

# 中心裂纹圆盘裂纹形状尺寸对应力强度因子的影响\*

董世明, 方美彦, 夏源明

(1. 中国科学技术大学力学与机械工程系, 安徽合肥 230027)

(2. 中国科学院、中国科学技术大学材料力学行为和设计重点实验室, 安徽合肥 230027)

**摘要:**采用有限元数值分析方法,分析了由脆性材料制成的中心裂纹圆盘试件,在复合模式加载条件下裂纹形状尺寸,尤其是裂纹宽度和中心小孔半径对应力强度因子的影响.结果表明:槽式和槽孔组合式裂纹圆盘试件,其I型无量纲应力强度因子 $F_I$ 均比按理想裂纹推出的解析解大,而II型无量纲应力强度因子 $F_{II}$ 均比解析解小;随着加载角度增加, $F_I$ 的数值解与解析解的差值逐渐变小,而 $F_{II}$ 的差值逐渐变大;同时,随着裂纹槽宽度或中心小孔半径的增加,应力强度因子数值解与解析解之差逐步增加.依据数值分析的结果,给出了这两类试件相对于理想中心裂纹圆盘试件应力强度因子解析解的修正公式.

**关键词:**中心裂纹圆盘;裂纹形状;应力强度因子;槽式裂纹;槽孔组合式裂纹

中图分类号:O346.1<sup>+</sup>1

文献标识码:A

## 0 引言

对中心裂纹圆盘(centre cracked circular disk—CCCD)型试件,由于能方便地实现纯I型、纯II型及I+II复合型裂纹的加载方式,且存在应力强度因子的解析式(Atkinson等人<sup>[1]</sup>于1982年推出近似解,董等人<sup>[2]</sup>在2003年推出精确解),所以在脆性材料的断裂韧度测试方面得到广泛应用<sup>[3-10]</sup>.中心裂纹圆盘的应力强度因子公式都是在理想裂纹的假设下得到的,而中心裂纹圆盘型试件的实际裂纹状态并非理想的,即裂纹总是有宽度和形状的.裂纹宽度和形状对中心裂纹圆盘的应力强度因子可能产生影响.文献[9]用有限元方法分析了纯I型加载条件下常规槽式裂纹和槽孔组合式裂纹对圆盘的无量纲应力强度因子的影响,但未涉及复合模式加载条件.本文在中心裂纹圆盘应力强度因子解析解<sup>[2]</sup>的基础上,用数值分析方法研究复合模式加载条件下裂纹宽度及形状对应力强度因子的影响,并找出了相应的对解析解的修正方法.

\* 收稿日期:2003-10-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 10202021)

作者简介:董世明,男,1963年生,博士生.研究方向:断裂力学. E-mail: smdong@mail.ustc.edu.cn

## 1 中心裂纹圆盘应力强度因子的解析公式

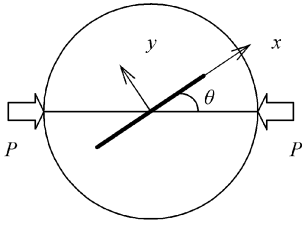


图 1 复合模式加载示意图

Fig. 1 Schematic of the mixed-mode loading

如图 1 所示,中心裂纹圆盘在一对集中载荷  $P$  作用下,其应力强度因子的计算公式<sup>[2]</sup>为

$$K_{\text{I}}^0 = \sigma \sqrt{\pi a} F_{\text{I}}^0 = \frac{P}{\pi BR} \sqrt{\pi a} F_{\text{I}}^0 \quad (1)$$

$$K_{\text{II}}^0 = \sigma \sqrt{\pi a} F_{\text{II}}^0 = \frac{P}{\pi BR} \sqrt{\pi a} F_{\text{II}}^0 \quad (2)$$

$$\sigma = P / (\pi BR) \quad (3)$$

这里,右上角的 0 表示解析解,  $B$  为试件厚度,  $R$  为圆盘试件半径,  $a$  为裂纹半长,无量纲应力强度因子  $F_{\text{I}}^0$ 、 $F_{\text{II}}^0$  在准静态加载条件下与裂纹相对长度  $\alpha$  ( $\alpha = a/R$ )、加载角  $\theta$  等有关。

