

含周期性裂纹正交各向异性板 平面问题的应力场分析

郭俊宏, 卢子兴*

(北京航空航天大学 固体力学所, 北京 100191)

摘要: 通过引入适当的 Westergaard 应力函数, 采用复变函数方法和待定系数法对含周期性裂纹正交各向异性纤维增强复合材料板的 I 型、II 型问题中裂纹尖端附近的应力场进行了力学分析。在远处对称载荷与斜对称载荷作用下, 先给出 I 型、II 型问题在裂纹尖端处的应力强度因子, 然后导出用应力强度因子表示的 I 型、II 型裂纹问题应力场的解析表达式。此外, 应力场大小与材料常数有关, 这是正交各向异性材料不同于各向同性材料的特征。由于裂纹的周期分布, 应力强度因子的大小取决于形状因子。结果表明, 形状因子随着裂纹长度的增加而增大, 随着裂纹间距的增大而逐渐下降, 当裂纹间距趋于无穷大时, 退化为含单个中心裂纹正交各向异性纤维增强复合材料板的结果。

关键词: 正交各向异性板; 周期性裂纹; Westergaard 应力函数; 应力强度因子; 应力场

中图分类号: O346.1; TB330.1 **文献标志码:** A

Analysis of stress fields for plane problem of periodic cracks in orthotropic composites

GUO Junhong, LU Zixing*

(Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: By introducing proper Westergaard's stress function, the stress fields for mode I and II problems of periodic cracks in orthotropic composites were analyzed using the complex variable function method and approach of undetermined coefficients. Firstly, the stress intensity factors (SIFs) at the crack tip for mode I and II problems were presented under symmetrical loadings and skew-symmetrical loadings at infinity. The analytic expressions of the stress fields are then induced by the SIFs. In addition, the stress fields are related to the material constants, which is the characteristic of orthotropic materials different from the isotropic materials. Due to the distribution of periodic cracks in an orthotropic plate, the SIFs are determined by the shape factor. The results show that the shape factor increases as the crack length becomes longer, but decreases as the crack spacing becomes larger. Especially, the present result can reduce to the case of the central crack in an orthotropic plate when the crack spacing tends to infinity.

Keywords: orthotropic plate; periodic cracks; Westergaard's stress function; SIFs; stress field

纤维增强复合材料具有高比强度、高比刚度并能够通过控制纤维与基体的粘结或纤维的铺设方式来设计复合材料结构的性能, 是一种很有发展前景的工程结构材料, 已广泛应用于航空、航天、国防、交通和化工等诸多工程领域。但是, 复合材料在高应力水平状态下, 内部极易产生微观裂纹, 且随着变形的增加, 这些微观裂纹可能进一步扩展成宏观裂纹或是穿透性裂纹, 最终导致结构的破坏^[1]。因

此, 研究复合材料板中的裂纹缺陷问题具有重要的意义。

复合材料的基体开裂是复合材料断裂模式中较简单的一种破坏方式, 一直受到许多科研工作者的广泛关注, 并取得了一些重要成果^[1-5]。周期性分布裂纹是材料结构中一个重要而又较难解决的问题, 在经典材料的断裂力学中已做了较多研究^[6-9]。然而, 复合材料中周期裂纹问题的研究却较少, 这

是由于复合材料的组分不同、各向异性力学特征以及裂纹边界条件的复杂性的缘故。Wijeyewickrema 和 Keer^[10]研究了纤维增强脆性基复合材料中的多裂纹问题,得到了不同剪切模量和纤维体积下的应力强度因子和应力场; Kaw 和 Besterfield^[11]基于平面应力和应变弹性理论,提出了单向纤维增强脆性基复合材料中周期裂纹的断裂模型,并利用奇异积分方程研究了纤维增强相、裂纹间距、位置和长度对裂纹尖端的应力强度因子及最大裂纹张开位移的影响;路见可^[12]采用周期 Riemann - Hilbert 边值问题研究了各向异性体中周期裂纹的平面问题,在此基础上, Cai^[13]进行了进一步推广,得到了各向异性体中周期裂纹平面问题的封闭形式解,但计算复杂,所得结果不便于具体分析。肖俊华^[14]利用椭圆函数理论、映射技术及解析函数边值问题求解了正交各向异性材料中双周期裂纹的反平面剪切问题,得到了问题的全场封闭解。最近,肖俊华等^[15]用 Eshelby 等效夹杂方法和 Laurent 级数展开技术,并结合双准周期 Riemann 边值问题理论,研究了双周期含涂层纤维增强复合材料反平面问题,并得到其解析解。考虑到工程上复合材料的断裂分析、结构设计以及许多纤维复合材料是正交各向异性等因素,本文中给出一种求解含周期性裂纹的纤维增强脆性基复合材料问题的简单方法,即通过引入适当的 Westergaard 应力函数,利用复变函数方法和待定系数法对含周期性裂纹正交各向异性复合材料板的 I 型、II 型问题中裂纹尖端附近的应力场进行分析。在远处对称载荷与斜对称载荷作用下,文中得到了 I 型、II 型问题裂纹端点处的应力强度因子及应力场精确解析解。所得结果可为工程中复合材料的断裂分析和结构设计提供理论参考。

