

一种利用绝对最小 Lipschitz 延拓的医学图像插值算法*

彭进业, 郝重阳, 齐敏

(西北工业大学电子信息学院, 陕西西安 710072)

摘要:提出一种基于最小 Lipschitz 延拓的图像插值半隐式算法,并用医学图像放大实验初步验证了算法的有效性。

关键词:医学图像插值;最小 Lipschitz 延拓;半隐式算法

中图分类号:TP391 **文献标识码:**A

A semi-implicit algorithm for medical image interpolation based on absolute minimal Lipschitz extension

PENG Jin-ye, HAO Chong-yang, QI Min

(School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: An efficient numerical method, called semi-implicit algorithm, was proposed to interpolate images based on the absolute minimal Lipschitz extension model (AMLE). The feasibility of expressing the implicit numerical scheme of AMLE in a semi-implicit one analyzed theoretically, and a semi-implicit numerical algorithm was proposed. The efficiency of our proposal was proved by experiments of medical image magnification.

Key words: medical image interpolation; absolute minimal Lipschitz extension; semi-implicit algorithm

研究
快报

医学图像的显示、处理和分析,常常需要将图像进行插值处理,因而图像插值算法的研究已成为医学图像技术领域中的重要研究内容。经典的用于灰度插值的双线性插值、样条插值等算法要求图像的灰度曲面是连续的,甚至是可微的二维函数。但是复杂的医学数字图像一般并不满足这种连续性,因此插值所得的高分辨率参考图像有较大失真。近年来,人们提出了许多非线性图像插值算法或方法,特别是基于 PDE(偏微分方程)的非线性扩散方法由于能得到更好的插值效果而受到了极大关注,例如基于 AMLE(绝对最小 Lipschitz 延拓)的方法^[1,4~7],TV 方法^[2,3]等。

文献[1]中提出了图像插值应遵循可比性、稳定

性、正则性及 Euclidean 不变性等基本公理性原则,并在此基础上证明了能满足这些要求的惟一二阶算子为

$$\nabla^2 u \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$
$$u|_{\partial_1 \Omega} = \varphi_1, \quad u|_{C_i} = \varphi_i, \quad i = 1, \dots, M;$$
$$u(x_i, y_i) = u_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

这里 $\partial_1 \Omega$ 表示图像的边界; C_i 表示 Ω 域内的一条曲线(共有 M 条曲线); (x_i, y_i) 表示 Ω 域内的某一孤立点(共有 N 个孤立点)。

$$\nabla^2 u := \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}$$

* 收稿日期:2007-02-12;修回日期:2007-06-12

基金项目:国家教育部博士点基金(20040699015),西北工业大学引进高层次人才科研启动基金(07XE0121)资助。

作者简介:彭进业(通讯作者),男,1964年生,博士/教授。研究方向:图像处理与模式识别。E-mail: jinyepeng@hotmail.com;

Tel:029-88491725

为 u 的 Hessian 矩阵. 可见式(1)是一个特殊的“边值”问题,其边界条件不仅包含着普遍意义上的边界值(φ_i),还包含了给定的若干曲线 C_i 上的值(φ_{C_i})以及给定和若干孤立点上的值 u_i . 式(1)存在粘滞意义的惟一解,并称之为给定边值的绝对最小 Lipschitz 延拓.

文献[1]中还指出,椭圆形偏微分方程式(PDE)式(1)与如下对于 $I(t, \cdot)$ 演化问题(抛物形 PDE)的稳态解相一致

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta^2 u \left(\frac{|\nabla u|}{|\nabla u|}, \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|} \right) \text{ in } (0, +\infty) \times \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y) \text{ in } \Omega;$$

$$u(t, x, y) = \varphi \text{ in } (0, +\infty) \times \partial\Omega.$$

这里 $\partial\Omega$ 表示式(1)中的“广义”边界. 并给出了式(2)的隐式数值方案

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + \Delta t (\Delta^2 u)_{i,j}^{(n+1)} \left(\frac{|\nabla u_{i,j}^{(n+1)}|}{|\nabla u_{i,j}^{(n+1)}|}, \frac{|\nabla u_{i,j}^{(n+1)}|}{|\nabla u_{i,j}^{(n+1)}|} \right). \quad (3)$$

一般来说,这种隐式数值方案的求解是很复杂的. 为了降低算法的复杂度,本文提出一种半隐式算法.