按照纯 I 型和纯 II 型裂纹的定义,当  $K_{\text{I}}^0 \neq 0$  且  $K_{\text{II}}^0 = 0$  时,为纯 I 型裂纹;当  $K_{\text{I}}^0 = 0$  且  $K_{\text{II}}^0 \neq 0$  时,为纯 II 型裂纹。根据式(1)、(2)可以得到纯 I 型裂纹的加载条件为  $\theta = 0$ ;纯 II 型裂纹的临界加载角  $\theta_c$  与裂纹相对长度  $\alpha$  有关,其有关结果可参考文献[2]表 5。

从参考文献[2]表 5 可以看出:纯 II 型裂纹的临界加载角  $\theta_c$  的取值范围应当是  $0 \sim 30^\circ$ 。因此,数值分析时加载角的范围在  $0 \sim 30^\circ$  左右。

## 2 有限元数值分析

### 2.1 模型参数

采用 ANSYS 软件<sup>[11]</sup>进行数值分析,试件为有机玻璃(PMMA)。PMMA 为一种弹脆性材料,其有关性能参数及试件的几何参数如表 1 所示。

表 1 材料参数与几何参数表

Tab. 1 Material parameters and geometric parameters

试件	剪切模量 $G$	泊松比 $\nu$	密度 $\rho$	试件半径 $R$	厚度 $B$
PMMA	$1.7543 \times 10^9$ Pa	0.388	1 170 kg/m	0.01 m	0.005 m

数值分析时,试件采用 PLANE2 单元<sup>[11]</sup>,即具有 6 节点的三角形等参元,并在裂尖处使用奇异单元。

### 2.2 应力强度因子

根据有限元数值分析得到的圆盘的全场解,可直接得到应力强度因子,其计算公式为<sup>[11]</sup>

$$K_{\text{I}}^n = \pm \frac{2G \sqrt{2\pi} u_y}{1+k} \sqrt{r}, \quad K_{\text{II}}^n = \pm \frac{2G \sqrt{2\pi} u_x}{1+k} \sqrt{r} \quad (4)$$

这里“+”号对应上裂纹面,“-”号对应下裂纹面,右上角的  $n$  表示数值解,  $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  (平面应力)或  $k = 3 - 4\nu$  (平面应变)。

应力强度因子  $K_{\text{I}}^n$  和  $K_{\text{II}}^n$  计算出来后,就进行无量纲化处理,得到复合模式加载条件下, I 型和 II 型无量纲应力强度因子分别为

$$F_{\text{I}}^n = F_{\text{I}}^n(\alpha, \theta) = \frac{K_{\text{I}}^n}{\sigma \sqrt{\pi a}}, \quad F_{\text{II}}^n = F_{\text{II}}^n(\alpha, \theta) = \frac{K_{\text{II}}^n}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (5)$$

## 2.3 计算模型和方法考评

对图2所示的裂纹相对长度  $\alpha = 0.5$  的理想裂纹的计算模型, 计算得到不同加载角下无量纲应力强度因子  $F_{\perp}^n$  和  $F_{\parallel}^n$  如图3所示, 相应的解析解  $F_{\perp}^0$  和  $F_{\parallel}^0$  也列在图3中。