1 力学模型

设无限大线弹性正交各向异性纤维增强复合材料板含有相距为 $2b$ 、裂纹长为 $2a$ 的共线周期排列的穿透裂纹,如图 1 所示,且 2 个坐标轴平行于正交各向异性体的材料弹性主方向。在平面应力状态下,二维线弹性体的相容方程为^[16]

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

引入应力函数 $U=U(x,y)$,使得

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

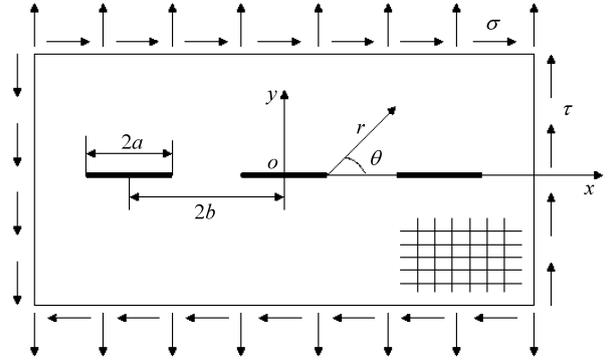


图 1 含周期性裂纹的正交各向异性板

Fig. 1 Orthotropic plate with periodic cracks

线弹性平面问题的本构关系为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

将式(2)与式(3)代入式(1),得

$$B_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + (2B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

这就是正交异性复合材料板的基本方程^[2]。

如图 1 所示, I 型周期裂纹的边界条件为

$$\begin{cases} |y| \rightarrow \infty: \sigma_y = \sigma, \tau_{xy} = 0 \\ y = 0, 2nb - a < x < 2nb + a: \\ \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ |x| \rightarrow \infty: \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

II 型周期裂纹的边界条件为

$$\begin{cases} |y| \rightarrow \infty: \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau \\ y = 0, 2nb - a < x < 2nb + a: \\ \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ |x| \rightarrow \infty: \tau_{xy} = \tau \end{cases} \quad (6)$$

因此,对 I 型、II 型裂纹尖端的应力场分析分别转化为求解偏微分方程的边值问题式(4)与式(5)以及式(4)与式(6)。

设

$$U = U(x + \mu y)^{[1,4]} \quad (7)$$

将上式代入式(4),得到特征方程为

$$B_{11}\mu^4 + (2B_{12} + B_{66})\mu^2 + B_{22} = 0 \tag{8}$$

这是一个双二次方程，其判别式为

$$\Delta = \left(\frac{2B_{12} + B_{66}}{B_{11}}\right)^2 - 4\frac{B_{22}}{B_{11}} \tag{9}$$

当 $\Delta > 0$ 时，方程(8)的解为

$$\mu_1 = i\beta_1, \mu_2 = i\beta_2, \mu_3 = \bar{\mu}_1, \mu_4 = \bar{\mu}_2 \tag{10}$$

其中

$$\beta_1^2 = \frac{2B_{12} + B_{66}}{2B_{11}} - \sqrt{\left(\frac{2B_{12} + B_{66}}{2B_{11}}\right)^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}},$$

$$\beta_2^2 = \frac{2B_{12} + B_{66}}{2B_{11}} + \sqrt{\left(\frac{2B_{12} + B_{66}}{2B_{11}}\right)^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}},$$

$$(\beta_2 > \beta_1 > 0) \tag{11}$$

当 $\Delta < 0$ 时，方程(8)的解为

$$\mu_1 = \alpha + i\beta, \mu_2 = -\alpha + i\beta, \mu_3 = \bar{\mu}_1, \mu_4 = \bar{\mu}_2 \tag{12}$$

