1, C_2$ 是待定常数.因为圆板中心点的温度必须是有限值,因此要求 $C_2 = 0$ ,故

$$R(\rho) = C_1 J_0(\beta\rho) \quad (14)$$

再由式(8),可得 $J_0(\beta a) = 0$ .若 $\rho_n$ 是 $J_0(\rho) = 0$ 的第 $n$ 个正根,于是得本征值

$$\lambda_n = \beta_n^2 = \left( \frac{\rho_n}{a} \right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

本征函数

$$R_n(\rho) = J_0(\beta_n \rho) = J_0 \left( \frac{\rho_n}{a} \rho \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

由式(16),式(14)可以写成

$$R(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\beta_n \rho) \quad (17)$$

(2) 当 $\lambda = 0$ 时

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) = 0 \quad (18)$$

由式(18)可求得

$$R(\rho) = C_1 + C_2 \ln \rho \quad (19)$$

由 $R(\rho)$ 为有限值可知 $C_2 = 0$ ,因此 $R(\rho) = C_1$ 为一

常数. 又由式(8)可知  $C_1 = 0$ , 因此有  $R(\rho) \equiv 0$ , 故此情况无实际意义.

(3) 当  $\lambda = -\beta^2$  时

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho}R'(\rho) - \beta^2 R(\rho) = 0 \quad (20)$$

式(20)是个虚宗量的零阶 Bessel 函数, 可解得

$$R(\rho) = C_1 J_0(-i\beta\rho) + C_2 Y_0(-i\beta\rho) \quad (21)$$

由  $R(\rho)$  在中心点为有限值以及 Bessel 函数的性质可得

$$R(\rho) = C_1 J_0(-i\beta\rho) = C_1 I_0(-\beta\rho) \quad (22)$$

函数  $I_0(x)$  在实轴上没有零点, 因此式(22)无法满足侧面的边界条件式(8), 所以  $\lambda = -\beta^2$  也不能成立.

## 2.2 函数 $Z(z)$ 的确定

将  $\lambda$  值代入式(12)可得

$$Z''(z) + \frac{\alpha}{h}Z'(z) - \frac{k_{11}^0}{k_{33}^0}\beta_n^2 Z(z) = 0 \quad (23)$$

通解为

$$Z_n(z) = B_1^n e^{p_1 z} + B_2^n e^{p_2 z} \quad (24)$$

其中,

$$p_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4h^2\beta_n^2 k_{11}^0/k_{33}^0} - \alpha}{2h}$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4h^2\beta_n^2 k_{11}^0/k_{33}^0} + \alpha}{2h}$$

$B_1^n$  和  $B_2^n$  是任意常数, 将式(16)和式(24)代入式(7), 并求和

$$T(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\beta_n \rho) (A_1^n e^{p_1 z} + A_2^n e^{-p_2 z}) \quad (25)$$

其中:  $A_1^n = C_1^n B_1^n$ ,  $A_2^n = C_1^n B_2^n$  是待定常数. 将式(25)代入边界条件式(3)和式(4), 可得

$z = 0$  时

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_0(\beta_n \rho) (A_1^n + A_2^n) = T^0(\rho) \quad (26)$$

$z = h$  时

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_0(\beta_n \rho) (A_1^n e^{p_1 h} + A_2^n e^{-p_2 h}) = T^h(\rho) \quad (27)$$

根据 Bessel 函数的正交性, 式(26)和式(27)可改写成

$$A_1^n + A_2^n = \frac{1}{M} \int_0^a T^0(\rho) J_0(\beta_n \rho) \rho d\rho \quad (28)$$

$$A_1^n e^{p_1 h} + A_2^n e^{-p_2 h} = \frac{1}{M} \int_0^a T^h(\rho) J_0(\beta_n \rho) \rho d\rho \quad (29)$$

其中,  $M = \int_0^a J_0^2(\beta_n \rho) \rho d\rho$ . 由此, 求出  $A_1^n$ ,  $A_2^n$  以后, 代入式(25) 即可以精确的求解出任意梯度轴对称功能梯度圆板热传导问题的温度场.

## 3 算例与分析

**算例** 考虑一正交各向异性功能梯度轴对称圆板(半径  $a = 0.5$  m), 圆板侧面恒温. 设其热传导系数沿厚度方向按式(2)所示的指数规律变化, 在  $z = 0$  处的热传导系数取为文献[11]所列的相应数据, 即

$$k_{11}^0/k_{33}^0 = 2/3$$

上表面作用零阶 Bessel 函数分布的温度  $T_0 J_0(\beta_1 \rho)$ , 下表面无温度变化, 即

$$T^h(\rho) = T_0 J_0(\beta_1 \rho), \quad T_0 = 1 \text{ K}, \quad T^0(\rho) = 0$$

图2分别给出了当圆板的板厚  $h = 0.1$  m, 梯度变化参数  $\alpha = -1, -1/2, 0, 1/2, 1$  以及梯度参数  $\alpha = 1$ , 板厚  $h = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  m 时, 板内  $\rho/a = 3/5$  处温度场沿厚度的分布.

