

# 规则网络中的 SIRS 病毒局域控制建模与仿真\*

郭长睿<sup>1,2</sup>, 蔡绍洪<sup>2,3</sup>, 张达敏<sup>1</sup>

(1. 贵州大学理学院, 贵阳 550025; 2. 贵州省经济系统仿真重点实验室, 贵阳 550004; 3. 贵州财经学院, 贵阳 550004)

**摘要:** 提出一个带有局域控制的二维规则网络 SIRS 模型, 理论分析和计算机仿真都表明局域控制能很好地抑制此模型中的病毒传播。研究发现系统状态随时间的演化最终会达到一个稳定状态; 病毒的稳态感染比例与传播效率、被控制个体比例和免疫个体失去免疫能力的概率有关。只有当传播效率大于一个临界值时, 病毒才能在网络中持续传播。

**关键词:** SIRS 模型; 病毒传播; 局域控制; 计算机仿真; 复杂网络

**中图分类号:** TP309.5      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-3695(2010)04-1493-03

**doi:** 10.3969/j.issn.1001-3695.2010.04.080

## SIRS virus spreading model and computer simulation in regular network under local area control

GUO Chang-rui<sup>1,2</sup>, CAI Shao-hong<sup>2,3</sup>, ZHANG Da-min<sup>1</sup>

(1. College of Science, Guizhou University, Guiyang 550025, China; 2. Guizhou Province Key Laboratory of Economic System Simulation, Guiyang 550004, China; 3. Guizhou College of Finance & Economics, Guiyang 550004, China)

**Abstract:** This paper proposed a local area control SIRS virus spreading model based on 2-dimension regular network. Theoretical analysis and computer simulation show that the local area control strategy is efficient to control virus spreading. The study finds that system state will reach a steady state with time; the stable infected proportion is related with spreading efficiency, controlled individual proportion and the probability of individuals lose its immunity. Only when spreading efficiency beyond a critical value, can the virus spread in the network continuously and stably.

**Key words:** SIRS model; virus spreading; local area control; computer simulation; complex network

### 0 引言

各种有害的生物病毒对人类和动物的健康具有巨大的威胁。历史上爆发的西班牙流感病毒使数千万人死亡, 2003 年 SARS 病毒的传播使得数百人死亡。禽流感和最近爆发的甲型 H1N1 病毒都是病毒传播具有巨大危害的例子。另一方面, 计算机病毒的出现和传播对人类社会也造成了巨大的财产损失。因此, 如何控制病毒在网络中传播, 怎样用较小的成本取得较好的控制效果是人们非常关心的一个问题。研究网络中病毒传播的规律也是人类面临的重要任务。近年, 人们已经发展了很多病毒传播模型<sup>[1-3]</sup>, 最经典的是 SIS 和 SIRS 模型。在 SIS 模型中, S 表示易感个体 (susceptible)、I 表示被感染个体 (infected)。如果易感个体 S 旁边有被感染的个体 I, 则易感个体 S 可能会感染病毒, 随后易感个体可以被治愈并可能再次感染, 在这一模型中没有考虑个体的免疫能力。考虑个体免疫能力的最简单模型则是 SIRS 模型, 这个模型中除了易感个体、被感染个体外, 还有免疫个体 R (recovered)。被感染个体 I 可以痊愈并转换为免疫个体 R, 免疫个体 R 可能失去免疫能力转换

为易感个体 S。这些模型在一定程度上描述了病毒传播的规律<sup>[4-8]</sup>。

在现实的生物网络和计算机网络中, 病毒出现时往往只有很少的感染源。如果不加以控制任其发展, 则可能会发生不可控制的大规模感染, 给人类的健康和财富造成重大的损失。所以对网络中传播的病毒加以控制具有重要意义。本文使用的局域控制策略仅对感染源附近的节点进行控制, 只须知道部分节点之间的连接情况, 并不需要网络的全局信息, 因此实施成本较低。

文献[9]使用计算机仿真的方法对 ER 随机网络<sup>[10]</sup>、WS 小世界网络<sup>[11]</sup>和无标度网络<sup>[12]</sup>中的 SIS 病毒传播模型进行了局域控制, 研究了局域控制策略对病毒传播的影响。他们的研究表明局域控制策略对 ER 随机网络、WS 小世界网络和无标度网络中的病毒都有较好的控制效果, 对于某些网络, 当控制范围较大时病毒甚至不能存在。