其中

$$2\alpha^2 = \sqrt{\frac{B_{22}}{B_{11}}} - \frac{2B_{12} + B_{66}}{2B_{11}},$$

$$2\beta^2 = \sqrt{\frac{B_{22}}{B_{11}}} + \frac{2B_{12} + B_{66}}{2B_{11}}, \quad (\beta > \alpha > 0) \tag{13}$$

记

$$z_j = x + \mu_j y = x_j + iy_j, \quad j = 1, 2 \tag{14}$$

即当 $\Delta > 0$ 时，有

$$x_1 = x, y_1 = \beta_1 y; x_2 = x, y_2 = \beta_2 y \tag{15}$$

当 $\Delta < 0$ 时，有

$$x_1 = x + \alpha y, y_1 = \beta y; x_2 = x - \alpha y, y_2 = \beta y \tag{16}$$

则基本方程(4)可化为^[4,17]

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right) U = 0 \tag{17}$$

由式(17)知，方程(4)有实值解析解

$$U = \sum_{j=1}^2 [a_j \text{Re}(\bar{\bar{U}}_j) + b_j \text{Im}(\bar{\bar{U}}_j)] \tag{18}$$

其中

$$\bar{\bar{U}}_j = \bar{\bar{U}}_j(z_j), \bar{U}_j = \bar{U}_j(z_j),$$

$$\frac{d\bar{\bar{U}}_j}{dz_j} = \bar{U}_j, \frac{d\bar{U}_j}{dz_j} = U_j, \quad j = 1, 2 \tag{19}$$

将式(18)和式(19)代入式(2)，可求得应力场如下：

$$\sigma_x = \sum_{j=1}^2 [a_j \text{Re}(\mu_j^2 U_j) + b_j \text{Im}(\mu_j^2 U_j)],$$

$$\sigma_y = \sum_{j=1}^2 [a_j \text{Re}(U_j) + b_j \text{Im}(U_j)],$$

$$\tau_{xy} = - \sum_{j=1}^2 [a_j \text{Re}(\mu_j U_j) + b_j \text{Im}(\mu_j U_j)]. \tag{20}$$

2 周期性 I 型裂纹的 Westergaard 应力函数解

为了求解边值问题式(4)与式(5)，选取如下 Westergaard 应力函数^[18]：

$$U_j = \frac{\sigma \sin \frac{\pi z_j}{2b}}{\sqrt{\left(\sin \frac{\pi z_j}{2b}\right)^2 - \left(\sin \frac{\pi a}{2b}\right)^2}}, \quad j = 1, 2 \tag{21}$$

由式(14)与式(21)，得

$$x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty: U_j = \sigma,$$

$$y = 0, 2nb - a < x < 2nb + a;$$

$$U_j = - \frac{i\sigma \sin \frac{\pi x}{2b}}{\sqrt{\left(\sin \frac{\pi a}{2b}\right)^2 - \left(\sin \frac{\pi x}{2b}\right)^2}} \tag{22}$$

若定义 I、II 型应力强度因子为

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \lim_{z_j \rightarrow a} [2\pi(z_j - a)]^{1/2} U_j(z_j), \quad j = 1, 2; \tag{23}$$

将式(21)代入式(23)得到 I 型周期裂纹的应力强度因子为

$$K_I = \sigma \sqrt{2b \tan \frac{\pi a}{2b}} = Y\sigma \sqrt{\pi a} \tag{24}$$

其中

$$Y = \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}} \tag{25}$$

无限大线弹性正交各向异性纤维复合材料板中仅含一条长为 $2a$ 的穿透裂纹的应力强度因子为 $\sigma \sqrt{\pi a}$ 。由式(24)可知，由于裂纹的周期分布，应力强度因子的影响决定于形状因子 Y 。

图 2 显示了形状因子随裂纹间距和裂纹长度的变化曲线，从图 2 可知：(1) 形状因子在裂纹端点处趋于无穷大，这表明在裂纹尖端处具有应力奇异性；(2) 形状因子随着裂纹长度 a 增加而增大，这表明复合材料所含周期性裂纹的长度越大越容易破坏；(3) 随着裂纹间距 b 的增大，形状因子的曲线逐渐下降并趋于常数 1。换言之，当 $b \rightarrow \infty$ 时，退化为正交异性材料含单个中心裂纹的情形，这与已有结果^[1,3-4]完全一致。

