第33卷第3期　中国科学技术大学学报　Vol.33,No.3
2003年6月　JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA　Jun. 2003

文章编号:0253-2778(2003)03-0268-08

一类含有临界指数的椭圆型方程正解的存在性*

傅红卓[1,2],沈尧天[2]

(1. 中国科学技术大学数学系,安徽合肥 230026; 2. 华南理工大学应用数学系,广东广州 510640)

摘要:利用没有PS条件的山路引理,研究了以下问题在一定条件下的弱正解的存在性:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+a(x)u^{p-1}=h(x)u^{q}+u^{p^*-1},\ x\in\mathbf{R}^N,\\ u\geqslant 0,\ u\neq 0,\ \int_{\mathbf{R}^N}a(x)|u|^p\mathrm{d}x<+\infty. \end{cases}$$

其中 $a:\mathbf{R}^N\to R$ 是连续非负函数,$h:\mathbf{R}^N\to R$ 是某类可积函数. $2\leqslant p<N$ 且 $p^2\leqslant N$, $p-1<q<p^*-1$, $p^*=\dfrac{Np}{N-p}$. 从而在较弱的条件下推广了 $p=2$ 时的某些结果.

关键词:临界指数;集中紧原理;山路引理;椭圆型方程

中图分类号:O175.25　　**文献标识码:**A

AMS Subject Classifications(2000):35J65

0 引言

本文主要研究了以下问题的弱正解的存在性:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+a(x)u^{p-1}=h(x)u^{q}+u^{p^*-1},\ x\in\mathbf{R}^N,\\ u\geqslant 0,\ u\neq 0,\ \int_{\mathbf{R}^N}a(x)|u|^p\mathrm{d}x<+\infty. \end{cases}\tag{1}$$

其中 $a:\mathbf{R}^N\to R$ 是连续非负函数, $h:\mathbf{R}^N\to R$ 是某类可积函数. $2\leqslant p<N$ 且 $p^2\leqslant N$, $p-1<q<p^*-1$, $p^*=\dfrac{Np}{N-p}$.

记 E 为 $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ 在范数 $\|u\|=\left(\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^p+a(x)|u|^p)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间.

S 是最佳嵌入 Sobolev 常数,即

* **收稿日期:**2002-06-17

基金项目:国家自然科学基金(10171032)和广东省自然科学基金(011606)资助项目

作者简介:傅红卓,女,1966年生,博士生.研究方向:非线性椭圆型偏微分方程. E-mail:fuhongz_cn@sina.com.cn

$$S = \inf\left\{\frac{\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*}}},\ u \in D^{1,p},\ u \neq 0\right\}$$

其中 $D^{1,p}$ 是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ 在范数 $\|u\| = \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间.

设 $a(x)$ 满足条件:

(a_0): $a(x) \geqslant a_0 > 0$, $a(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $x \in \mathbf{R}^N$

记 $\|u\|_1^p = \int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^p + u^p)\, dx$, 则

$$\|u\| \geqslant m_0^{\frac{1}{p}} \|u\|_1 \tag{2}$$

其中 $m_0 = \min\{1, a_0\}$.

由 $a(x)$ 满足 (a_0) 条件可知, E 中的范数与 $W^{1,P}$ 中的范数等价.

从而以下嵌入是连续的: $E \hookrightarrow W^{1,P} \hookrightarrow L^s$, $p \leqslant s < p^*$, 且 $E \hookrightarrow L_{loc}^s(\mathbf{R}^N)$, $p \leqslant s < p^*$ 是紧的.

再假设 $h(x)$ 满足条件:(h_0): $h \geqslant 0$, $h \neq 0$, $h \in L^{q_0} \cap L^\infty$, 其中 $q_0 = \dfrac{p^*}{p^* - q - 1}$. 容易证明问题(1)的弱正解 $u \in E$ 即为下面泛函的临界点:

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^p + a(x)|u|^p)\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N} h(x) u_+^{q+1}\, \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbf{R}^N} u_+^{p^*}\, \mathrm{d}x \tag{3}$$

且 $I \in C^1(E, R)$, 对 $\forall u, \varphi \in E$, 有

$$\langle I'(u), \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\ \nabla\varphi + a(x)|u|^{p-1}\varphi)\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} h(x) u_+^q\, \varphi\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} u_+^{p^*-1}\varphi \mathrm{d}x \tag{4}$$

问题(1)中,当 $p = 2$, h 为实参数 μ, $1 < q < p$ 且 $a = 0$ 时, Brézis 和 Nirenberg[1] 在有界区域 Ω 内研究了弱解的存在性.

