文章编号: 1000-6788(2010)06-1034-06　　中图分类号: O211.6　　文献标志码: A

基于随机 Lagrange 方法的最优套期保值策略

刘宣会, 赵宁宁, 续秋霞

(西安工程大学 理学院, 西安 710048)

摘　要 将随机 LQ 控制模型推广到系统状态为跳跃-扩散过程的随机 LQ 模型, 采用随机 Lagrange 方法得到最优反馈控制, 然后运用该框架去处理数理金融中的套期保值问题, 最后得到了最优套期保值策略.

关键词 随机 LQ 控制; 跳 -扩散模型; 套期保值; 随机 Lagrange 方法

Optimal hedging strategy based on stochastic Lagrange method

LIU Xuan-hui, ZHAO Ning-ning, XU Qiu-xia

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract Stochastic LQ control model is extended to the model of jump-diffusion process. The optimal control strategy can be obtained by stochastic Lagrange method, which is applied to the optimal hedging strategy in finance market. Finally, the optimal hedging strategy is obtained by stochastic Lagrange method.

Keywords stochastic LQ control; jump-diffusion process; hedging; stochastic Lagrange method

1 引言

随机线性二次控制首先由 Wonhan 在文献 [1] 中提出来. 后来 Bensoussan 在文献 [2] 中、Davis 在文献 [3] 中都对随机 LQ 控制系统进行了研究, 他们共同的假设条件为: 控制权矩阵为正定矩阵. 在这种条件下, 随机 LQ 控制问题与确定性 LQ 控制没有很大差别. 最优反馈控制可以通过状态的线性反馈形式表示. 文献 [4–6] 中提出了当控制权矩阵非正定时的随机 LQ 控制问题, 并采用一种新的随机 Riccati 方程得到了系统的最优控制策略. 文献 [7] 采用 Lagrange 方法得到了受控马氏过程的最优控制策略. 文献 [8] 中考虑了在不完全市场时采用凸对偶与鞅方法研究了未定权益的套期保值问题. 文献 [9–15] 中应用随机 LQ 控制研究了均值-方差投资组合选择问题. 以上随机 LQ 控制系统的共同特点为系统状态是某一 $\widehat{\text{Ito}}$ 过程且系统中的随机扰动为标准 Brown 运动. 然而在现实中, 当有重大消息出现时便会对系统产生冲击, 这时系统就会出现不连续的跳跃, 这种跳跃一般假设为 Poisson 过程. 笔者考虑这一因素水平在系统中服从跳跃-扩散过程, 并进一步研究系统的随机 LQ 控制问题. 众所周知, 处理随机连续时间的最优控制问题在理论上只有 (随机) 最大值原理和 (随机) 动态规划两种基本方法. 文中运用随机 Lagrange 方法去处理随机 LQ 控制问题, 获得最优的控制策略. 然后运用该框架去处理数理金融中的套期保值问题, 并得到了最优的套期保值策略.

2 随机 Lagrange 方法与随机 LQ 控制

定义 1 设 $x_0 \in X$, 算子 $T: D(T) \to R(T)$ 在 x_0 的邻域内有定义且连续可微. 如果 $\varphi(x_0)=0$ 且有界线性算子 $\varphi'(x_0)$ 是满射, 那么称 x_0 为算子 φ 的正则点.

引理 1 (Lagrange 乘数法) 设泛函 f 在 x_0 的邻域内连续可微, x_0 为 φ 的正则点, 如果 x_0 为泛函 f 在约束条件 $\varphi(x)=0$ 下的极值点, 则存在有界线性泛函 $z_0^* \in R^*(T)$, 使得 $L(x)=f(x)+z_0^*\varphi'(x)$ 以 x_0 为驻点, 即: $f(x)'+z_0^*\varphi'(x)$=0.

收稿日期: 2009-01-08
资助项目: 陕西省教育厅专项基金 (07KJ252)
作者简介: 刘宣会 (1964–), 男, 陕西乾县人, 博士后, 副教授, 硕士生导师, 从事金融数学、风险管理方向的研究, E-mail: lxh-lll2000@yahoo.com.cn.