本文提出了一个基于规则二维网络的 SIRS 病毒传播局域控制模型。通过对这个模型的理论分析和使用计算机仿真病毒传播过程, 研究了局域控制策略和其他的重要因素对二维规则网络中 SIRS 病毒传播过程的影响。本文在规则二维网络中

**收稿日期:** 2009-08-04; **修回日期:** 2009-12-28      **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10647005); 贵州省教育厅自然科学基金资助项目(20090133, 20090060, 2008038); 贵阳市科学技术计划项目(2009 大 12)

**作者简介:** 郭长睿(1981-), 男, 贵州贞丰人, 博士研究生, 主要研究方向为复杂系统与复杂性科学、计算机仿真(changruiguoguo@hotmail.com); 蔡绍洪(1958-), 男, 贵州仁怀人, 教授, 博导, 博士, 主要研究方向为复杂系统与复杂性科学; 张达敏(1967-), 男, 贵州贵阳人, 副教授, 博士研究生, 主要研究方向为小波分析、信号调制识别。

进行研究,每个节点都拥有四个邻居节点。实际网络中邻居节点个数(度)分布较为复杂,本文不考虑这种情况。

### 1 规则网络 SIRS 病毒局域控制模型

考虑无权无向二维规则网络,每条边代表距离为 1,每个节点上都有一个个体。若节点  $j$  至少通过  $d$  条边到达节点  $k$ ,则  $j$  到  $k$  的路径长度为  $d$ 。从被感染的个体出发,用  $d$  表示节点被控制的范围。被控制范围中,节点被感染的概率  $p$  远小于其他节点被感染的概率  $\alpha$ 。这表示处于控制范围内的节点得到了很好的保护。

此模型中  $i$  表示被感染个体占总个体的比例。与传统 SIRS 模型不同的是,笔者把网络中的易感个体分为两类: $s_1$  表示普通的易感个体占总个体的比例,被传染的概率为  $\alpha$ ;  $s_2$  表示被控制的未感染个体占总个体的比例,被传染的概率为  $p$ ,  $p < \alpha$ 。总的未感染个体占总个体的比例为  $s = s_1 + s_2$ 。初始时刻网络中有部分个体被感染。对网络进行局域控制后,每一时刻被感染个体都能以一定的概率( $\alpha$  或  $p$ ) 将病毒传播给与其相邻的上下左右四个个体,被感染个体也能以一定的概率  $\beta$  转变为免疫状态。同时处于免疫状态的个体以概率  $\gamma$  恢复成易感个体  $s_1$  或  $s_2$ 。

病毒在这个模型中的传播可以由以下方程组描述:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha\langle k \rangle s_1 i - p(4 - \langle k \rangle) s_2 i + \gamma(1 - s_1 - s_2 - i) \\ \frac{\partial i}{\partial t} = -\beta i + \alpha\langle k \rangle s_1 i + p(4 - \langle k \rangle) s_2 i \\ s = s_1 + s_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\langle k \rangle$  为平均每个感染节点周围的  $s_1$  类节点数。由于本模型中节点的度都为 4,平均每个感染节点周围的  $s_2$  类节点数为  $4 - \langle k \rangle$ 。

当系统演化到稳定态时得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha\langle k \rangle s_1 i - p(4 - \langle k \rangle) s_2 i + \gamma(1 - s_1 - s_2 - i) = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial t} = -\beta i + \alpha\langle k \rangle s_1 i + p(4 - \langle k \rangle) s_2 i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由于  $p$  很小,且当  $s_2$  也较小时, $p(4 - \langle k \rangle) s_2 i$  是一个高阶小量,可以将其舍去,可得

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha\langle k \rangle s_1 i + \gamma(1 - s_1 - s_2 - i) = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial t} = -\beta i + \alpha\langle k \rangle s_1 i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由于  $s = s_1 + s_2$ ,式(3)可写成

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha\langle k \rangle (s - s_2) i + \gamma(1 - (s - s_2) - s_2 - i) = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial t} = -\beta i + \alpha\langle k \rangle (s - s_2) i = 0 \end{cases} \quad (4)$$