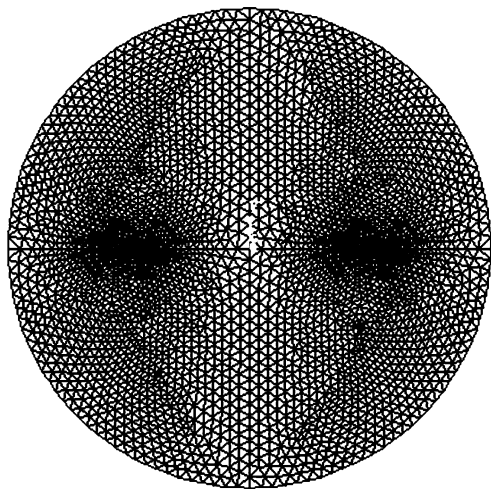


图2 理想裂纹数值分析模型

Fig.2 FEM Model for ideal crack specimen

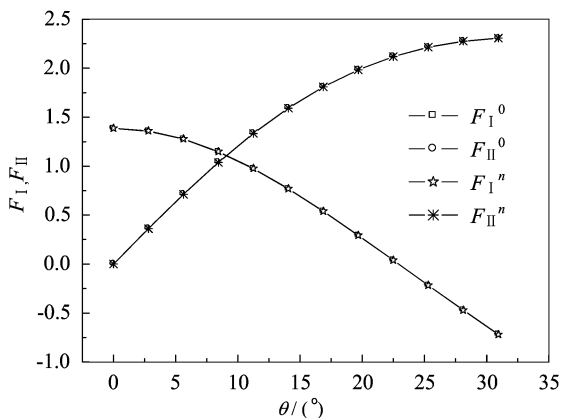


图3 不同计算方法得到的  $F_{\perp}$  和  $F_{\parallel}$

Fig.3  $F_{\perp}$  and  $F_{\parallel}$  at different methods

从图3可以看出, 数值解和解析解吻合得非常好. 这说明采用的计算模型和方法是可靠有效的。

## 3 非理想裂纹的数值结果与分析

### 3.1 槽式裂纹

槽式裂纹的计算模型如图4所示, 假设槽宽的一半为  $b_0$ . 数值计算得到  $\alpha = 0.5$  和不同  $b_0$  时无量纲应力强度因子  $F_{\perp}^n$  和  $F_{\parallel}^n$  如图5所示, 相应的理想裂纹的解析解  $F_{\perp}^0$  和  $F_{\parallel}^0$  也列在图5中。

同理可得,  $\alpha = 0.3$ 、 $0.4$  和  $0.6$  时的  $F_{\perp}$  和  $F_{\parallel}$ , 因篇幅所限, 不再列出。

由上述计算结果可以得出如下结论:

1) 槽宽对  $F_{\perp}$ 、 $F_{\parallel}$  有较大影响. 随着  $b_0$  的增加, 数值解偏离解析解的程度逐步增加; 同一  $b_0$  时,  $F_{\perp}^n$  偏离  $F_{\perp}^0$  的程度随着  $\theta$  的增加而降低, 而  $F_{\parallel}^n$  偏离  $F_{\parallel}^0$  的程度却随着  $\theta$  的增加而增加。

2) 计算分析表明, 当  $b_0$  大于  $0.2$  mm 时,  $F_{\perp}^n$ 、 $F_{\parallel}^n$  与  $F_{\perp}^0$ 、 $F_{\parallel}^0$  的相对误差已大于  $5\%$ , 因

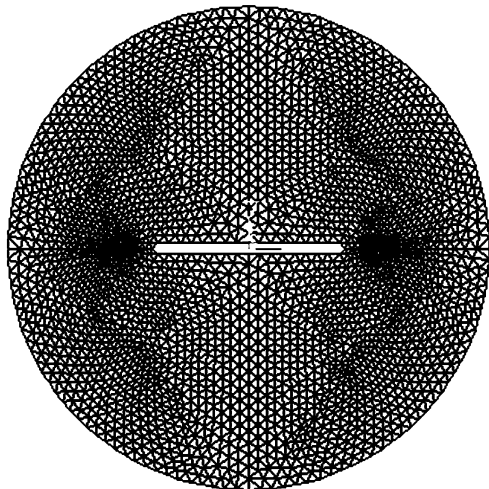


图4 槽式裂纹数值分析模型

Fig.4 FEM model for notched crack specimen

此在试验中若采用  $F_{I}^0$  和  $F_{II}^0$  来表示  $F_{I}^n$  和  $F_{II}^n$  时,必须进行修正. 本文给出不同  $\alpha$  时的修正公式:

$$F_{II} = F_{II}^0 \times f_2, \quad F_{I} = F_{I}^0 + \Delta F_{I} \quad (6)$$

其中:

$$f_2 \approx 1 + 0.0338b_0 - 1.99924b_0^2 + 3.29333b_0^3,$$

$$\Delta F_{I} \approx (0.20725 + 0.59348b_0)b_0 \times (2.40485\alpha - 0.2569) \times f(\theta),$$

$$f(\theta) = 1.99\cos 2\theta + 0.196\sin 2\theta - 1.$$

说明:  $\Delta F_{I}$  公式中的  $b_0$  及其后继公式中的  $r_0$  均以 mm 为单位.

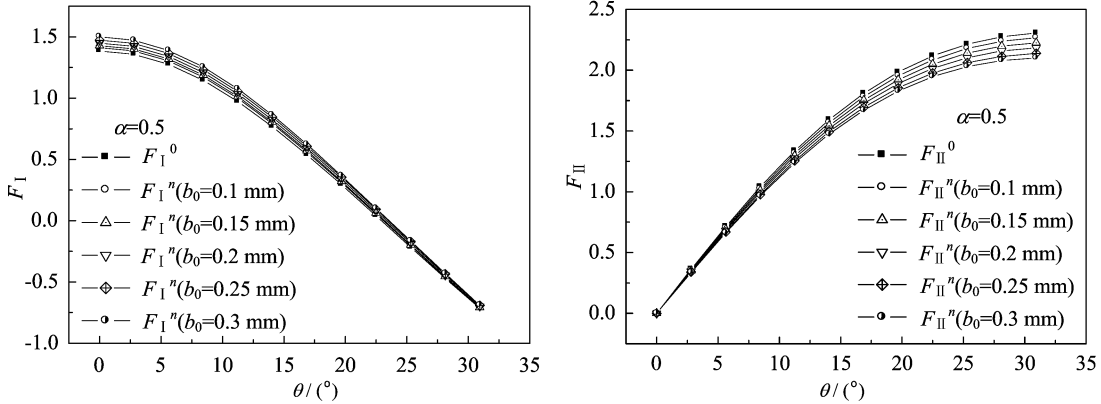


图 5  $\alpha = 0.5$  时,  $F_{I}$ ,  $F_{II}$  随  $\theta$  的变化关系

Fig. 5 Normalized stress intensity factors  $F_{I}$  and  $F_{II}$  for  $\alpha = 0.5$

### 3.2 槽孔组合式裂纹

槽孔组合式裂纹的计算模型如图 6 所示. 数值计算得到  $\alpha = 0.5$  和孔半径  $r_0 = 1$  mm 及不同  $b_0$  时无量纲应力强度因子  $F_{I}^n$  和  $F_{II}^n$  如图 7 所示, 相应的理想裂纹的解析解  $F_{I}^0$  和  $F_{II}^0$  也列在图 7 中. 作者还得到  $\alpha = 0.5$ ,  $r_0$  分别等于 1.5 mm、2 mm、2.5 mm 和不同  $b_0$  时无量纲应力强度因子  $F_{I}^n$  和  $F_{II}^n$  及其对应的  $F_{I}^0$  和  $F_{II}^0$ . 限于篇幅仅给出  $b_0 = 0.1$  mm 的结果如图 8 所示.