将式(14)、式(23)代入式(21)，则在裂纹尖端附近，有

$$\text{当 } z_j \rightarrow a \text{ 时, } U_j(z_j) = \frac{K_I}{[2\pi(z_j - a)]^{1/2}}$$

或当 $r \rightarrow 0$ 时，

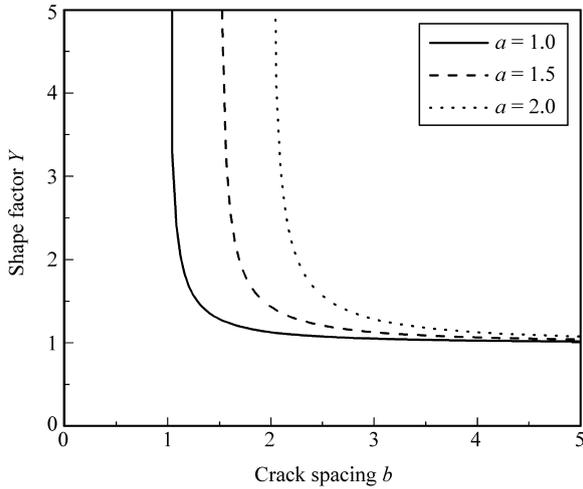


图2 形状因子Y随裂纹间距b的变化曲线

Fig. 2 Variation of shape factor Y with crack spacing b

$$U_j(z_j) = \frac{K_I}{[2\pi r(\cos\theta + \mu_j \sin\theta)]^{1/2}} \quad (26)$$

2.1 对于 $\Delta > 0$ 的复合材料

将式(10)、式(20)和式(22)代入边界条件式(5), 得

$$a_1 = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}, a_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}, b_1 = b_2 = 0 \quad (27)$$

将式(10)、式(27)和式(26)代入式(20), 得到 I 型周期裂纹尖端附近的应力场解析表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \cdot \\ &\quad \operatorname{Re} \left[\frac{\beta_2}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{\beta_1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} \right], \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \cdot \\ &\quad \operatorname{Re} \left[\frac{\beta_2}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{\beta_1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \cdot \\ &\quad \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

2.2 对于 $\Delta < 0$ 的复合材料

将式(12)、式(20)和式(22)代入边界条件式(5), 得

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, b_1 = -b_2 = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (29)$$

从而由式(20)得到 $\Delta < 0$ 的 I 型周期裂纹端点处的应力场解析表达式为

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \cdot$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \alpha \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} + \frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right\} \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{1}{2\alpha} \cdot \\ &\quad \left\{ \alpha \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} + \frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \cdot \\ &\quad \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

3 周期性 II 型裂纹的 Westergaard 应力函数解

为了求解边值问题式(4)与式(6), 选取如下 Westergaard 应力函数为

$$U_j = \frac{\tau \sin \frac{\pi z_j}{2b}}{\sqrt{\left(\sin \frac{\pi z_j}{2b}\right)^2 - \left(\sin \frac{\pi a}{2b}\right)^2}}, \quad j = 1, 2 \quad (31)$$

由式(14)与式(6), 得

$$y \rightarrow \infty: U_j = \tau$$

$$x \rightarrow \infty: U_j = \tau$$

$$y = 0, 2nb - a < x < 2nb + a:$$

$$U_j = -\frac{i\tau \sin \frac{\pi x}{2b}}{\sqrt{\left(\sin \frac{\pi a}{2b}\right)^2 - \left(\sin \frac{\pi x}{2b}\right)^2}} \quad (32)$$

将式(31)代入式(23), 可得到 II 型周期裂纹的应力强度因子为

$$K_{II} = \tau \sqrt{2b \tan \frac{\pi a}{2b}} = Y\tau \sqrt{\pi a} \quad (33)$$

其中 Y 见式(25)。同样, II 型周期裂纹的应力强度因子的影响也决定于形状因子 Y。

类似于 I 型裂纹问题的分析方法, 不难得到 II 型问题的应力场, 下面仅给出相应结果。

对于 $\Delta > 0$ 的复合材料, II 型裂纹问题的应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \cdot \\ &\quad \operatorname{Im} \left[\frac{\beta_2^2}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{\beta_1^2}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \cdot \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \cdot \left[\operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] + \operatorname{Re} \left[\frac{\beta_2}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{\beta_1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right] \quad (34)$$