设此系统达到稳定状态时被感染的个体占全部个体的比例为  $I$ ,对式(4)进行分析可得系统中稳态感染比例:

$$\begin{cases} S = \frac{\beta}{\alpha\langle k \rangle} + s_2 \\ I = \frac{\gamma(\alpha\langle k \rangle - \beta - s_2\alpha\langle k \rangle)}{\alpha\langle k \rangle(\beta + \gamma)} \end{cases} \text{当 } \lambda > \frac{1}{\langle k \rangle(1 - s_2)} \text{ 时} \quad (5)$$

$$\begin{cases} S = 1 \\ I = 0 \end{cases} \text{当 } \lambda < \frac{1}{\langle k \rangle(1 - s_2)} \text{ 时} \quad (6)$$

这里定义  $s_1$  类个体病毒传播效率  $\lambda = \alpha/\beta$ 。由此可见,当  $s_2$  和  $p$  都很小时,在局域控制的二维规则 SIRS 网络中,病毒传

播的稳态感染比例  $I$  由  $s_1$  类节点病毒传播效率  $\lambda$ 、 $s_2$  和  $\gamma$  三个因素决定;传播临界值  $\lambda_c$  与  $s_2$  有关。只有当  $\lambda > \lambda_c = 1/[\langle k \rangle(1 - s_2)]$  时,病毒才能在网络中持续稳定地传播。而且笔者发现传播临界值  $\lambda_c$  与  $\gamma$  无关。当控制范围  $d$  增大时, $s_2$  也变大,病毒传播的稳态感染比例  $I$  则变小。

### 2 解的稳定性分析

当  $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{\langle k \rangle(1 - s_2)}$  时,式(4)解为  $\begin{cases} S = 1 \\ I = 0 \end{cases}$ , Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\gamma & -\alpha\langle k \rangle(1 - s_2) - \gamma \\ 0 & -\beta + \alpha\langle k \rangle(1 - s_2) \end{bmatrix}$$

所以  $|J| = -\gamma[-\beta + \alpha\langle k \rangle(1 - s_2)] > 0$ ,  $tr(J) = -\gamma - \beta + \alpha\langle k \rangle(1 - s_2) < 0$ 。根据动力系统稳定性判据,式(4)在  $\begin{cases} S = 1 \\ I = 0 \end{cases}$  处是稳定的。

当  $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{\langle k \rangle(1 - s_2)}$  时,式(4)解为  $S > 5$

$$\begin{cases} S = \frac{\beta}{\alpha\langle k \rangle} + s_2 \\ I = \frac{\gamma(\alpha\langle k \rangle - \beta - s_2\alpha\langle k \rangle)}{\alpha\langle k \rangle(\beta + \gamma)} \end{cases}$$

Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma[\alpha\langle k \rangle - \beta - s_2\alpha\langle k \rangle]}{\beta + \gamma} - \gamma & -\beta - \gamma \\ \frac{\gamma[\alpha\langle k \rangle - \beta - s_2\alpha\langle k \rangle]}{\beta + \gamma} & 0 \end{bmatrix}$$

所以  $|J| = \gamma[\alpha\langle k \rangle - \beta - s_2\alpha\langle k \rangle] > 0$ ,  $tr(J) = -\gamma(\frac{\alpha\langle k \rangle - \beta - s_2\alpha\langle k \rangle}{\beta + \gamma} +$

$1) < 0$ ,因此式(4)在  $\begin{cases} S = \frac{\beta}{\alpha\langle k \rangle} + s_2 \\ I = \frac{\gamma(\alpha\langle k \rangle - \beta - s_2\alpha\langle k \rangle)}{\alpha\langle k \rangle(\beta + \gamma)} \end{cases}$  处也是稳定的。

### 3 计算机仿真

本文采用的二维规则网络的规模为  $100 \times 100$ ,有 10 000 个节点,每个节点分别与其前后左右的四个节点连接。

前面根据式(5)知道当局域控制范围  $d$  增大时, $s_2$  随着增大,病毒传播的稳态感染比例  $I$  则变小。考察固定  $\alpha, \beta, p, \gamma$  时,局域控制范围  $d$  对网络中病毒传播的影响。结果如图 1 所示( $\alpha = 0.6, \beta = 1, p = 0.05, \gamma = 0.8$ , 初始感染 0.03% 的个体)。