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一个完备的概率空间, $\{W(t),t>0\}$ 为一维 Brown 运动, $\{N(t),t>0\}$ 为强度为 λ 的 Poisson 过程, 且 $W(t)$ 与 $N(t)$ 独立. 其中 $\mathcal{F}_t(t\geq 0)$ 为由 $W(t)$ 与 $N(t)$ 生成的 σ-代数.

我们考虑下面的最优控制问题:

(P)

$$\min_{(x(\cdot),u(\cdot))} E\left\{\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)Q(t)x(t)+u(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x(T)Mx(T)\right\} \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}x(t)=f(t,x(t),u(t)dt+\sigma(t,x(t),u(t))\mathrm{d}W(t)+\varphi(t,x(t),u(t))\mathrm{d}N(t)\\ x(0)=x_0\end{array}\right. \tag{2}$$

在这里, $x(t)$ 为一维状态过程, $u(t)$ 为一维控制过程. $S_M^2\times L^2([0,T],R)$, 其中 S_M^2 为半鞅组成的空间, $L^2([0,T],R)$ 为全体均方可积的随机过程组成的空间. 为了使得 (1)、(2) 模型中状态方程有解, 不妨做出下列假设:

假设 1 $|f(t,x,u)|^2+|\sigma(t,x,u)|^2+|\varphi(t,x,u)|^2\leqslant k(1+|x|^2)$.

假设 2 $|f(t,x,u)-f(t,y,u)|^2+|\sigma(t,x,u)-\sigma(t,y,u)|^2+|\varphi(t,x,u)-\varphi(t,y,u)|^2\leqslant k|x-y|^2$. 让 $M=S_M^2\times L^2([0,T],R)$, $Z=L^2([0,T],R)\times L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

考虑 $M\to L^2([0,T],R)$ 上的映射:

$$F(x,u)(t)=\int_0^t [f(s,x(s),u(s))\mathrm{d}s+\sigma(s,x(s),u(s))\mathrm{d}W(s)+\varphi(s,x(s),u(s))\mathrm{d}N(s)]-x(t)+x(0),$$

以及 M 上的泛函:

$$J(x,u)=E\left\{\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)Q(t)x(t)+u(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x(T)Mx(T)\right\}.$$

现在建立 $M\to R$ 上的映射 $\widehat{F}(x,u)=\begin{pmatrix}F(x,u)\\ F(x,u)(T)\end{pmatrix}$.

假设 3 设 $f(t,x(t),u(t))$, $\sigma(t,x(t),u(t))$, $\varphi(t,x(t),u(t))$ 均为 $x(t),u(t)$ 的线性函数.

注 由假设 3 可知 $(x_0(\cdot),u_0(\cdot))$ 为映射 $\widehat{F}(x,u)$ 的正则点, 最终归结为其对应的线性随机微分方程的可解性. 而由假设 1 和假设 2 可知其对应的线性随机微分方程存在唯一强解, 这样可以保证 $(x_0(\cdot),u_0(\cdot))$ 为 $\widehat{F}(x,u)$ 的正则点.

定理 1 泛函 $J(x,u)$ 在 (x^*,u^*) 的邻域内连续可微, 且 (x^*,u^*) 为 $\widehat{F}(\cdot)$ 的正则点, 如果 (x^*,u^*) 是泛函 J 在约束条件 $F(x,u)=0$ 下的极值点, 那么存在随机过程 $a(t)$ 及随机变量 ξ 使得 (x^*,u^*) 为 Lagrange 泛函:

$$\begin{aligned}L(x,u)=E\Big\{&\frac{1}{2}\int_0^T [(x(t)Q(t)x(t)+u(t)R(t)u(t))\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x(T)Mx(T)+\lambda(t)(f(t,x(t),u(t))\mathrm{d}t+\\&\sigma(t,x(t),u(t))\mathrm{d}W(t)+\varphi(t,x(t),u(t))\mathrm{d}N(t)-\mathrm{d}x(t))+\mathrm{d}\langle\lambda,F\rangle(t)]\Big\}\end{aligned} \tag{3}$$

的驻点. 其中 $\lambda(\cdot)$ 为下列倒向随机微分方程

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}\lambda(t)=-a(t)\mathrm{d}t+b(t)\mathrm{d}W(t)+c(t)\mathrm{d}N(t),\quad t\in[0,T]\\ \lambda(T)=\xi\end{array}\right. \tag{4}$$

的解, $\langle\lambda,F\rangle$ 为括号运算.