对于 $\Delta < 0$ 的复合材料, II 型裂纹问题的应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{1}{2\alpha} \cdot \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] + \operatorname{Im} \left[\frac{2\alpha\beta}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} + \frac{2\alpha\beta}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right\} \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{1}{2\alpha} \cdot \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] + \operatorname{Im} \left[\frac{\alpha}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} + \frac{\alpha}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] + \beta \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{1}{2\alpha} \cdot \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} + \frac{\alpha}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] + \beta \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

从式(28)、式(30)、式(34)和式(35)可知, 正交各向异性复合材料中裂纹尖端附近的应力场与材料常数有关, 这点与各向同性材料不同。

4 结 论

通过引入合适的 Westergaard 应力函数, 有效地确定了正交各向异性纤维增强复合材料板中周期性裂纹平面问题的应力场。

(1) 与各向同性材料不同, 正交各向异性复合材料中裂纹尖端处的应力场与材料常数有关。

(2) 与正交各向异性复合材料含单个中心裂纹尖端的应力强度因子相比, 周期性裂纹尖端处的应力强度因子的大小取决于形状因子 Y 。

(3) 形状因子随着裂纹长度的增加而增大, 随着裂纹间距的增大而逐渐减小, 当裂纹间距趋于无限大时, 则退化为单个中心裂纹的结果。

参考文献:

[1] 张少琴, 杨维阳, 张克颢. 复合材料的 Z 断裂准则及专家系统 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
[2] Corten H T. Fracture mechanics of composite (Vol 7) [M].

New York: Academic Press, 1972.
[3] Sih G C, Chen E P. Cracks in composite materials (Vol 6) [M]. Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1981.
[4] 杨维阳, 李俊林, 张雪霞. 复合材料断裂复变方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
[5] Nobile L, Piva A, Viola E. On the inclined crack problem in an orthotropic medium under biaxial loading [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2004, 71(4-6): 29-546.
[6] 刘又文, 蒋持平. 两种各向异性材料界面周期裂纹的反平面问题 [J]. 固体力学学报, 1996, 17(2): 140-144.
Liu Youwen, Jiang Chiping. Antiplane problems of collinear periodical cracks between dissimilar anisotropic materials [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1996, 17(2): 140-144.
[7] 胡卫华, 吕运冰. 周期性 I-II 复合型裂纹的应力强度因子 [J]. 武汉理工大学学报, 2002, 26(1): 123-125.
Hu Weihua, Lü Yunbing. Stress intensity factors of periodic mixed crackle I-II [J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2002, 26(1): 123-125.
[8] Chen Y Z, Lee K Y. An infinite plate weakened by periodic cracks [J]. ASME J Appl Mech, 2002, 69(4): 552-555.
[9] Tada H, Paris P C, Irwin G R. The stress analysis of cracks handbook [M]. Hellertown, Pennsylvania: Del Research Corporation, 1973.
[10] Wijeyewickrema A C, Keer L M. Matrix crack interaction in a fiber-reinforced brittle matrix composite [J]. Int J Solid Strut, 1992, 29(5): 559-570.
[11] Kaw A K, Besterfield G H. Mechanics of multiple periodic brittle matrix cracks in unidirectional fiber-reinforced composites [J]. Int J Solid Strut, 1992, 29 (10): 1193-1207.
[12] 路见可. 关于周期应力平面弹性基本问题 [J]. 力学学报, 1964, 7(4): 316-327.
Lu Chienke. On fundamental problems of plane elasticity with periodic stresses [J]. Acta Mechanica Sinica, 1964, 7(4): 316-327.
[13] Cai H T. A periodic array of cracks in an infinite anisotropic medium [J]. Eng Frac Mech, 1993, 46(1): 133-142.
[14] 肖俊华. 非均匀相双周期排列材料的细观力学研究 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 2008: 62-76.
[15] 肖俊华, 谢新亮, 徐耀玲, 蒋持平. 双周期涂层纤维增强复合材料反平面剪切问题 [J]. 复合材料学报, 2008, 25(3): 168-173.
Xiao Junhua, Xie Xinliang, Xu Yaoling, Jiang Chiping. Problem of doubly periodic coated fiber reinforced composites under antiplane shear [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2008, 25(3): 168-173.
[16] Hearmon R F S. Applied anisotropic elasticity [M]. London: Oxford University Press, 1961.
[17] Sih G C, Liebowitz H. Mathematical theories of brittle fracture (Vol 7) [M]. New York: Academic Press, 1968.
[18] 徐秉业, 黄炎, 刘信声, 孙学伟. 弹性力学与塑性力学解题指导及习题集 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999: 417-441.