

# 基于小波变换和 Tucker 分解的彩色图像数字水印

夏建平, 周激流, 何 坤, 刘 昶, 王东方

(四川大学 计算机学院, 成都 610065)

**摘要:** 提出了一种通过小波变换和 Tucker 分解将水印信息同时嵌入彩色图像  $R, G, B$  通道的水印算法。首先对彩色图像  $R, G, B$  三通道进行小波变换, 然后将获得的三个低频系数构成三阶张量, 再经过 Tucker 分解后获得核心张量, 通过在核心张量中嵌入水印信息使得水印信息扩散到原彩色图像的  $R, G, B$  三个分量中。通过实验表明, 本算法对于压缩、噪声、滤波、缩放等攻击具有一定的鲁棒性, 并与在同样嵌入规则下, 直接将 Tucker 分解应用于彩色图像的算法比较, 该算法具有更好的稳定性。

**关键词:** Tucker 分解; 彩色图像数字水印; 小波变换

中图分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1001-3695(2010)02-0798-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.02.112

## Color image watermark based on DWT and Tucker decomposition

XIA Jian-ping, ZHOU Ji-liu, HE Kun, LIU Chang, WANG Dong-fang

(College of Computer Science, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

**Abstract:** This paper proposed a new color image watermarking algorithm based on DWT and Tucker decomposition. Applied DWT to  $R, G, B$  channel correspondingly, and used three low frequent coefficients to construct a 3-level tensor. Embedding the watermark into the core tensor, which got from Tucker decomposition, could diffuse the watermark into  $R, G, B$ . The experiment results indicate that this algorithm is robust to compress, noise, filter and geometric distortion. And the algorithm is better than the only Tucker based color image algorithm in a certain extent.

**Key words:** Tucker decomposition; color image digital watermark; DWT

数字水印技术是将一种数字信息嵌入载体中, 从而达到信息隐藏的目的。数字水印有很多应用, 如版权保护、指纹识别、拷贝保护、广播监控、数据鉴定、数据隐藏<sup>[1]</sup>。

鲁棒性数字水印具有在经过信号处理和几何变换后仍能从载体提取出水印信息的特点。许多的水印算法表明, 在频率域<sup>[2-6]</sup>添加水印信息, 在鲁棒性方面是优于在空间域添加水印信息的。在频率域嵌入水印信息是通过将水印信息扩散到空间域所有像素点来增加水印的鲁棒性, 但是直接对频率域信息修改可能对图像质量影响较大。在文献[7~9]提出的彩色图像水印算法都是选取彩色图像的某个或多个颜色通道嵌入水印信息, 使得水印信息扩散到一个分量, 或者根据人类视觉特性, 在不同颜色通道嵌入不同强度的水印信息, 而没有达到同时将水印信息扩散到  $R, G, B$  三个分量。

在现实生活中, 彩色图像数字水印更具有实际价值。为了方便对彩色图像进行处理, 且使得水印信息能同时扩散到  $R, G, B$  通道, 而不是单独对不同分量嵌入不同强度的水印信息, 本文在彩色图像数字水印过程中引入张量的概念。张量是高维数据表达方法, 使用张量存储和处理图像, 可以避免对图像向量化造成的像素间信息的丢失。Tucker 分解<sup>[10]</sup>是张量分解的一种方法, Tucker 分解后可以获取核心张量和一系列正交矩阵。与矩阵 SVD 分解类似, 奇异值矩阵代表了原矩阵的主要能量, 而核心张量代表了原张量的主要能量。在核心张量中嵌入水印信息, 可以达到将水印信息扩散的目的, 并且核心张量代表了原张量的主要能量, 具有一定的稳定性。为了增加水印

信息的鲁棒性, 本文先对彩色图像的三个通道应用小波分解, 将获取的三个低频系数矩阵构成一个三阶张量, 然后对张量进行 Tucker 分解, 在获得的核心张量中嵌入水印信息。通过在核心张量中嵌入水印信息, 避免了直接对 DWT 低频系数的修改, 同时将水印信息扩散到所有低频系数。在提取水印的过程中, 通过在张量分解过程中获得的特征矩阵和核心张量作为密钥提取水印信息。