证明 由引理 1 可知: 存在 $(a(\cdot),\xi)$, 使得 (x^*,u^*) 为 Lagrange 泛函:

$$\begin{aligned}\widehat{L}(x,u)&=J(x,u)+(a(\cdot),\xi)\cdot\widehat{F}(x,u)\\&=E\left\{\frac{1}{2}\int_0^T (x(t)Q(t)x(t)+u(t)R(t)u(t))\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x(t)Mx(t)\right\}+\\&\quad E\left\{\int_0^T a(t)\cdot F(x,u)\mathrm{d}t+\xi F(x,u)(T)\right\}\end{aligned} \tag{5}$$

的驻点. 构造倒向随机微分方程

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}\lambda(t)=-a(t)\mathrm{d}t+b(t)\mathrm{d}W(t)+c(t)\mathrm{d}N(t),\\ \lambda(T)=\xi,\end{array}\right.$$

由文献 [6] 中引理 2.4 可知, 当 $|a(t)| \leqslant c$ 时该方程有解 $(a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot))$. 为了方便以下文出现的 λ、F、$f(t,x,u)$、$\sigma(t,x,u)$、$\varphi(t,x,u)$ 均同以前的 $\lambda(t)$、$F(x,u)(t)$、$f(t,x(t),u(t))$、$\sigma(t,x(t),u(t))$、$\varphi(t,x(t),u(t))$.

由 $\widehat{\text{Ito}}$ 公式可知:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\lambda F) &= \lambda \mathrm{d}F + F\mathrm{d}\lambda + \mathrm{d}\langle\lambda, F\rangle \\ &= \lambda[f(t,x,u)\mathrm{d}t + \sigma(t,x,u)\mathrm{d}W(t) + \varphi(t,x,u)\mathrm{d}N(t) - \mathrm{d}x(t)] + F[-a(t)\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}W(t) + c(t)\mathrm{d}N(t)] + \\ &\quad \mathrm{d}\langle\lambda, F\rangle a(t)F\mathrm{d}t = -\mathrm{d}(\lambda F) + \lambda[f(t,x,u)\mathrm{d}t + \sigma(t,x,u)\mathrm{d}W(t) + \varphi(t,x,u)\mathrm{d}N(t) - \mathrm{d}x(t)] + \\ &\quad b(t)F\mathrm{d}W(t) + c(t)F\mathrm{d}N(t) + \mathrm{d}\langle\lambda, F\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

而由于

$$E\int_0^T b(t)F\mathrm{d}W(t) = 0 \tag{7}$$

$$E\int_0^T \mathrm{d}(\lambda F) = E[\lambda(T)F(x,u)(T) - \lambda(0)F(x,u)(0)] = E[\xi \cdot F(x,u)(T)] \tag{8}$$

将 (7) 式 (8) 式代入 (5) 式可得到 (3) 式.

定理 2 设 (x^*, u^*) 为问题 (P) 的解, 且 (x^*, u^*) 为 $\widehat{F}(x,u)$ 的正则点, 那么存在 $\widehat{\text{Ito}}$ 过程 $\lambda(t)$ 使得下列一阶条件成立:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x^*(t) = f(t,x^*,u^*)\mathrm{d}t + \sigma(t,x^*,u^*)\mathrm{d}W(t) + \varphi(t,x^*,u^*)\mathrm{d}N(t) \\ x^*(0) = x_0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}\lambda(t) = -a(t)\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}W(t) + c(t)\mathrm{d}N(t) \\ \lambda(T) = \xi \end{cases} \tag{10}$$

注 若 x_0 为任意, $\lambda(0) = 0$.

$$\begin{aligned} &x^*(t)Q(t) + \lambda(t)\frac{\partial}{\partial x}f(t,x^*,u^*) + \lambda^2\lambda(t)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x^*,u^*) + \lambda^2 c(t) + b(t)\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,x^*,u^*) - a(t) = 0, \\ &u^*(t)R(t) + \lambda(t)\frac{\partial}{\partial u}f(t,x^*,u^*) + \lambda^2\lambda(t)\frac{\partial}{\partial u}\varphi(t,x^*,u^*) + b(t)\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,x^*,u^*) = 0, \\ &x^*(T) = \xi. \end{aligned}$$