在图像放大的应用中,将原始图像 $f_0(x, y)$ 看成是放大图像在等间隔(h_0)的网格孤立点“边值”. 按照对式(1)边值问题的解释,我们希望通过 AMLE 插值方法计算出在间隔分别为 $h = h_0/n$ 的网格点的图像灰度值,这里 n 为整数,(例如 $n=2$ 或 3),它取决于图像放大倍数. 进一步对图像沿边界作复制延拓,则利用式(2)可将这一广义边值问题转化为初边值问题.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta^2 u \left(\frac{|\nabla u|}{|\nabla u|}, \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|} \right) \text{ in } \Omega, \quad (4)$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y),$$

$$u(t, x, y) = f_0(x, y),$$

$(x, y) \in$ 间隔为 h_0 的点集,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} = 0, (x, y) \in \partial\Omega.$$

考虑到

$$\begin{aligned} \Delta^2 u \left(\frac{|\nabla u|}{|\nabla u|}, \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|} \right) &= \\ \frac{u_{xx}u_x^2 + 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} &= \\ u_{xx} + u_{yy} - \frac{u_{yy}u_x^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{xx}u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} &= \end{aligned}$$

$$\Delta u - m(u), \quad (5)$$

式中 Δ 表示 Laplacean 算子,而

$$m(u) = \frac{u_{yy}u_x^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{xx}u_y^2}{u_x^2 + u_y^2}. \quad (6)$$

我们可采用类似于文献[2]中建议的半隐式数值方案来求解式(5),首先将图像 u 的矩形定义域 Ω 中的网格点 (i, j) 分为两个集合:已知(known, KN)集合,即 $u(i, j)$ 的点集;未知(unknown, UN)集合,即待插值的网格点. 图 1 是 $n=2$ 的 KN 集合(实心圆)和 UN 集合(空心圆)的示意图.

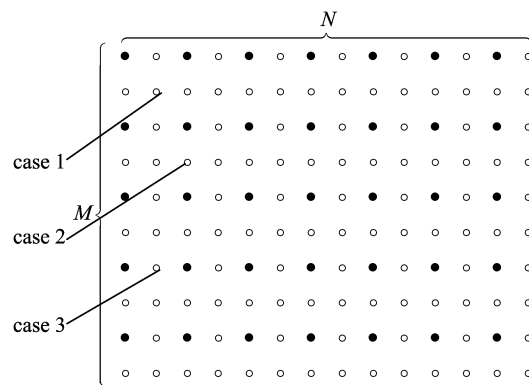


图 1 KN 集合与 UN 集合

Fig. 1 KN set and UN set

对于每一 UN 点, $I_{i,j}$ 的半隐式数值方案为

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + \tau (\Delta u)_{i,j}^{(n+1)} - \tau m(u)_{i,j}^{(n)}, \quad (i, j) \in \text{UN}, \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} (\Delta u)_{i,j}^{(n+1)} &= \frac{u_{i+1,j}^{(n+1)} - 2u_{i,j}^{(n+1)} + u_{i-1,j}^{(n+1)}}{h^2} + \\ \frac{u_{i,j+1}^{(n+1)} - 2u_{i,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)}}{h^2} &= \\ \frac{1}{h^2} \{ u_{i+1,j}^{(n+1)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} - 4u_{i,j}^{(n+1)} \}, \end{aligned} \quad (i, j) \in \text{UN}. \quad (8)$$

为了方便,以下令网格间距 $h=1$.