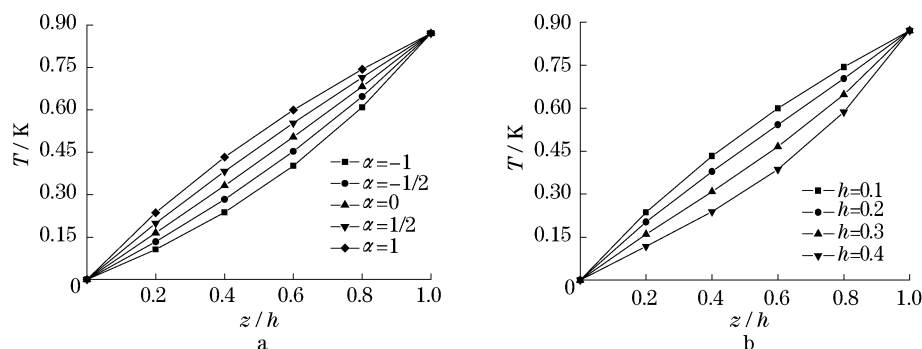


图2 不同材料梯度和板厚下的温度场沿板厚的变化

Fig.2 Variation of temperature fields with coordinate  $z/h$  for different material properties and plate thickness

从图 2a 可以看到:①与均匀薄圆板( $\alpha = 0$ )不同,对于功能梯度薄圆板( $\alpha \neq 0$ ),温度场  $T$  不再是厚度坐标  $z/h$  的线性函数.② 梯度参数  $\alpha$  的绝对值越大,温度场沿厚度分布曲线的曲率也越大;且当  $\alpha > 0$  时,温度场沿厚度的分布曲线向上凸,而  $\alpha < 0$  时其分布曲线向下凹.从图 2b 可以看到:①随着板厚的增加,相同位置处的温度场降低.② 当为薄板( $h = 0.1 \text{ m}$ )时,温度场沿厚度的分布曲线向上凸;而为厚板( $h = 0.4 \text{ m}$ )时,温度场沿厚度的分布曲线向下凹.

从计算结果可以发现:对于不同的材料梯度参数和板厚,功能梯度圆板的温度场沿板厚方向的变化规律是不尽相同的.本文的创新之处在于获得了四周恒温轴对称功能梯度圆板上、下表面作用温度荷载情况下,热传导问题的精确解.所获得的精确解可以为建立新的轴对称功能梯度材料圆板热传导问题理论和数值计算模型提供简化假设的依据.

## 4 结语

利用分离变量法,假设材料的热传导系数沿板厚方向为指数分布,求得了四周温度恒定的轴对称功能梯度材料圆板,在上、下表面作用热荷载情况下,热传导问题的精确解.通过算例,分析了在热载荷作用下,材料性质的梯度变化和板厚对温度场分布的影响.所获得的精确解,可以作为评价其他近似方法的标准解答.

### 参考文献:

- [1] Marin L. Numerical solution of the cauchy problem for steady-state heat transfer in two-dimensional functionally graded materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005,42(15):4338.
- [2] Ohmichi M, Noda N. Two-dimensional heat conduction problem in a functionally graded plate with a slanting boundary to the functional gradation[J]. Journal of Thermal Stresses, 2007, 30(7):715.
- [3] Sladek J. Meshless local boundary integral equation method for heat conduction analysis in nonhomogeneous solids[J]. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 2004, 27(4):517.
- [4] Wang X, Pan E, Roy A K. Three-dimension Green's functions for a steady point heat source in a functionally graded half-space and some related problems [J]. International Journal of Engineering Science, 2007, 45:939.
- [5] 田云德, 曾全鹰, 陈泽友. 梯度材料三维稳态稳定场的改进分层计算方法[J]. 西华大学学报, 2006, 25(6):10.  
TIAN Yunde, ZENG Quanying, CHEN Zeyou. Improved algorithm for the laminated functionally gradient material in steady temperature field[J]. Journal of Xihua University, 2006, 25(6):10.
- [6] 田云德, 秦世伦. 改进混合律方法研究梯度材料力学性能[J]. 西华大学学报, 2005, 24(6):91.  
TIAN Yunde, QIN Shilun. Research on the mechanics properties of functional gradient materials using an improved mixed-mode approach[J]. Journal of Xihua University, 2005, 24(6):91.
- [7] Jabbari M, Sohrabpour S, Eslami M R. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads[J]. Journal of Applied Mechanics, 2003, 70:111.
- [8] Pelletier J L, Vel S S. An exact solution for the steady-state thermoelastic response of functionally graded orthotropic cylindrical shells [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(15):1131.
- [9] Michalak B, Wozniak C, Wozniak M. Modelling and analysis of certain functionally graded heat conductors [J]. Archive of Applied Mechanics, 2007, 77(10):823.
- [10] Tarn J Q, Wang Y M. Heat conduction in a cylindrically anisotropic tube of a functionally graded material[J]. Chinese Journal of Mechanics Series A (English Edition), 2003, 19(3):365.
- [11] 刘五祥, 仲政. 功能梯度平板的二维热弹性分析[J]. 力学季刊, 2008, 29(1):40.  
LIU Wuxiang, ZHONG Zheng. Two-dimensional thermoelastic analysis of a functionally graded plate[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2008, 29(1):40.