证明 由定理 1 可知 (x^*, u^*) 为 Lagrange 泛函 $L(x,u)$ 的驻点, 且 (9) 式成立. 而

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\lambda(t) = -a(t)dt + b(t)\mathrm{d}W(t) + c(t)\mathrm{d}N(t) \\ &\mathrm{d}F(t) = f(t,x,u)\mathrm{d}t + \sigma(t,x,u)\mathrm{d}W(t) + \varphi(t,x,u)\mathrm{d}N(t) - \mathrm{d}x(t) \\ &\mathrm{d}\langle\lambda, F\rangle(t) = b(t)\sigma(t,x,u) - \mathrm{d}\langle\lambda, x\rangle(t) \\ &\mathrm{d}(\lambda(t)x(t)) = \lambda(t)\mathrm{d}x(t) + x(t)\mathrm{d}\lambda(t) + \mathrm{d}\langle\lambda, x\rangle(t), \end{aligned}$$

因而 $\mathrm{d}\langle\lambda, F\rangle(t) = b(t)\sigma(t,x,u)\mathrm{d}t + \lambda(t)\mathrm{d}x(t) + x(t)\mathrm{d}\lambda(t) - \mathrm{d}(\lambda(t)x(t))$, 将该式代入 (3) 式中可知

$$\begin{aligned} L(x,u) = E\Big\{&\frac{1}{2}\int_0^T [(x(t)Q(t)x(t) + u(t)R(t)u(t))]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x(T)Mx(T) \\ &+\lambda(t)[f(t,x,u)\mathrm{d}t + \sigma(t,x,u)\mathrm{d}W(t) + \varphi(t,x,u)\mathrm{d}N(t) - \mathrm{d}x(t)] + b(t)\sigma(t,x,u)\mathrm{d}t \\ &+\lambda(t)\mathrm{d}x(t) + x(t)\mathrm{d}\lambda(t) - \mathrm{d}(\lambda(t)x(t))\Big\} \\ = E\Big\{&\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)Q(t)x(t) + u(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x(T)Mx(T) \\ &+\lambda(t)[f(t,x,u)\mathrm{d}t + \sigma(t,x,u)\mathrm{d}W(t) + \varphi(t,x,u)\mathrm{d}N(t)] + b(t)\sigma(t,x,u)\mathrm{d}t - x(t)a(t)\mathrm{d}t \\ &+x(t)b(t)\mathrm{d}W(t) + x(t)c(t)\mathrm{d}N(t) - \mathrm{d}(\lambda(t)x(t))\Big\} \\ = E\Big\{&\frac{1}{2}\int_0^T [(x(t)Q(t)x(t) + u(t)R(t)u(t) + \lambda(t)f(t,x,u) + b(t)\sigma(t,x,u) - x(t)a(t)]\mathrm{d}t \\ &+\int_0^T [\lambda(t)\sigma(t,x,u) + x(t)b(t)]\mathrm{d}W(t) + \int_0^T [\lambda(t)\varphi(t,x,u) + c(t)x(t)]\mathrm{d}N(t) \\ &+\frac{1}{2}x(T)Mx(T) - \xi x(T) + \lambda(0)x(0)\Big\}, \end{aligned}$$

而由于 $E\int_0^T \lambda(t)\sigma(t,x,u)\mathrm{d}W(t) = 0,\ E\int_0^T x(t)b(t)\mathrm{d}W(t) = 0.$

现在处理上面的 $L(x,u)$ 中出现的 $E\int_0^T \lambda(t)\varphi(t,x,u)\mathrm{d}N(t)$, $E\int_0^T c(t)x(t)\mathrm{d}N(t)$ 和 $E\int_0^T c(t)x(t)\mathrm{d}N(t) = E[\sum_{i=1}^{N(T)} c(v_i)x(v_i)]$, 其中 v_i 表示系统在 $[0,T]$ 内状态第 i 次发生跳跃的时间, $N(T)$ 表示在时间 $[0,T]$ 内系统发生的跳跃次数.