在 $n=2$ 的情况下,式(8)中的前四项所对应的四邻点只可能有如下 3 种不同的情况(见图 1):

case 1: 四邻点均属 UN 集合;

case 2: 左右两邻点属 UN 集合但上下两邻点属 KN 集合;

case 3: 上下两邻点属 UN 集合但左右两邻点属 KN 集合.

现在我们将 $u_{i,j}^{(n+1)}, (i, j) \in \text{UN}$ 按行扫描排列为成一维矢量 \mathbf{U} , 对于情况 1, 式(8)的矩阵-矢量表

式为

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{U}^{(n)} + \tau \mathbf{A} \mathbf{U}^{(n+1)} - \tau \mathbf{B}^{(n)}, \quad (9)$$

式中 \mathbf{A} 是一个具有图 2(a) 形式的稀疏方阵, 它在主对角线及紧靠主对角线的上下两侧有非零元素, 并且在距离主对角为 N (这里 N 表示图像网格的列数) 的两侧有非零元素, 除此之外的矩阵元素全部为零. 在此情况下, 式(9)中的矢量 $\mathbf{B}^{(n)}$ 仅由式(6)的 $m(I^{(n)})$ 确定. 对于情况 2 和 3, 式(8)的前 4 项中有两项是已知数据, 我们将它们合并到式(9)中的矢量 $\mathbf{B}^{(n)}$ 的相应的分量之中. 这样一来, 在此两种情况下, 式(9)中的矩阵将分别具有图 2(b) 和 (c) 的形式. 很明显, 它们仍可看成是形式(a)的特例. 即它们缺少的部分相当于(a)中的相应的元素为零. 由此可见式(9)可以看成是一个通用半隐式数值方案, 只是在构造矩阵 \mathbf{A} 和矢量 $\mathbf{B}^{(n)}$ 的元素时, 应根据矢量 \mathbf{U} 的分量 u_s 的序号 s 所对应的网格坐标 (i, j) 来赋值.

式(9)可改写为

$$(\mathbf{I} - \tau \mathbf{A}) \mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{U}^{(n)} - \tau \mathbf{B}^{(n)},$$

从而得

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = (\mathbf{I} - \tau \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{U}^{(n)} - \tau \mathbf{B}^{(n)}). \quad (10)$$

值得注意的是当原始图像大小为 $L \times K$ 时, $n=2$ 的放大图像大小为 $M \times N = 2L \times 2K = 4LK$, 其中有 LK 个已知数据. 因而式(7)和(9)~(10)都是含 $3LK$ 个未知数的联立代数方程式, 而已知数据则隐含在 $\mathbf{B}^{(n)}$ 的计算之中.

当直接按式(10)求解时, 将要求对 $3LK \times 3LK$ 维方阵求逆. 即使对于适中大小的图像而言, 这一求逆仍是一个沉重的负担. 但如果采用文献[3]中提出的加性算子分裂 (additive operator splitting,

AOS) 算法则可化解这一困难.

对半隐式方案式(9)的 AOS 算法是将式(10)修改为

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - 2\tau \mathbf{A}_i)^{-1} (\mathbf{U}^{(n)} - \tau \mathbf{B}^{(n)}), \quad (11)$$

式中 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ 分别是“行操作”和“列操作”矩阵, 由于任何未知像素在一行上只有两个邻点 (在边界上只有一个邻点), 因此当 \mathbf{U} 是行扫描形成的矢量时, \mathbf{A}_1 是分块三对角阵, 同理当 \mathbf{U} 是按列扫描形成的矢量时, \mathbf{A}_2 也是分块三对角阵, 因此只要对每一行实现

$$\mathbf{U}_1^{(n+1)}(i) = (\mathbf{I} - 2\tau \mathbf{A}_1(i))^{-1} (\mathbf{U}_1^{(n)}(i) - \tau \mathbf{B}_1^{(n)}(i)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (12)$$

式中 $\mathbf{A}_1(i)$ 表示 \mathbf{A}_1 中的第 i 块 $N \times N$ 三对角矩阵, 它对应的图像记为 $u_1(i, j)$, 然后实现

$$\mathbf{U}_2^{(n+1)}(j) = (\mathbf{I} - 2\tau \mathbf{A}_2(j))^{-1} (\mathbf{U}_2^{(n)}(j) - \tau \mathbf{B}_2^{(n)}(j)), \quad j = 1, \dots, M. \quad (13)$$