由图 7、图 8 可以看出:

1) 槽孔组合式裂纹与常规槽式裂纹相比, 应力强度因子发生了显著变化. 但总的说来, 存在中心小孔时, 槽宽对  $F_{I}$ 、 $F_{II}$  的影响已变得微不足道, 基本可略去不计. 而中心小孔的半径  $r_0$  对  $F_{I}$ 、 $F_{II}$  有显著影响, 孔半径  $r_0$  越大,  $F_{I}$ 、 $F_{II}$  的变化越大, 且中心小孔对  $F_{I}$  的影响要远大于对  $F_{II}$  的影响.

2) 若  $r_0 < 2$  mm,  $F_{II}^n$  与  $F_{II}^0$  的相对误差小于 5%, 但当  $r_0 \geq 2$  mm 时,  $F_{II}^n$  与  $F_{II}^0$  的相对误差将大于 5%, 因此, 试验中若采用  $F_{II}^0$  来表示  $F_{II}^n$  时, 必须对  $F_{II}$  的解析解按式 (6) 进

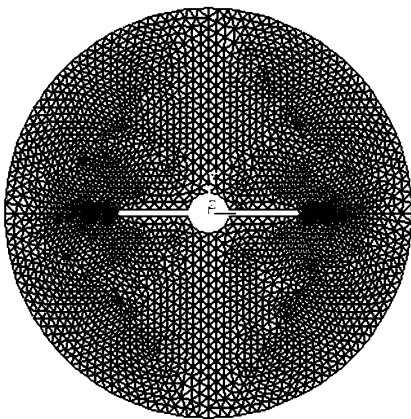


图 6 槽孔组合式裂纹数值分析模型

Fig. 6 FEM for holed-notched crack specimen

行修正,其中

$$f_2 \approx 1 - 0.06159r_0 + 0.04291r_0^2 - 0.01182r_0^3 \quad (7)$$

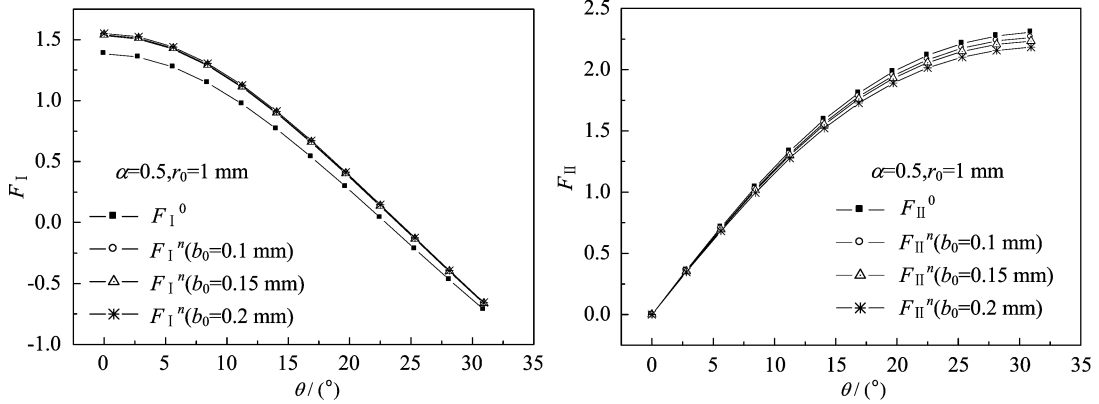


图 7  $r_0 = 1 \text{ mm}$  时,  $F_I$ 、 $F_{II}$  随  $\theta$  的变化关系

Fig. 7 Normalized stress intensity factors  $F_I$  and  $F_{II}$  for  $r_0 = 1 \text{ mm}$