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(T)} c(v_i)x(v_i)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(T)} c(v_i)x(v_i)|N(T)=n\right]\cdot P\{N(T)=n\},$$

在和式 $\sum_{i=1}^{N(T)} c(v_i)x(v_i)$ 中, v_i 表示系统发生的跳跃的时间, $v_1,v_2,\cdots$ 是依次从小到大顺序排列. 如果运用随机的方法把这 n 个变量重新排列为 $v_1',v_2',\cdots$, 因为一个有限和与它在求和中的顺序无关, 所以 $\sum_{i=1}^{n} c(v_i)x(v_i)$ $= \sum_{i=1}^{n} c(v_i')x(v_i')$. 由 Poisson 过程的特征可知 $v_1',v_2',\cdots$ 为 Poisson 过程 n 个点发生时间的一个随机排列. 那么它们为一个相互独立同分布的随机变量 (共同的密度函数为 $f_i(t)=\frac{\lambda}{T}, 0\leqslant t\leqslant T$), 这时就有

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N(T)} c(v_i)x(v_i)|N(T)=n\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{N(T)} c(v_i')x(v_i')|N(T)=n\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[c(v_i')x(v_i')|N(T)=n] \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \frac{c(t)x(t)}{T}\mathrm{d}t \\ &= \frac{n\lambda}{T}\int_0^T c(t)x(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由全期望公式可知: $E[\sum_{i=1}^{N(T)} c(v_i)x(v_i)] = E[\sum_{i=1}^{N(T)} c(v_i')x(v_i')] = \frac{\lambda^2 T}{T}\int_0^T c(t)x(t)\mathrm{d}t = \lambda^2\int_0^T c(t)x(t)\mathrm{d}t$. 同理可得 $E\int_0^T \lambda(t)\varphi(t,x,u)\mathrm{d}N(t) = \lambda^2\int_0^T \lambda(t)\varphi(t,x,u)\mathrm{d}t$. 将上面的结果代入 $L(x,u)$ 可得

$$\begin{aligned} L(x,u) = E\bigg\{&\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)Q(t)x(t)+u(t)R(t)u(t)+2\lambda(t)f(t,x,u)+2b(t)\sigma(t,x,u)-2x(t)a(t)]\mathrm{d}t \\ &+\frac{1}{2}x(T)Mx(T)-\xi x(T)+\lambda(0)x(0)\bigg\}+\lambda^2\int_0^T [c(t)x(t)+\lambda(t)\varphi(t,x,u)]\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

对于 $L(x,u)$ 在 (x^*,u^*) 处求 Gateaux 微分可知:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{L(x^*+\varepsilon\Delta x,u^*+\varepsilon\Delta u)-L(x^*,u^*)}{\varepsilon} \\ =\ &E\bigg[(x^*(T)-\xi)\Delta x(T)+\lambda(0)\Delta x(0)\bigg] \\ &+E\int_0^T \bigg[x^*(t)Q(t)+\lambda(t)\frac{\partial f(t,x^*,u^*)}{\partial x}+b(t)\frac{\partial\sigma(t,x^*,u^*)}{\partial x}-a(t)\bigg]\Delta x(t)\mathrm{d}t \\ &+\lambda^2\int_0^T \bigg[c(t)+\lambda(t)\frac{\partial\varphi(t,x^*,u^*)}{\partial x}\bigg]\Delta x(t)\mathrm{d}t \\ &+E\int_0^T \bigg[u^*(t)R(t)+\lambda(t)\frac{\partial f(t,x^*,u^*)}{\partial u}+b(t)\frac{\partial\sigma(t,x^*,u^*)}{\partial u}\bigg]\Delta u(t)\mathrm{d}t \\ &+\lambda^2\int_0^T \bigg[\lambda(t)\frac{\partial\varphi(t,x^*,u^*)}{\partial u}\bigg]\Delta u(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由 Δx 和 Δu 的任意性, 那么就有

$$\begin{aligned} &x^*(t)Q(t)+\lambda(t)\frac{\partial f(t,x^*,u^*)}{\partial x}+b(t)\frac{\partial\sigma(t,x^*,u^*)}{\partial x}-a(t)+\lambda^2\bigg[c(t)+\lambda(t)\frac{\partial\varphi(t,x^*,u^*)}{\partial x}\bigg]=0, \\ &u^*(t)R(t)+\lambda(t)\frac{\partial f(t,x^*,u^*)}{\partial u}+b(t)\frac{\partial\sigma(t,x^*,u^*)}{\partial u}+\lambda^2\lambda(t)\frac{\partial\varphi(t,x^*,u^*)}{\partial u}=0, \\ &x^*(T)=\xi. \end{aligned}$$