图 1 中稳态感染比例  $I$  最高的曲线对应没有局域控制的状态,往下的曲线分别对应局域控制  $d = 1, d = 2, d = 3$  的状态。可以看出,当  $\alpha, \beta, p, \gamma$  不变时, $d$  越大则被控制的个体越多, $s_2$  也越大。稳态感染比例  $I$  随着控制范围  $d$  的增大而减小。说明局域控制策略对控制二维规则网络中病毒传播有很好的效果。从图中可以看出, $d = 3$  时稳态感染比例已经几乎为 0;还可以看出,稳态感染比例  $I$  随时间趋于一个稳定值。

图 2 是局域控制范围不同时,被控制个体的比例图(初始感染 0.03% 的个体)。当控制范围  $d = 1$  时,被控制的个体占全部个体的 10.2%;  $d = 2$  时为 27.4%;  $d = 3$  时为 48.8%。这说明二维规则稀疏网络中被控制的个体数量是比较少的,实施局域控制策略成本较低。

根据式(5)可知,当  $s_2$  和  $p$  都很小时,只有当  $\lambda > \lambda_c = 1/$

$[\langle k \rangle (1 - s_2)]$  时,病毒才能在网络中持续稳定的传播。当  $d = 2$ , 初始感染 0.03% 的个体时,由图 2 可知  $s_2 = 0.274$ ,  $\langle k \rangle = 4(1 - 0.274) = 3.726$ , 代入  $\lambda_c = 1/[\langle k \rangle (1 - s_2)]$ , 解得  $\lambda_c = 0.47$ 。图 3 是计算机仿真得到的稳态感染比例  $I$  随传播效率  $\lambda$  变化趋势图( $d = 2, p = 0.05, \beta = 1, \gamma = 0.8$ , 初始感染 0.03% 的个体)。图中的  $\lambda_c$  在 0.45 ~ 0.5。仿真结果与理论计算符合得较好。

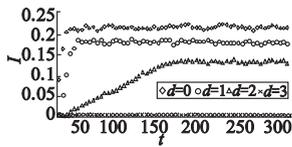


图1 不同局域控制范围对稳态感染比例的影响

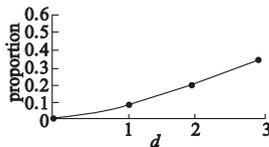


图2 被控制节点比例图

同时从式(5)可知,处于免疫状态的个体失去免疫能力的概率  $\gamma$  增大则稳态感染比例  $I$  将增大。图 4 显示了这一点( $d = 2, p = 0.05, \alpha = 0.8, \beta = 1$ , 初始感染 0.03% 的个体)。

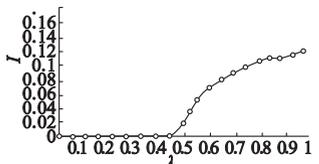


图3 稳态感染比例I随传播效率lambda变化图

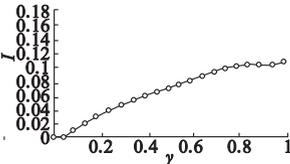


图4 稳态感染比例I随失去免疫概率gamma变化图

前面的理论分析得到传播临界值  $\lambda_c$  与失去免疫概率  $\gamma$  无关的结论。图 5 是失去免疫概率  $\gamma$  对传播临界值  $\lambda_c$  的影响( $d = 2, p = 0.05, \beta = 1$ , 初始感染 0.03% 的个体)。从图中可以看出,  $\gamma$  较小时对传播临界值  $\lambda_c$  还是有一定的影响;但当  $\gamma > 0.2$  后传播临界值  $\lambda_c$  几乎不再随  $\gamma$  变化。

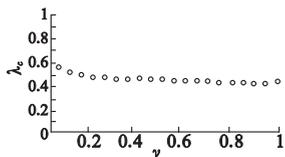


图5 失去免疫概率gamma对传播临界值lambda的影响

#### 4 结束语

本文提出了一个带有局域控制的二维规则网络 SIRS 模型。理论分析和计算机仿真都表明系统状态随时间的演化最终会达到一个稳定状态。稳态感染比例  $I$  与传播效率  $\lambda$ 、被控制节点比例  $s_2$  和免疫个体失去免疫能力的概率  $\gamma$  有关。只有当  $\lambda > \lambda_c = 1/[\langle k \rangle (1 - s_2)]$  时,病毒才能在网络中持续传播。在其他条件相同时,局域控制范围  $d$  越大,稳态感染比例  $I$  越