## 1 张量及 Tucker 分解

### 1.1 张量

高维数据  $A \in R^{1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  可以视为位于张量空间  $R^{I_1} \otimes R^{I_2} \otimes \dots \otimes R^{I_N}$  中的  $N$  阶张量,  $R^n$  是张量空间的向量空间, 高维数据的维数  $N$  称为张量的阶。张量是高维数据分析的一种表达方法, 将图像看做张量, 避免了将图像向量化造成的像素间信息的丢失。在图 1 显示了一个三阶张量的例子。

### 1.2 张量分解

张量分解有两种方法, 即 CP 和 Tucker 分解。CP 分解是将张量分解为一个数和一系列向量的乘积的形式; Tucker 分解是将原张量分解成核心张量和一系列矩阵的乘积的形式。其中核心张量保留了原张量的主要信息, 并具有一定的稳定性。Tucker 分解现在已经有了很多的应用, 如数据压缩、数据挖掘、心理测验学<sup>[11]</sup>。由于 Tucker 分解后可获取一个核心张量, 可

以用于水印嵌入,本文选择在 Tucker 分解中嵌入水印信息。张量在处理过程中不对原张量向量化,所以其运算规则与通常的运算方法有所不同。

下面对基本的张量运算规则进行了描述。

**定理 1**<sup>[10]</sup> Tucker 分解。一个张量  $A \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  可以表达为

$$A = B \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \times \dots \times_N U^{(N)} \quad (1)$$

其中:  $B$  为核心张量;  $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(N)}$  为一系列正交矩阵。

由于投影矩阵  $U$  的正交性,可以通过式(1)求得核心张量  $B$  为

$$B = A \times_1 U^{(1)T} \times_2 U^{(2)T} \times \dots \times_N U^{(N)T} \quad (2)$$

**定义 1**<sup>[11]</sup> 张量与矩阵的乘积。张量  $A \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  乘矩阵可以表示为  $A \times_n U$ 。其中  $U \in R^{I_n \times I_n}$ 。其数学表达式为

$$(A \times_n U)(i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N) = \sum_{i_n=1}^{I_n} a(i_1, i_2, \dots, i_n) u(j_n, i_n) \quad (3)$$

**定义 2**<sup>[11]</sup> 张量与张量的乘积。张量  $A \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  乘张量  $B \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  表示为

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} b_{i_1 i_2 \dots i_N} \quad (4)$$

**定义 3**<sup>[11]</sup> 张量矩阵化。对于  $N$  阶张量  $A \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ , 其矩阵展开形式  $A_{(n)} \in R^{n \times \prod_{k \neq n} I_k}$  张量的元素  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  映射到矩阵元素  $(i_n, j)$ , 映射关系为  $j = 1 + \sum_{k=1, k \neq n}^N (i_k - 1) J_k$ 。图 2 显示了三阶张量的矩阵化。

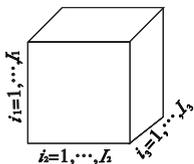


图1 三阶张量

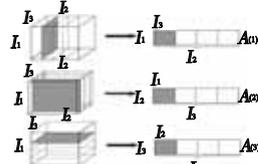


图2 三阶张量的矩阵化

将彩色图像  $R, G, B$  三个颜色通道经过小波变换的低频系数构成一个三阶张量  $A^{m \times n \times p}$ , 再将 Tucker 分解应用于  $A^{m \times n \times p}$ , 实现了将  $R, G, B$  当做一个整体的目的; 同时将水印信息扩散到了  $R, G, B$ , 弥补了通常方法不能直接将水印信息扩散到  $R, G, B$  的不足。Tucker 分解后获得一个三阶的核心张量和三个正交矩阵, 通过在核心张量嵌入水印信息, 达到了水印信息的扩散, 并且核心张量具有一定的稳定性。根据 Tucker 分解思想, 其分解结果如图 3 所示。