3 随机 LQ 控制在金融中的应用

设金融市场有两种证券. 一种为风险证券, 其价格 $P(t)$ 服从如下随机微分方程:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}P(t)=P(t)[b(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}W(t)+\varphi(t)\mathrm{d}N(t)], \\ &P(0)=p,\quad t\in[0,T]. \end{aligned}$$

另一种为无风险证券, 其价格为 $P_0(t)$, 服从下列方程:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}P_0(t) = rP_0(t)\mathrm{d}t, \\ &P_0(0) = p_0 > 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

其中 $W(t)$ 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上的标准 Brown 运动, $N(t)$ 为强度是 λ 的 Poisson 过程, r 为无风险利率, $b(t), \sigma(t), \varphi(t)$ 均为 $\mathcal{F}_t$ 适应过程.

投资者的初始财富为 $x(0) = x_0$, t 时刻在风险证券上投资的财富为 π_t, 那么在无风险证券上的投资就为 $1 - \pi_t$, 此时的财富为 $x(t)$. 那么 $x(t)$ 满足下列的随机微分方程:

$$\mathrm{d}x(t) = x(t)[(r + \pi_t\sigma(t)Q_t)\mathrm{d}t + \pi_t\sigma(t)\mathrm{d}W(t) + \pi_t\varphi(t)\mathrm{d}N(t)], \quad t \in [0, T] \tag{11}$$

其中 $Q_t = \frac{b(t)-r}{r}$. 设 ξ 为未定权益, 选择投资策略 π_t 使得

$$\min_{\pi(t)\in\Sigma} T(x_0 : \pi(t)) = E|X(T) - \xi|^2, \quad \Sigma = \left\{\pi(t) : E\int_0^T \pi^2(t)\mathrm{d}t < \infty\right\} \tag{12}$$

令

$$y(t) = x(t) - E[\xi|\mathcal{F}_t] \tag{13}$$

而 $E[\xi|\mathcal{F}_t]$ 为 $\mathcal{F}_t$ 鞅, 由鞅的表示定理可知, 存在 $\pi_t \in L^2_{\mathcal{F}}[0, T]$ 使得

$$E[\xi|\mathcal{F}_t] = E\xi + \int_0^t Z(s)\mathrm{d}W(s).$$

这时就有

$$\mathrm{d}y(t) = (y(t) + E[\xi|\mathcal{F}_t])[(r + \pi_t\sigma(t)Q_t)\mathrm{d}t + (\pi_t\sigma(t) - m(t))\mathrm{d}W(t) + \pi_t\varphi(t)\mathrm{d}N(t)] \tag{14}$$

其中 $m(t) = \frac{z(t)}{x(t)}$. 记

$$y(0) = x(0) - E\xi = y_0, \quad J(x_0 : \pi_t) = J(y_0 : \pi_t) = E|y(T)|^2 \tag{15}$$

这样将问题 (11)、(12) 就转化为 (14) 、(15). 运用定理 2 可知

$$\lambda(t)[r + \pi_t^*\sigma(t)Q_t] + b(t)[\pi_t^*\sigma(t) - m(t)] - a(t) + \lambda^2[c(t) + \lambda(t)\pi_t^*\varphi(t)] = 0 \tag{16}$$

$$\lambda(t)[(y^*(t) + E(\xi|\mathcal{F}_t))\sigma(t)Q_t] + b(t)[(y^*(t) + E(\xi|\mathcal{F}_t))\sigma(t)] + \lambda^2\lambda(t)[y^*(t) + E(\xi|\mathcal{F}_t)]\varphi(t) = 0 \tag{17}$$