问题(1)中,当 $p = 2$ 时, 文献[2]在次临界指数的情形下,且 $a(x)$ 满足下条件: (a_1): $|x| \to \infty$, $a(x) \to \infty$ 时,得到 $E \hookrightarrow L^s(\mathbf{R}^N)$, $p \leqslant s < p^*$ 的全局紧性,从而证明了相应问题有两个弱正解. 本文在 $a(x)$ 不必 满足 (a_1) 的更弱条件下,从而只能得到 $E \hookrightarrow L_{loc}^s(\mathbf{R}^N)$, $p \leqslant s < p^*$ 的局部紧性,同时,本文将文献[2]推广到临界指数的情形,证明了问题(1)的弱正解的存在性.

问题(1)中,当 $p = 2$, $h = 0$ 时,文献[3]讨论了类似问题的正解的存在性.

当 $a(x) = 0$ 时, 文献[4]利用没有(PS)条件的山路引理(参看文献[5]),证明了相应问题有一个弱正解.

本文借助于集中紧引理(参看文献[6,7]),利用没有(PS)条件的山路引理, 当 $h(x)$ 不必满足文献[4]中的 (h_1) 条件时,证明了问题(1)存在一个弱正解.

本文的主要结论为:

定理 1　设 $a(x)$ 满足条件 (a_0), $h(x)$ 满足条件 (h_0), 则问题(1)有一个弱正解.

1 主要引理

首先引进 Ambrosetti-Rabinowitz[5]的山路引理.

引理 1(山路引理) 设 X 是一个实 Banach 空间, $J\in C^1(X,R)$, $J(0)=0$,设 $J(u)$ 满足山路几何,即存在 $\rho,\sigma>0$,使得 $\|u\|=\rho$, $J(u)\geqslant\sigma$, $\exists e\in X$, $\|e\|>\rho$, $J(e)\leqslant 0$,则存在序列 $\{u_n\}\subset E$,使 $J(u_n)\to c$, $J'(u_n)\to 0$,其中 $c=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}J(\gamma(t))$, $c\geqslant\sigma>0$,且 $\Gamma=\{\gamma\in C^1([0,1],X):\gamma(0)=0,\ \gamma(1)=e\}$. 然后证明泛函 $I(u)$ 满足 Ambrosetti-Rabinowitz[5]的山路引理的条件.

引理 2 (山路几何):设 $a(x)$ 满足条件(a_0), $h(x)$ 满足条件(h_0) ,则泛函 $I(u)$ 满足山路几何.

证明 第一步:证明 $I(u)$ 满足:存在 $\rho,\sigma>0$, 使得

$$\|u\|=\rho,\ I(u)\geqslant\sigma \tag{5}$$

利用(2)式及嵌入定理,得

$$\int_{\mathbf{R}^N}(u_+)^{p^*}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\|u\|^{p^*}}{(Sm_0)^{\frac{p^*}{p}}} \tag{6}$$

根据条件(h_0) ,(2)式及 Hölder 不等式,有

$$\int_{\mathbf{R}^N}h(x)u_+^{q+1}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{|h|_{q_0}\|u\|^{q+1}}{(Sm_0)^{\frac{q+1}{p}}} \tag{7}$$

则由(6)式及(7)式,得到:

$$I(u)=\frac{1}{p}\|u\|^p-\frac{1}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N}h(x)u_+^{q+1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p^*}\int_{\mathbf{R}^N}u_+^{p^*}\,\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\frac{1}{p}\|u\|^p-\frac{|h|_{q_0}}{(q+1)(m_0S)^{\frac{q+1}{p}}}\|u\|^{q+1}-\frac{\|u\|^{p^*}}{p^*(m_0S)^{\frac{p^*}{p}}}$$