小。免疫个体失去免疫能力的概率  $\gamma$  越小,则稳态感染比例  $I$  也越小。当被控制节点比例  $s_2$  和控制节点被传染概率  $p$  较小时,稳态感染比例  $I$  与控制节点被传染概率  $p$  无关。

根据以上结论,可以采取以下策略控制二维规则网络中的 SIRS 病毒传播:a)在条件允许的情况下,加大网络中局域控制的范围  $d$ ,则  $s_2$  增大,由  $S = \beta/\alpha\langle k \rangle + s_2$  可知未感染个体比例将增大;b)提高治愈率  $\beta$  的同时,可以减小病毒的传播效率  $\lambda = \alpha/\beta$ ,当  $\lambda < 1/[\langle k \rangle (1 - s_2)]$  时网络中病毒不能传播;c)由  $1/I = C\beta/\gamma + C$  可知,降低免疫个体失去免疫能力的概率  $\gamma$  可以使被感染节点比例  $I$  降低,这里  $C = \alpha\langle k \rangle / (\alpha\langle k \rangle - \beta - s_2\alpha\langle k \rangle)$ 。

#### 参考文献:

- [1] BAILEY N T J. The mathematical theory of infectious diseases and its applications[M]. New York: Hafner Press, 1975.
- [2] ANDERSON R M, MAY R M. Infectious diseases in humans[M]. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [3] DIEKMANN O, HEESTERBEEK J A P. Mathematical epidemiology of infectious disease: model building, analysis and interpretation [M]. New York: Wiley, 2000.
- [4] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic spreading in scale-free network[J]. Physical Review Letters, 2001, 84(14): 3200-3203.
- [5] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[J]. Physical Review E, 2001, 63(6): 066117.
- [6] VOLCHENKOV D, VOLCHENKOVA L, BLANCHARD P. Epidemic spreading in a variety of scale free networks[J]. Physical Review E, 2002, 66(4): 046137.
- [7] LIU Jing-zhou, WU Jin-shan, YANG Z R. The spread of infectious disease on complex networks with household-structure[J]. Physica A, 2004, 341: 273-280.
- [8] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Immunization of complex networks[J]. Physical Review E, 2002, 65(3): 036104.
- [9] 许丹,李翔,汪小帆. 复杂网络病毒传播的局域控制研究[J]. 物理学报, 2007, 56(3):1313-1318.
- [10] ERDŐS P, RÉNYI A. On random graphs [J]. Publ Math Inst Hung Acad Sci, 1959, 6: 290-297.
- [11] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of small-world networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.
- [12] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.

(上接第 1476 页)

#### 参考文献:

- [1] 黄刚,王汝传. 网络计算中基于 RBAC 的访问控制模型的研究 [J]. 微计算机信息, 2007, 23(18): 130-132.
- [2] 龙涛,洪帆,刘铭. 一种基于任务和角色的计算网格访问控制模型 [J]. 计算机工程, 2008, 34(4): 176-178.
- [3] 王胜川,刘方爱,石晓晶. 基于网络环境的动态自适应信任机制研究[J]. 计算机技术与发展, 2008, 18(9): 151-154.
- [4] 马礼,郑邦民. 信息网络环境下的综合信任度评价模型[J]. 清华大学学报:自然科学版, 2009, 49(4): 599-603.
- [5] TRAN H, WATTERS P, HITCHENS M, et al. Trust and authoriza-

- tion in the grid: a recommendation model[C]// Proc of International Conference on Pervasive Services. Piscataway, NJ: IEEE, 2005:433-436.
- [6] JOSANG A, GRANDISON T. Conditional inference in subjective logic [C]//Proc of the 6th International Conference on Information Fusion. Gallup, NM: University New Mexico, 2003:635-642.
- [7] 邓勇,陈建刚,王汝传. 网络计算环境的一种基于信任度的授权委托机制[J]. 通信学报, 2008, 29(9):10-17.
- [8] ZHANG Guang-sen, PARASHAR M. Dynamic context-aware access control for grid application[C]//Proc of the 4th International Workshop on Grid Computing. Washington DC: IEEE Computer Society, 2003:101.