由式 (17) 可知 $\lambda(t)\sigma(t)Q_t + b(t)\sigma(t) + \lambda^2\lambda(t)\varphi(t) = 0$, 即: $b(t) = \frac{\lambda\lambda(t)\varphi(t)+\lambda(t)\sigma(t)Q_t}{\sigma(t)}$. 由式 (16) 可知

$$\begin{aligned} \pi_t^* &= \frac{a(t) - m(t)b(t) - r\lambda(t)}{\lambda(t)\sigma(t)Q_t + b(t)\sigma(t) + \lambda^2\lambda(t)\varphi(t)} \\ &= \frac{a(t) - \frac{m(t)\lambda\lambda(t)\varphi(t)+m(t)\lambda(t)\sigma(t)Q_t}{\sigma(t)} - r\lambda(t)}{\lambda(t)\sigma(t)Q_t - \lambda\lambda(t)\varphi(t) - \lambda(t)\varphi(t)Q_t + \lambda^2\lambda(t)\varphi(t)} \\ &= \frac{\sigma(t)a(t) - m(t)\lambda\lambda(t)\varphi(t) - m(t)\lambda(t)\sigma(t)Q_t - \sigma(t)\lambda\lambda(t)}{\lambda\lambda(t)\varphi(t)(\lambda - 1)\sigma(t)}. \end{aligned}$$

4 结论

考虑了现实中重大信息出现时对系统产生的重要影响这一风险因素水平, 在系统状态服从跳-扩散过程时, 研究了系统的随机 LQ 控制问题, 进一步建立随机 Lagrange 方法得到了系统最优控制策略, 然后运用该框架去解决金融中的套期保值问题, 得到了最优套期保值策略.

参考文献

[1] Wonham W M. on a matrix Riccati equation of stochastic control[J]. SIAM Control, 1986, 6(4): 312–326.

[2] Bonsoussan A. Stochastic Control of Partially Observed Systems[M]. Cambridge Univ Press, 1992.

[3] Davis MHA. Linear Estimation and Stochastic Control London[M]. UK: Chapman and Hall, 1977.

[4] Chen S P, Li X J, Zhou X Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weigh costs[J]. SIAM Control Optim, 1998, 36(8): 1685–1702.

[5] Lim A E B, Zhou X Y. Mean-variance portfolio selection with random parameters in complete market[J]. Mathematics of Operations Research, 2002, 27(1): 101–120.

[6] Pardoux E, Peng S. Adapted sokction of backward stochastic differential equation[J]. Systems and Control Letters, 1990, 14: 55–61.

[7] 李小军. Lagrange 方法和期权定价 [J]. 应用概率统计, 2000, 16(4): 373–378.
Li X J. The Lagrange method and option pricing[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2000, 16(4): 373–378.

[8] 刘宣会, 胡奇英. 不完全市场上未定权益套期保值策略 [J]. 系统工程学报, 2004, 19(3): 284–289.
Liu X H, Hu Q Y. Hedging strategy of a contingent claim in incomplete market[J]. Journal of Systems Engineering, 2004, 19(3): 284–289.

[9] 刘宣会, 徐成贤. 基于跳跃 - 扩散型股价的亚式期权定价 [J]. 系统工程学报, 2008, 23(2): 142–147.
Liu X H, Xu C X. Asia option pricing based on jump-diffusion prices process[J]. Journal of Systems Engineering, 2008, 23(2): 142–147.

[10] Zhou X Y, Li D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42: 19–33.

[11] Bielecki T R. Continuous-time mean-variance portfolio selection with bankruptcy prohibition[J]. Mathematical Finance, 2005, 15(2): 213–244.

[12] Mei C C, Li D. Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework[J]. Insurance, Mathematics and Economics, 2006, 39: 330–335.

[13] Xie S X, Li Z F, Wang S Y. Continuous-time portfolio selection with liability: Mean-variance model and stochastic LQ approach[J]. Insurance, Mathematics and Economics, 2007, 30: 1–12.

[14] Alexander S. Minimizing CVaR and VaR for a portfolio of derivatives[J]. Journal of Banking Finance, 2006, 30: 583–605.

[15] Costa O L V. A generalized multi-period mean-variance portfolio optimization with Markov switching parameters[J]. Automatica, 2008, 44: 2487–2497.