得到图像 $u_2(i, j)$, 最后得到一次迭代更新的图像

$$\mathbf{I}(i, j) = [u_1(i, j) + u_2(i, j)]/2. \quad (14)$$

在实际计算时, 如果按图 1 的方式放大, 则 i 为奇数行所对应的 $\mathbf{A}_1(i)$ 是对角阵, 它无需任何求逆过程, 而 i 为偶数的行, 则可预先对矩阵 $(\mathbf{I} - \tau \mathbf{A}_1(i))$ 作一次 LR 分解 (注意对所有 $i=$ 偶数, $\mathbf{A}_1(i)$ 相同) 然后采用追赶法求解. 对于列操作, 也可按类似方式处理.

根据以上讨论可归纳出对于 $n=2$ 时的图像放大算法如下:

(I) 输入原始图像

$$f_0(i, j), \quad i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, K.$$

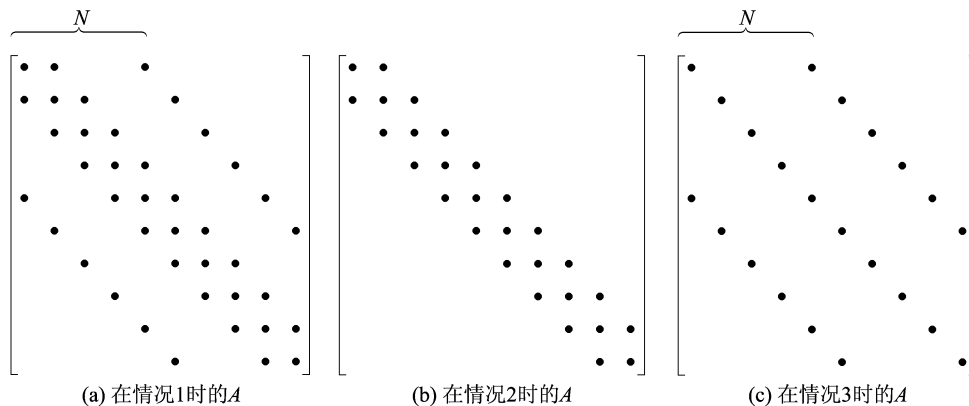


图 2 行扫描对应的矩阵 \mathbf{A} 的形式

Fig. 2 The form of matrix \mathbf{A} corresponding to row scanning

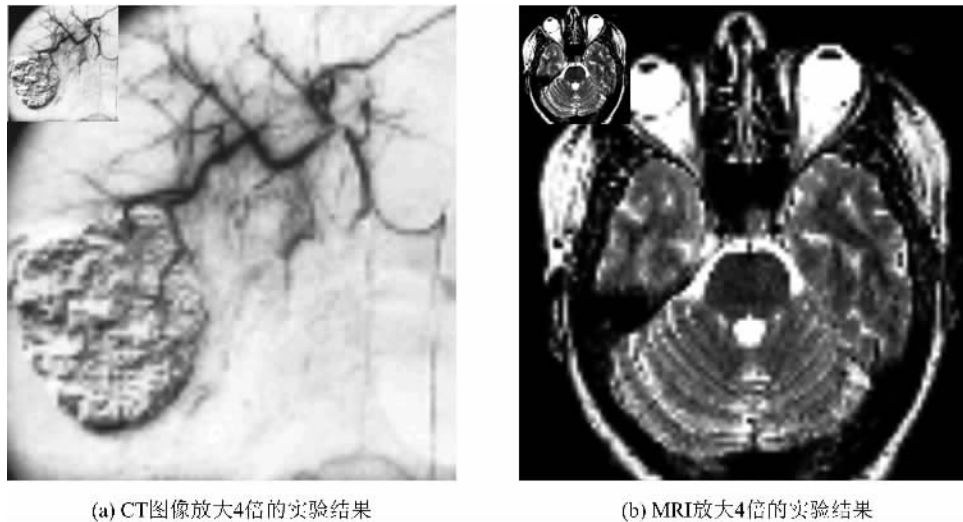


图3 实验结果

Fig. 3 Experimental results

(II) 初始化放大图像

$$u(i, j), i = 1, \dots, M = 2L, j = 1, \dots, N = 2K$$

$$\textcircled{1} u(2i-1, 2j-1) = f_0(i, j), i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, K$$