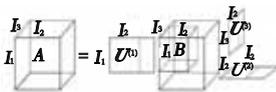


图3 三阶张量分解

### 1.3 Tucker 分解算法

Tucker 分解在获得的核心张量的过程中可以进行降维处理。例如,  $256 \times 256 \times 3$  的三阶张量, 通过 Tucker 分解可以获得  $256 \times 256 \times 3$  的核心张量, 也可以获得  $128 \times 128 \times 3$  的核心张量。对于获得的核心张量的维数可以指定, 但是降维减少了图像的冗余信息, 会导致重构的图像质量降低。为了保证重构水印图像的质量, 在 Tucker 分解的过程中, 本文 Tucker 分解算法不进行降维处理。本文张量分解算法在算法 1 中进行了详细的描述。在算法 1 中, 将由小波低频系数构成的三阶张量作为输入, 最后根据定义 3, 将原张量沿 1~3 阶分别矩阵化, 然

后对获得的三个矩阵进行 SVD 分解, 获取矩阵  $U_n^{(n)}$ , 再通过式(2)获取核心张量。

#### 算法 1 Tucker 分解

输入: 原始张量  $A$ 。

输出:  $U^{(n)}$  和  $B$ 。

1—将  $A$  沿第一维矩阵化获得  $A_{(1)}$ , 对  $A_{(1)}$  进行 SVD 分解, 求得左奇异值向量  $U_1$ , 获得  $U_1^{(1)} = U_1$ ;

2—将  $A$  沿第二维矩阵化获得  $A_{(2)}$ , 对  $A_{(2)}$  进行 SVD 分解, 求得左奇异值向量  $U_2$ , 获得  $U_2^{(2)} = U_2$ ;

...

$N$ —将  $A$  沿第  $N$  维矩阵化获得  $A_{(n)}$ , 对  $A_{(n)}$  进行 SVD 分解, 求得左奇异值向量  $U_n$ , 获得  $U_n^{(n)} = U_n$ ;

$N+1$ —求得核心张量  $B = A \times_1 U^{(1)T} \times_2 U^{(2)T} \times \dots \times_N U^{(N)T}$ , 输出  $U^{(n)}$  和  $B$ 。

从上述算法可以看出, 对于彩色图像, 本文 Tucker 分解算法是矩阵分解的推广; 对于灰色图像的 Tucker 分解, 本文算法就是对其 SVD 分解。其证明过程如下:

设灰色图像用张量表示为  $A^{m \times n}$ , 通过算法 1 获得  $U^{(m \times k)}, U^{(n \times l)}, B = A \times_1 U^T \times_2 U^T$ 。

根据定义 1(张量与矩阵的乘积),  $A \times_1 U^T$  用通常矩阵乘法可以表示为  $U^T \times A$ ;  $A \times_2 U^T$  用通常矩阵乘法可以表示为:  $A \times_2 U \Rightarrow A \times_1 U^T \times_2 U^T = U^T \times A \times_2 U$ , 则

$$B = U^T \times A \times_2 U \quad (5)$$

根据定义 3(张量矩阵化), 二阶张量沿宽的矩阵化分别为对原图像的转置, 而沿高的矩阵化就是原图像。在算法 1 中沿第一维矩阵化并 SVD 分解得到  $A = USV^T$ , 沿第二维矩阵化并 SVD 分解得到

$$A^T = VS^T U^T \Rightarrow U = U_1 U, V = U_2 U \quad (6)$$

而  $S = U^T AV$ , 再根据式(5)和(6)可得

$$S = B$$

从上面证明可以看出, 二阶 Tucker 与 SVD 分解等价。

## 2 水印算法

小波分解可以增加水印信息抵抗信号处理的能力, 而 Tucker 分解可以提取原张量的主要能量, 增加了抵抗压缩攻击的能力。另外, 通过 Tucker 分解可以将水印信息扩散到所有低频分量中, 并且避免了直接对低频系数的修改。水印信息可以看做是在原始载体图像中加入的噪声信息, 而在张量分解的过程中, 获取了原张量的主要能量, 降低了噪声信息的影响, 使得嵌入水印信息的核心张量在没有原张量分解过程中获得的正交矩阵作为密钥信息的情况下, 不能通过直接对水印后图像的小波低频系数构成的张量进行 Tucker 分解获得, 增加了水印信息的安全性。