记 $\alpha=\dfrac{|h|_{q_0}}{(q+1)(m_0S)^{\frac{q+1}{p}}}$, $\beta=\dfrac{1}{p^*(m_0S)^{\frac{p^*}{p}}}$,

则

$$I(u)\geqslant\frac{1}{p}\|u\|^p-\|u\|^p[\alpha\|u\|^{q+1-p}+\beta\|u\|^{p^*-p}]$$

令 $f(t)=\alpha t^{q+1-p}+\beta t^{p^*-p}$,注意到 $p-1<q<p^*-1$,从而 $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=0$. 则存在 $t_1>0$,使 $f(t_1)<\dfrac{1}{2p}$.

取 $u\in E$, $\|u\|=t_1=\rho$,则有 $f(\|u\|)<\dfrac{1}{2p}$, 从而

$$I(u)\geqslant\left[\frac{1}{p}-f(\|u\|)\right]\|u\|^p=\sigma>0$$

即 $I(u)$ 满足(5).

第二步:证明 $I(u)$ 满足:存在 $\rho>0$, 使得

$$\exists e\in E,\ \|e\|>\rho,\ I(e)\leqslant 0 \tag{8}$$

取 $\varphi \in E$, $\varphi > 0$, $t > 0$, 则有

$$I(t\varphi) = \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N} h(x)\varphi^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_{\mathbf{R}^N}\varphi^{p^*}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_{\mathbf{R}^N}\varphi^{p^*}\mathrm{d}x$$

容易验证,当 $t \to +\infty$ 时,$I(t\varphi) \to -\infty$.

从而可取 t 充分大,使 $e = t\varphi$, $I(e) < 0$. 于是 $I(u)$ 满足(8).

结合第一、第二步,得到 $I(u)$ 满足山路几何.

根据 Ambrosetti-Rabinowitz[5]的山路引理 知,存在序列 $\{u_n\} \subset E$, 使

$$I(u_n) \to c,\ I'(u_n) \to 0 \tag{9}$$

其中 $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} I(\gamma(t))$, $c \geqslant \sigma > 0$, 且

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1],E): \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}.$$

满足(9)的序列 $\{u_n\}$ 称为$(PS)_c$ 序列. 下面的几个引理说明序列$\{u_n\}$ 的性质.

引理 3 满足(9)的序列 $\{u_n\}$ 在 E 中有界.

证明 根据(9)知道,

$$I(u_n) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N} h(x)\, u_{n+}^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbf{R}^N} u_{n+}^{p^*}\mathrm{d}x = c + o(1) \tag{10}$$

$$\langle I'(u_n),u_n\rangle = \|u_n\|^p - \int_{\mathbf{R}^N} h(x)\, u_{n+}^{q+1}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} u_{n+}^{p^*}\,\mathrm{d}x = o(1) \tag{11}$$

当 $p - 1 < q < p^* - 1$ 时,有

$$c + o(1) = I(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle I'(u_n),u_n\rangle = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right)\|u_n\|^p + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p^*}\right)\int_{\mathbf{R}^N} u_{n+}^{p^*}\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right)\|u_n\|^p$$

从而 $\{u_n\}$ 在 E 中有界.

由$\{u_n\}$在 E 中有界,知:$\exists u \in E$,使 $u_n \rightharpoonup u$,在 E 中.

类似于文献[4]中的引理 5,可证明

$u_{n-} \equiv u_n - u_{n+} \to 0$, 在 E 中;

$u_{n+} \to u$, $a.e.$ $u \geqslant 0$, 在 $\mathbf{R}^N$ 中;

$u_n \to u$, $a.e.$ 在 $\mathbf{R}^N$ 中.

从而可得到:

$$\int_{\mathbf{R}^N} h(x) u_{n+}^q \varphi\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbf{R}^N} h(x) u_+^q\,\varphi\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

$$\int_{\mathbf{R}^N} a(x)\,|u_n|^{p-1}\varphi\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbf{R}^N} a(x)\,|u|^{p-1}\varphi\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$\int_{\mathbf{R}^N} u_{n+}^{p^*-1}\varphi\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbf{R}^N} u_+^{p^*-1}\,\varphi\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

为了证明 u 是 $I(u)$ 的临界点,需要用到下面的引理 4.