$$\textcircled{2} u(2i-1, 2j) = [u(2i-1, 2j-1) + u(2i-1, 2j+1)]/2$$

$$u(2i, 2j-1) = [u(2i-1, 2j-1) + u(2i+1, 2j-1)]/2$$

$$u(2i, 2j) = [\text{邻点灰度之和}]/2.$$

(III) 选定时间步长 τ , 分别存贮三对角行处理 $2K \times 2K$ 维矩阵 $(I - 2\tau A_1)$ 和列处理 $2L \times 2L$ 维矩阵 $(I - 2\tau A_2)$ 的 LR 分解, 实际只需分别存贮矢量 r_1, m_1, l_1 和 r_2, m_2, l_2 即可. 这时的 $(I - 2\tau A_1)$ 和 $(I - 2\tau A_2)$ 都具有相同的形式:

$$\left. \begin{array}{cccccc} 1+2\tau & -2\tau & & & & \\ -2\tau & 1+4\tau & -2\tau & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -2\tau & 1+4\tau & -2\tau \\ & & & & -2\tau & 1+2\tau \end{array} \right\} 2L(\text{or } 2K)$$

$2L(\text{or } 2K)$

区别仅在于维数不同, 所以只要将同一 LR 分解子程序分别对 $2L \times 2L$ 和 $2K \times 2K$ 维运行一次就可分别得到 3 个一维矢量.

(IV) 迭代

(a) 将 $u(i, j)$ 复制到两个临时数组 $u_1(i, j)$ 和 $u_2(i, j)$;

(b) 根据当前 $I(i, j)$ 计算每一点 $m(I)_{i,j}$;

(c) 更新 $u_1(i, j)$ 的行

更新奇数行的未知数:

$$u_1(2i-1, 2j) = u_1(2i-1, 2j) + 2\tau[u_1(2i-1, 2j-1) + u_1(2i-1, 2j+1) - m(2i-1, 2j)]$$

$$i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, L$$

更新偶数行的未知数:

用追赶法计算 $u_1(2i, :)$, $i = 1, \dots, K$;

(d) 更新 $u_2(i, j)$ 的列

方法同(c);

(e) 更新 $u(i, j)$, 即:

$$u(i, j) = [u_1(i, j) + u_2(i, j)]/2.$$

(V) 显示当前 $u(i, j)$, 并交互式决定是否继续迭代.

将以上算法推广到其他放大倍数的情况是不存在任何困难的. 例如 $n=3$ 时, 只需要分别考虑行(列)号被 3 模除为 0, 1, 2 三种情况不同的行(列)处理方法即可.

下面给出一些初步的实验结果. 图 3(a) 左上角是大小为 100×100 的 CT 图像, 图 3(b) 左上角是大小为 100×110 的 MR 图像. 现采用本文算法将他们分别放大 4 倍, 放大结果分别见图 3(a) 和图 3(b). 从实验结果我们不难发现该算法能较好地保留图像边缘信息, 从而获得比较好的视觉效果.

本文对基于绝对最小 Lipschitz 延拓 (AMLE) 模型的图像插值方法进行了研究, 提出了一种新的半隐式方案及算法. 理论分析表明, 由于本文算法采用半隐式方案, 因此比以前采用的隐式方案的算

法更简单;另外,应用于 CT,MR 医学图像插值放大的实验结果初步验证了算法的有效性.事实上,本文算法在其他图像的放大与修补中也将具有应用价值.下一步的工作是进行充分的实验研究,与其他算法性能进行详细的对比、分析,并将本文算法推广应用于图像修补等其他应用场合.