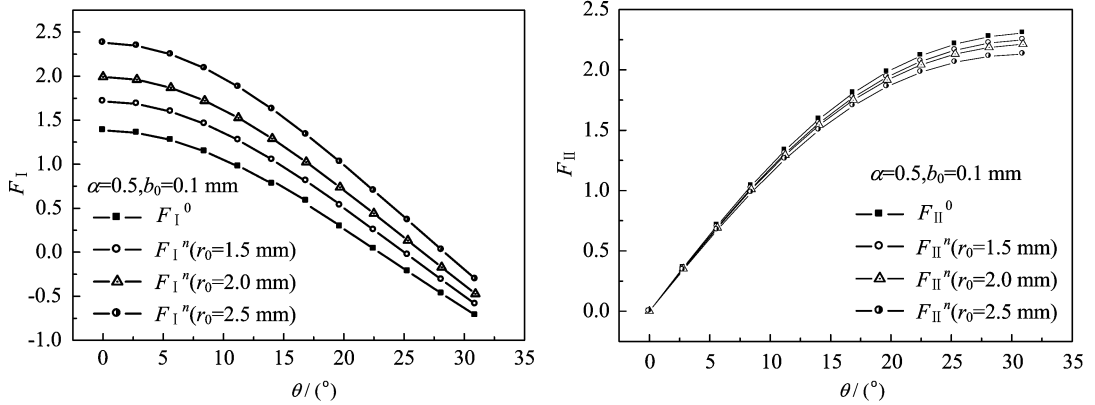


图 8  $b_0 = 1 \text{ mm}$  时,  $F_I$ 、 $F_{II}$  随  $\theta$  的变化关系

Fig. 8 Normalized stress intensity factors  $F_I$  and  $F_{II}$  for  $b_0 = 1 \text{ mm}$

3) 与  $F_{II}$  相比,  $F_I$  偏离程度要高的多,即使  $r_0 = 1 \text{ mm}$ ,  $F_I^n$  与  $F_I^0$  的相对误差也要超过 10%,因此,试验中若采用  $F_I^0$  来表示  $F_I^n$  时,必须按照式(6)对  $F_I$  的解析公式进行修正,其中

$$\Delta F_I \approx f(r) (0.97995 - 0.31088b_0 + 5.11406b_0^2) (1.15\cos 2\theta - 0.15) \quad (8)$$

$$f(r) \approx 0.10383 - 0.16174r_0 + 0.20721r_0^2 \quad (9)$$

可以看出,由于在试件中间开了一个小孔,中心裂纹圆盘试件应力强度因子的解析公式(尤其是 I 型应力强度因子公式,即式(1))已经无法直接用于确定脆性材料的断裂韧度,否则将会带来较大的实验误差;而将解析公式中的  $F_I$ 、 $F_{II}$  按照本文的方法进行修正后,中心裂纹圆盘试件应力强度因子的解析公式可在槽孔组合式裂纹圆盘试件中继续使用。

说明:修正公式(7)~(9)仅适用于裂纹相对长度  $\alpha = 0.5$  时的情况,不能简单的推广

使用于  $\alpha \neq 0.5$  时的情况. 事实上, 在其它条件相同时, 裂纹相对长度  $\alpha$  越小,  $F_{\perp}$ 、 $F_{\parallel}$  受中心小孔的影响越大. 因篇幅所限, 不再一一列出.

## 4 结论

1) 裂纹形状和宽度对中心裂纹圆盘试件的应力强度因子有影响. 总体而言, 随着槽宽度或孔半径的增加, 应力强度因子数值解偏离解析解的程度逐步增加.

2) 具有一定形状和宽度的实际裂纹圆盘试件, 其无量纲应力强度因子  $F_{\perp}$  均比按理想裂纹推出的解析解大, 而  $F_{\parallel}$  均比解析解小. 随着加载角度增加,  $F_{\perp}$  的数值解与解析解的差值逐渐变小, 而  $F_{\parallel}$  的差值逐渐变大.

3) 对于槽孔组合式裂纹, 由于在试件中间开了一个小孔, 中心裂纹圆盘试件应力强度因子的解析公式(尤其是 I 型应力强度因子公式)不能直接用于确定脆性材料的断裂韧度, 否则将会带来较大的实验误差.