引理 4 由在 E 中,$u_n \rightharpoonup u$,则,对 $\forall \varphi \in E$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi \, dx \to \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx \tag{15}$$

利用第二集中紧引理[7]，结合(12)、(13)、(14)可证明此结论．证明方法类似于文献[8]中的方法．

3 主要结果的证明

定理 1 的证明 第一步：证明 u 是方程(1)的弱解．

根据(9)，对 $\forall \varphi \in E$，有

$$\langle I'(u_n), \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbf{R}^N} a(x) u_n^{p-1} \varphi \, dx - \int_{\mathbf{R}^N} h(x) u_{n+}^q \varphi \, dx - \int_{\mathbf{R}^N} u_{n+}^{p^*-1} \varphi \, dx \to 0$$

又利用(12)、(13)、(14)及引理 4 知道，对 $\forall \varphi \in E$，有

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbf{R}^N} a(x) u_+{}^{p-1} \varphi \, dx - \int_{\mathbf{R}^N} h(x) u_+^q \varphi \, dx - \int_{\mathbf{R}^N} u_+^{p^*-1} \varphi \, dx = 0$$

故 u 是方程(1)的弱解．

第二步：证明(9)式中的 c 满足：$0 < c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}$．证明方法类似于文献[9,10]．

只要证明：存在 $v_0 \in E$ ($v_0 \neq 0$)，使

$$\sup_{t \geq 0} I(tv_0) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} \tag{16}$$

事实上，因为 $\lim_{t \to +\infty} I(tv_0) = -\infty$，从而可以选取 $R > 0$，使 $I(Rv_0) < 0$，于是取 $u_1 = Rv_0$，再根据山路引理及引理 2 知道：

$$0 < \sigma \leqslant c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} I(\gamma(t)) \leqslant \sup_{t \geq 0} I(tv_0) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}$$

为了证明(16)，取 $\omega_\varepsilon(x) = \dfrac{K}{[\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}]^{\frac{N-p}{p}}}$，其中 $K = \left[\dfrac{N(N-p)\varepsilon}{p-1}\right]^{\frac{N-p}{p^2}}$，$\varepsilon > 0$．

则
$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla \omega_\varepsilon|^p \, dx = \int_{\mathbf{R}^N} |\omega_\varepsilon|^{p^*} \, dx = S^{\frac{N}{p}}.$$

取 $R > 0$ 及截断函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$，使其支集包含于 B_{2R}，且 $\varphi(x) \equiv 1, x \in B_R$；在 B_{2R} 上 $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$，其中 B_r 记为 $\mathbf{R}^N$ 中的中心在原点，半径为 r 的球．

取 $\psi_\varepsilon(x) = \varphi(x) \omega_\varepsilon(x)$．则

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\psi_\varepsilon|^{p^*} dx = S^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p}}) \tag{17}$$

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla \psi_\varepsilon|^p dx = S^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) \tag{18}$$

令 $v_\varepsilon = \dfrac{\psi_\varepsilon}{\left(\int_{\mathbf{R}^N} |\psi_\varepsilon|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}}}$，则有 $\|v_\varepsilon\|_{L^{p^*}} = 1$．且

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla v_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x = S + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) \tag{19}$$

根据 $I(u)$ 的定义,有

$$I(tv_\varepsilon) = \frac{t^p}{p}\|v_\varepsilon\|^p - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N} h(x) v_{\varepsilon+}^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{t^{p^*}}{p^*} \leqslant$$

$$\frac{t^p}{p}\left[\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v_\varepsilon|^p + a(x)|v_\varepsilon|^p)\mathrm{d}x\right] - \frac{t^{p^*}}{p^*} = \frac{t^p}{p}t_0^{p^*-p} - \frac{t^{p^*}}{p^*}.$$

其中 $t_0 = \left[\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v_\varepsilon|^p + a(x)|v_\varepsilon|^p)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p^*-p}}$

容易验算 $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t v_\varepsilon) = -\infty$, 所以存在 $t_\varepsilon > \delta > 0$,使 $\sup\limits_{t\geqslant 0} I(tv_\varepsilon) = I(t_\varepsilon v_\varepsilon)$.