### 2.1 水印的产生

使用二值图像作为水印信息  $W$ , 并使用花托自同构算法对  $W$  作混乱处理。在置乱的过程中使用密钥  $k$  对水印信息加密, 获得水印信息  $W$ 。

### 2.2 水印嵌入过程

a) 对彩色图像的  $R, G, B$  三个分量进行小波分解, 获得三

个低频系数矩阵  $LLR, LLG, LLB$ ; 然后将低频系数构成三阶张量  $A^{m \times n \times p}$ 。

b) 对张量  $A^{m \times n \times p}$  进行 Tucker 分解, 获得核心张量  $B$ , 特征矩阵  $U, V$  和  $M$ ; 再通过  $B_i^w = B_i + \alpha \times W_i$  将水印信息嵌入核心张量中。其中  $\alpha$  为水印信息强度。然后将  $B, U, V$  和  $M$  作到为接收者查看水印信息的密钥, 根据式(1)重构获取水印后的张量。

c) 通过逆小波分解, 获取水印后图像。

### 2.3 水印提取过程

a) 对嵌入水印信息后图像的  $R, G, B$  三个分量进行小波分解, 获得三个低频系数矩阵  $LLR, LLG, LLB$ ; 然后将低频系数构成三阶张量。

b) 根据提供的密钥信息  $U, V$  和  $M$ , 再通过式(2)获取嵌入水印信息后的核心张量  $B^w$ 。

c) 根据密钥信息  $B$ , 通过  $W^w = \frac{B^w - B}{\alpha}$  提取获得水印信息。

### 3 仿真实验结果及分析

在彩色图像水印算法过程中, 本文使用  $256 \times 256$  的 24 位彩色图像作为载体图像, 使用  $32 \times 32$  的二值图像作为水印信息。图 4 显示了不同彩色载体图像及提取出的水印信息, 其中添加水印信息强度  $\alpha = 64$ 。

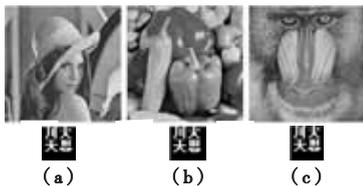


图4 不同载体图像以及提取出的水印信息

本文使用 PSNR 来衡量水印的不可见性, PSNR 的计算定义如下:

$$PSNR(f, f') = 10 \log_{10} \left[ \frac{f_{\max}^2}{\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [f'(x,y) - f(x,y)]^2} \right] \quad (7)$$

采用一化相关值  $NC$  作为参考原始水印  $WI$  和提取出的水印  $W$  之间的相似性度量, 定义如下:

$$NC = \frac{\sum_i \sum_j WI(i,j) W'(i,j)}{\sum_i \sum_j [WI(i,j)]^2} \quad (8)$$

表 1 显示了不同彩色图像在添加水印后的 PSNR 和提取出水印信息的  $NC$ 。攻击测试中使用 Lena ( $256 \times 256 \times 3$ ) 图像作为载体图像。

表 2 显示了本文算法 (DWT-Tucker) 和只使用 Tucker 分解算法在经过不同攻击后提取出的水印信息。

表1 不同载体图像的PSNR和NC

| 水印图像    | PSNR       | NC |
|---------|------------|----|
| Lena    | 41.008 184 | 1  |
| Peppers | 42.025 028 | 1  |
| Baboon  | 40.420 199 | 1  |

通过上述实验表明, 本文水印算法对于信号处理和几何变换攻击都具有一定的鲁棒性, 并优于将 Tucker 分解直接应用于彩色图像。特别对于压缩攻击、缩放攻击和低通滤波, 当压缩品质因子为 5% 时, 本文方法依然能提取出信息。当水印后图像缩放到原来的 1/4 时和低通滤波后, 本文算法提取出的水印信息通过人眼依然能够识别, 而只使用 Tucker 水印算法