4) 无论是槽式裂纹, 还是槽孔组合式裂纹, 可以根据裂纹的宽度或孔的半径, 采用本文的修正公式来给出实际的应力强度因子.

## 参 考 文 献

- [1] Atkinson C, Smelser R E, Sanchez J. Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test [J]. *Int J Fract*, 1982, 18(4):279-291.
- [2] 董世明, 汪洋, 夏源明. 中心裂纹圆盘集中载荷作用下的应力强度因子[J]. *中国科学技术大学学报*, 2003, 33(3):310~317.
- [3] Shetty D K, Rosenfield A R, Duckworth W H. Mixed-mode fracture in biaxial stress state: application of the diametral - compression (Brazilian disk) test [J]. *Engng Fract Mech*, 1987, 26(6):825-840.
- [4] Liu C, Huang Y, Stout M G. Enhanced mode-II fracture toughness of an epoxy resin due to shear banding [J]. *Acta Mater*, 1998, 46(16):5647-5661.
- [5] Fowell R J, Xu C. The use of the cracked Brazilian disk geometry for rock fracture investigation [J]. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr*, 1994, 31(6):571-579.
- [6] Krishnan G R, Zhao X L, Zaman M, *et al.* Fracture toughness of a soft sandstone [J]. *Int J Rock Mech*, 1998, 35(6):195-218.
- [7] Al-Shayea N A, Khan K, Abduljawwad S N. Effects of confining pressure and temperature on mixed-mode (I - II) fracture toughness of a limestone rock [J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2000, 37(4):629-643.
- [8] Awaji H, Sato S. Combined mode fracture toughness measurement by the disk test [J]. *J Engng Mater Tech*, 1978, 100:175-182.
- [9] Tang T X, Bazant Z P, Yang S C, *et al.* Variable-notch one-size test method for fracture energy and process zone length [J]. *Engng Fract Mech*, 1996, 55(3):383-404.
- [10] Yang S C, Tang T X, Zollinger D, *et al.* Splitting tension tests to determine concrete fracture parameters by peak-load method [J]. *Advn Cem Bas Mat*, 1997, 5(1):18-28.
- [11] 王国强. 实用工程数值模拟技术及其在 ANSYS 上的实践[M]. 西安:西北工业大学出版社, 1999.

# Effect of Crack Shape and Size on Stress Intensity Factors of Central Cracked Circular Disk

DONG Shi-ming, FANG Mei-yan, XIA Yuan-ming

(1. *Department of Modern Mechanics, USTC, Hefei, 230027, China*)

(2. *Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, USTC, CAS, Hefei, 230027, China*)

**Abstract:** Under the mixed-mode loading, the FEM numerical method is employed to investigate the effect of crack shape and size, especially crack width and the radius of the central hole, on the stress intensity factors for the central cracked circular disk specimen made from brittle materials. The computation results show that the Mode- I normalized stress intensity factor of the central cracked circular disk specimens with a notched crack or holed-notched crack is always greater than the corresponding analytic result which calculated from the closed-form formulas of the central cracked circular disk with an ideal crack, while the Mode- II normalized stress intensity factor is always less than the corresponding analytic result. The difference of the analytic result and numerical result of Mode- I normalized stress intensity factor becomes smaller and smaller as the loading angle increases, while the difference of Mode- II normalized stress intensity factor becomes greater and greater. On the other hand, the differences of the analytic result and numerical result of the normalized stress intensity factors increase gradually with the increase of the crack width or the radius of the central hole. Based on the obtained results, the modified formulas for the stress intensity factors, which are derived from the central cracked circular disk with an ideal crack, are presented for the two kinds of specimens with a notched crack or holed-notched crack, respectively.

**Key words:** central cracked circular disk (CCCD); crack shape; stress intensity factor; notched crack; holed-notched crack