令 $F(t) = \dfrac{t^p}{p}t_0^{p^*-p} - \dfrac{t^{p^*}}{p^*}$,则 $F(t)$ 在 t_0 取最大,即,$F(t_\varepsilon) \leqslant F(t_0)$.

又注意到,当 $q > p-1$ 时,有

$$\int_{B_{2R}} a(x)|v_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x = \begin{cases} A\,\varepsilon^{p-1}, & p^2 < N, \\ A_1\,\varepsilon^{p-1}[\,|\ln\varepsilon| + O(1)\,], & p^2 = N. \end{cases} \tag{20}$$

其中 $A, A_1 > 0$. 又因 φ 的支集包含于 B_{2R}, 则 $\int_{\mathbf{R}^N} a(x)|v_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x = \int_{B_{2R}} a(x)|v_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x$

结合(20),从而存在常数 $c_0 > 0$, 使

$$\left(S + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) + \int_{\mathbf{R}^N} a(x)|v_\varepsilon|^p)\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-p}{p}} \leqslant c_0 \tag{21}$$

利用 $\alpha \geqslant 1$ 时,$(a+b)^\alpha \leqslant a^\alpha + \alpha(a+b)^{\alpha-1}b$, $\forall\ a,b > 0$,及存在常数 $c_2 > 0$,使 $\dfrac{t_\varepsilon^{q+1}}{q+1} \geqslant c_2$, 结合(19),(21)得到,存在常数 $c_1 > 0$, 使

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon v_\varepsilon) &= \frac{t_\varepsilon^p}{p}\|v_\varepsilon\|^p - \frac{t_\varepsilon^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N} h(x)v_{\varepsilon+}^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{t_\varepsilon^{p^*}}{p^*} \\ &= \frac{t_\varepsilon^p}{p}t_0^{p^*-p} - \frac{t_\varepsilon^{p^*}}{p^*} - \frac{t_\varepsilon^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N} h(x)v_{\varepsilon+}^{q+1}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)t_0^{p^*} - \frac{t_\varepsilon^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N} h(x)v_{\varepsilon+}^{q+1}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{N}\left(S + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) + \int_{\mathbf{R}^N} a(x)|v_\varepsilon|^p)\mathrm{d}x\right)^{\frac{N}{p}} - \frac{t_\varepsilon^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N} h(x)v_{\varepsilon+}^{q+1}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) + c_1\int_{B_{2R}} a(x)|v_\varepsilon|^p\,\mathrm{d}x - c_2\int_{B_{2R}} h(x)v_{\varepsilon+}^{q+1}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

又注意到,当 $q > p-1$ 时,有

$$c_2\int_{B_{2R}} h(x)v_{\varepsilon+}^{q+1}\mathrm{d}x = B\,\varepsilon^{\frac{N-p}{p^2}(q+1)(1-p)+\frac{N(p-1)}{p}}$$

其中 $B > 0$.

从而,结合上式及(21),得到

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) + c_1 A\varepsilon^{p-1} - B\,\varepsilon^{\frac{N-p}{p^2}(q+1)(1-p)+\frac{N(p-1)}{p}}, & p^2 < N, \\ \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{p-1}) + c_1 A_1\,\varepsilon^{p-1}\,|\ln\varepsilon| - B\,\varepsilon^{(p-1)[p-\frac{p-1}{p}(q+1)]}, & p^2 = N. \end{cases}$$

又因为当 $p^2 < N,\ q > p-1$ 时,有

$$0 < \frac{N-p}{p^2}(q+1)(1-p) + \frac{N(p-1)}{p} < p-1$$

$$0 < \frac{N-p}{p^2}(q+1)(1-p) + \frac{N(p-1)}{p} < \frac{N-p}{p}$$

当 $p^2 = N,\ q > p-1$ 时,有

$$(p-1)[p - \frac{p-1}{p}(q+1)] < p-1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon^{p-1}\,|\ln\varepsilon|}{\varepsilon^{(p-1)[p-\frac{p-1}{p}(q+1)]}} = 0$$

于是 ε 充分小时,

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}}.$$

第三步:最后证明上面找到的弱解 $u \neq 0$.