已经无法辨别水印信息。本文算法对于中值滤波、维纳滤波均具有一定的鲁棒性。由于本文通过在核心张量嵌入水印信息, 而核心张量代表了原张量的主要能量, 并且构成三阶张量的 Tucker 分解是经过小波变换后的低频系数, 本文算法对于压缩、滤波、缩放等攻击都具有一定的鲁棒性。但是对于裁剪攻击, 提取出的水印信息人眼已经不能辨别, 这是因为在 Tucker 分解过程中, 经过裁剪攻击后造成像素丢失, 导致不能有效求得嵌入水印信息后的核心张量。

表2 不同攻击后提取出的水印信息和NC

| 攻击类型 | 攻击参数                         | 水印信息 (DWT-Tucker) | 水印信息 (Tucker) | NC (DWT-Tucker) | NC (Tucker) |
|------|------------------------------|-------------------|---------------|-----------------|-------------|
| 压缩   | 5%                           |                   |               | 0.966 1         | 0.639 83    |
| 高斯噪声 | 0.005                        |                   |               | 0.944 92        | 0.940 68    |
| 椒盐噪声 | 0.02                         |                   |               | 0.927 9 7       | 0.881 36    |
| 低通滤波 | $3 \times 3$<br>$\sigma = 1$ |                   |               | 0.923 7         | 0.779 66    |
| 中值滤波 | $3 \times 3$                 |                   |               | 0.978 81        | 0.843 22    |
| 维纳滤波 | $3 \times 3$                 |                   |               | 0.995 76        | 0.889 83    |
| 缩放攻击 | 0.25                         |                   |               | 0.889 83        | 0.648 31    |
| 缩放攻击 | 2                            |                   |               | 1               | 1           |
| 裁剪攻击 | 0.25                         |                   |               | 0.775 42        | 0.737 29    |

### 4 结束语

本文提出了一种基于 Tucker 分解的彩色图像水印算法。通过将  $R, G, B$  三通道信息经过小波变换后的低频系数组成一个三阶张量, 然后通过 Tucker 分解将水印信息扩散到  $R, G, B$  三个分量, 并将 Tucker 分解过程中获取的核心张量和正交矩阵作为接收者提取水印信息的密钥。通过实验结果表明, 本文方法对于压缩、滤波、噪声攻击等都具有一定的鲁棒性。

#### 参考文献:

- [1] MOULIN P, KOTTER R. Data-hiding codes [J]. Proceedings of the IEEE, 2005, 93(12): 2083-2126.
- [2] PUN C M. A novel DFT-based digital watermarking system for images [C] // Proc of the 8th International Conference on Signal Processing, 2006: 1245-1248.
- [3] XIE Rong-sheng, YANG Shu-guo. A digital watermarking method based on fractal transform in DWT domain [C] // Proc of the 1st International Conference on Modelling and Simulation, 2008: 424-429.
- [4] BARNI M, BARTOLINI F, CAPPELLINI V, et al. A DCT-domain system for robust image watermarking [J]. Signal Processing, 1999, 66(3): 357-372.
- [5] HSU C T, WU J L. Hidden signature in image [J]. IEEE Trans on Image Processing, 1999, 8(1): 58-68.
- [6] AL-OMARI R, AL-JABER A. A robust watermarking algorithm for copyright protection [C] // Proc of Computer Systems and Applications, 2005: 90.
- [7] BANF M, BARTOLINI F. Multi channel watermarking of color images [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems for Video Technology, 2002, 12(3): 142-156.
- [8] 孙光民, 于瑶, 刘伟平, 等. 基于小波变换的彩色图像多分量水印嵌入算法 [J]. 北京工业大学学报, 2008, 34(5): 471-475.
- [9] 梁栋, 殷兵, 于梅, 等. 基于非抽样 Contourlet 变换的彩色图像数字水印算法 [J]. 光学学报, 2008, 28(8): 1469-1474.
- [10] TUCKER L R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis [J]. Psychometrika, 2006, 31(3): 279-311.
- [11] BADER B W, KOLDA T G. MATLAB tensor classes for fast algorithm prototyping [J]. ACM Trans on Mathematical Software, 2006, 32(4): 635-653.