参考文献(References)

- [1] Caselles V, Morel J, Sbert C. An axiomatic approach to image interpolation [J]. IEEE Trans. Image Processing, 1998,7:376-386.
- [2] Guichard F, Malgouyres F. Total variation based interpolation[C]//The Proceedings of the European Signal Processing Conference. 1998,3:1 741-1 744.

- [3] Sune Keller, Francois Lauze, Mads Nielsen. A total variation motion adaptive deinterlacing scheme[C]//5th International Conference, Scale-Space 2005. Berlin: Springer,2005, 408-419.
- [4] Peter Sme. Semi-implicit level set methods for curvature and surface diffusion motion[J]. Journal of Science Computing, 2003,19: 439-456.
- [5] Aronsson G, Crandall M G, Juutinen P. A tour of the theory of absolutely minimizing functions [J]. Bull Amer Math Soc, 2004,41:439-505.
- [6] Jensen R. Uniqueness of lipschitz extention; minimizing the sup norm of gradient [J]. Arch. Rational Mechanics and Anal, 1993,123: 51-74.
- [7] Aronsson G. Extention of function satisfying lipschitz conditions[J]. Ark Mat, 1997,6: 551-561.

(上接第 776 页)

$$P_{\pi}(W \leq 0 | \mathbf{y}) =$$

$$P_{\pi}(2(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{BE}})'(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{BE}}) \leq \| \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{BE}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} \|^2 | \mathbf{y}) >$$

$$P_{\pi}(2(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{BE}})'(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{BE}}) \leq 0 | \mathbf{y}) = 0.5,$$

最后不等式利用 $\| \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{BE}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} \|^2 > 0$ a. s. 成立, 定理证毕. \square

参考文献(References)

- [1] Wang Song-gui, Chow Shein-chung. Advanced Linear Models Theory and Applications [M]. New York: Marcel Dekker, 1994.
- [2] Box G, Tiao G. Bayesian Inference in Statistical Analysis [M]. Reading, MA: Addison-Wesley, 1973.
- [3] Rao C R. Linear Statistical Inference and Its Applications [M]. 2nd ed. . New York: Wiley, 1973.
- [4] Gruber M H J. Regression Estimators: A Comparative Study [M]. Boston: Academic Press, 1990.
- [5] Wei L S, Trenkler G M. The Bayes estimator in a misspecified linear regression model [J]. Test, 1996, (5):113-123.
- [6] ZHANG Wei-ping. Research of problems of Bayes analysis in linear model [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2005.
张伟平. 线性模型中 Bayes 分析若干问题研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2005.
- [7] Pitman E J G. The closest estimates of statistical

parameters [J]. Proc. Camb. Phil. Soc., 1937, 33(2): 212-222.

- [8] Rao C R. Some Comments on the Minimum Mean Square as Criterion of Estimation in Statistics and Related Topics [M]. Amsterdam: North Holland, 1981:123-143.
- [9] Rao C R, Keating J P, Mason R L. The Pitman nearness criterion and determination [J]. Comm. Statist. Theor. Math., 1986, 15(3): 3 173-3 191.
- [10] WEI Lai-sheng. PC superiority of restricted least square estimator under misspecified regression model [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 1996, 26(3): 277-283.
韦来生. PC 准则下错误指定模型中回归系数有约束 LS 估计的优良性 [J]. 中国科学技术大学学报, 1996, 26(3): 277-283.
- [11] WEI Lai-sheng, LIN Ming. Small-sample properties for mixed estimator of regression coefficients under misspecified regression model [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 1999, 29(3): 253-259.
韦来生, 林明. 错误指定模型中回归系数混合估计的小样本性质 [J]. 中国科学技术大学学报, 1999, 29(3): 253-259.
- [12] Ghosh M, Sen P K. Bayesian Pitman closeness [J]. Comm. Statist. Theory and Methods, 1991, 20(11): 3 659-3 678.