反证,假设 $u \equiv 0$,则有

$u_n \rightharpoonup 0$,在 E 中;

$u_{n+} \to 0$, a. e. ,在 $\mathbf{R}^N$ 中;

$u_n \to 0$, a. e. ,在 $\mathbf{R}^N$ 中 ;

$\int_{\mathbf{R}^N} h(x) u_{n+}^{q+1}\,\mathrm{d}x \to 0$.

根据引理 3,$\{u_n\}$ 在 E 中有界,从而存在子列(不妨仍记为 $\{u_n\}$)及常数 l,使 $\|u_n\|^p \to l$.

然后在(10)及(11)式中,令 $n\to\infty$,则有 $c = \frac{l}{N}$.

另一方面,由

$$\|u_n\|^p \geqslant \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \geqslant S\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*}}$$

令 $n\to\infty$,则有 $l \geqslant S^{\frac{N}{p}}$,从而 $c \geqslant \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}}$.

这与第二步的 $c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}}$ 矛盾,所以 $u \neq 0$.

故定理 1 的结论正确.

当 $p^2 > N$ 或 $q < p-1$ 时 ,问题(1)的弱正解的存在性还有待于进一步研究.

参　考　文　献

[1] Brézis H and Nirenberg L. Some variational problems with lack of compactness[J]. Proc. Symp. Pure Math.(AMS),1986,45:165-201.

[2] Goncalves J V and Miyagaki O H. Multiple

positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$ involving subcritical exponents[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1998, 12(1): 41-51.

[3] Benci V, Cerami G. Existence of positive solutions of the equation $\Delta u + a(x)u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ in $\mathbf{R}^N$ [J]. J. Funct. Anal., 1990, 88: 90-117.

[4] Goncalves O H and Alves C O. Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in $\mathbf{R}^N$ involving critical sobolev exponents[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1998, 32(1): 53-70.

[5] Rabinowitz P H. Some minimax theorems and applications to nonlinear PDE[A]. Nonlinear Analysis[C]. Cesari, Kannan, Weinberger: Academic Press., 1978: 61-117.

[6] Brézis H and Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents[J]. Comm. Pure Appl. Math., 1983, 36: 437-477.

[7] Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variation, the limit case, parts 1, 2[J]. Rev. Mat. Iberoamericana., 1985, 1: 145-201, 45-121.

[8] 沈尧天,严树森. 拟线性椭圆形方程的变分方法[M](第二版). 广州:华南理工大学出版社,1999. 117-136.

[9] Miyagaki O H. On a class of semilinear elliptic problems in $\mathbf{R}^N$ with critical growth[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1997, 29(7): 773-781.

[10] Li Gongbao. Nontrivial solutions of quasilinear elliptic equations in $W_0^{1,p}$ invoving limiting nonlinearities[J]. Acta Mathematica Scientia, 1987, 7(3): 329-339.

The Existence of Positive Solutions for a Class of Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents

FU Hong-zhuo[1,2], Shen Yao-tian[2]

(1. *Department of Mathematics, USTC, Hefei* 230026, *China*)

(2. *Department of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou* 510640, *China*)

Abstract: This paper is concerned with the following nonlinear Dirichlet problem by the Mountain Pass principle without Palais-Smale condition:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + a(x)u^{p-1} = h(x)u^q + u^{p^*-1}, \ x \in \mathbf{R}^N, \\ u \geqslant 0, \ u \neq 0, \ \int_{\mathbf{R}^N} a(x)|u|^p \mathrm{d}x < +\infty. \end{cases}$$

Where $a:\mathbf{R}^N \to R$ is continuous and nonnegative, $h:\mathbf{R}^N \to R$ is some integrable function and $2 \leqslant p < N$, $p^2 \leqslant N$, $p-1 < q < p^*-1$, $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$. Some results as $p = 2$ are generalized at weakly conditions.

Key words: critical Sobolev exponent; concentration compactness principle; Mountain Pass Principle; elliptic equations