第37卷第4-5期　中国科学技术大学学报　Vol. 37, No. 4-5
2007年5月　JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA　May 2007

文章编号:0253-2778(2007)04&05-0471-04

# 电子论运动方程的一个严格解*

刘键恒[1,2],张鹏飞[1,2],$\boxed{\text{阮图南}}$[1,2],井思聪[1,2],何多慧[1,2]

(1.中国科学技术大学,安徽合肥 230029;2.中国高等科学技术中心,北京 100080)

**摘要**:严格求解了由Moniz和Sharp导出的非相对论经典电子方程.结果表明当电子半径大于一个临界长度时,方程的解表现出良好的性质,不会出现奔离和预加速的现象.这个特定的长度也是对经典电动力学适用范围的一个粗略估计.

**关键词**:经典电动力学;电子论;运动方程;严格解

**中图分类号**:O442　　**文献标识码**:A

# Exact solution of the classical equation of an extended charged particle

LIU Jian-heng[1,2], ZHANG Peng-fei[1,2], $\boxed{\text{RUAN Tu-nan}}$[1,2], JING Si-cong[1,2], HE Duo-hui[1,2]

(1. *University of Science and Technology of China, Hefei* 230029, *China*;
2. *China Center of Advanced Science and Technology (World Laboratory), Beijing* 100080, *China*)

**Abstract**: Following the article of Moniz and Sharp, the non-relativistic equation they proposed was rigorously solved. It is shown that when the radius of the electron is greater than a critical length, the behavior of the solution is fine, no run-away and pre-acceleration appears. This specific length can be regarded as a rough evaluation of applicable range of classical electrodynamics.

**Key words**: classical electrodynamics; electron theory; equation of motion; exact solution

## 0　引言

电子论的研究始于100多年前[1,2]. Abraham和Lorentz采用带电球壳的模型,先假设电子有一个有限的半径,通过电动力学计算,并在最后的结果中令电子半径趋于0,从而得到了历史上最早的电子运动方程.但是这个方程的解显示:在无外力的情况下,电子的运动速度随时间趋于无穷大,这个现象被称为“奔离”(run-away).为了解决这一问题,Dirac提出修改初始条件[3],但这又产生了新的奇异现象,即电子在外力作用之前,就开始了运动,称为“预加速”(pre-acceleration).因此在Dirac方案中,困难并没有解决,实际上“奔离”又以另外一种面目“预加速”出现.电子论方程还有另外一个问题,即所谓4/3因子导致的非协变问题(详见文献[4～6]的讨论).在后来的各种电子运动方程中,这两个问题一直延续了下来,成为所有经典电子理论必须面对的首要难题.

在为解决电子运动方程存在的难题所做的各种各样的努力中,Moniz等[7]的处理方法和结果对于解决“奔离”或者“预加速”问题有特殊的意义.他们注意到Lorentz在得到方程的最后令电子半径趋于

* 收稿日期:2006-12-25;修回日期:2007-04-12
基金项目:国家基础研究重大项目前期预研专项基金(2001CCB01000),国家自然科学基金重大项目(10299020)和国家自然科学基金(10547001)资助.
作者简介:刘键恒,男,1982年,硕士生.研究方向:量子力学. E-mail:jnhgliu@ustc.edu
通讯作者:张鹏飞,博士/副教授. E-mail:zhpf@ustc.edu.cn; Tel:0551-3606234

0,因此设想电子就是有一个非零的半径. 以此为假设,他们导出了改进的电子运动方程,有时也被称作有限差分方程(the finite difference equation of motion)[4]. 并在此基础上,得到了出现奔离解的电子半径的临界值,对新方程下电子的行为作了讨论.

本文在上述工作基础上,给出了方程的精确解,据此勾画了一定条件下非相对论电子的运动行为.

## 1　求解方程

Moniz 等对电子采用半径为 $L$ 的均匀球壳模型,在低速近似下得到的方程[7]

$$\left(1-\frac{c\tau}{L}\right)\ddot{\boldsymbol{R}}(t)=\frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}+\left(\frac{c}{2L}\right)\left(\frac{c\tau}{L}\right)\left[\dot{\boldsymbol{R}}\left(t-\frac{2L}{c}\right)-\boldsymbol{R}(t)\right] \tag{1}$$

是一个线性方程. 其中,$\tau=\frac{2e^2}{3mc^3}=\frac{2r_e}{3c}$;$e,m,c$ 分别为电子电荷、质量和真空光速;$r_e$ 为电子经典半径,$r_e\approx 2.818\times10^{-15}$ m.

为得到方程(1)的解,在文献[7～9]中采用 Fourier 变换,这种做法并不合适. 因为现在的问题是要考察电子从一开始静止是否会导致"奔离",是有初始条件的问题. 我们的做法是对式(1)做 Laplace 变换,

$$\dot{\boldsymbol{R}}(p)=\int_0^{+\infty}\dot{\boldsymbol{R}}(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

$$\boldsymbol{F}(p)=\int_0^{+\infty}\boldsymbol{F}(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

代入式(1)得

$$\dot{\boldsymbol{R}}(p)=\frac{\frac{\boldsymbol{F}(p)}{m}+\left(1-\frac{c\tau}{L}\right)\dot{\boldsymbol{R}}(0)}{\left(1-\frac{c\tau}{L}\right)p-\left(\frac{c}{2L}\right)\left(\frac{c\tau}{L}\right)(\mathrm{e}^{-\frac{2L}{c}p}-1)}. \tag{2}$$

定义

$$\alpha=\frac{2L}{c},\quad \beta=\frac{1-\frac{c\tau}{L}}{\left(\frac{c}{2L}\right)\left(\frac{c\tau}{L}\right)},$$

从而把式(2)的分母写成

$$\frac{1}{\left(\frac{c}{2L}\right)\left(\frac{c\tau}{L}\right)}\frac{1}{\beta p-\mathrm{e}^{-\alpha p}+1},$$

主要的逆变换是

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p}{\beta p-\mathrm{e}^{-\alpha p}+1}. \tag{3}$$

用围道积分,式(3)的结果依赖于被积函数的极点,即如下代数方程的根,

$$\beta p-\mathrm{e}^{-\alpha p}+1=0. \tag{4}$$

令 $p=x+\mathrm{i}y$,$x,y$ 为实数,分离式(4)的实部和虚部得

$$\left.\begin{aligned}\beta x&=\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\alpha y)-1,\\ \beta y&=-\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(\alpha y).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

它有一个解是 $x=y=0$,即在复平面的原点处总有一个极点. 考虑到电子半径 $L$ 是一个可调参量,以下按 $L$ 相对临界半径的大小分别讨论.

当 $L>c\tau$ 时,有 $\beta>0$,假设 $x_0>0$ 是一个根,考虑方程组(5)的第一个方程,由于 $\alpha>0$,$\mathrm{e}^{-\alpha x_0}<1$ 和 $\cos(\alpha y)\leqslant 1$,所以方程的右边小于 0,这与左边 $\beta x_0>0$矛盾. 所以只存在 $x\leqslant 0$ 的解. 换句话说,所有的极点都在复平面的左半平面和虚轴上(这时在虚轴上只有一个极点即原点). 只要选取任意 $\sigma>0$,就可以算出逆变换. 为此,取图 1 所示的围道.

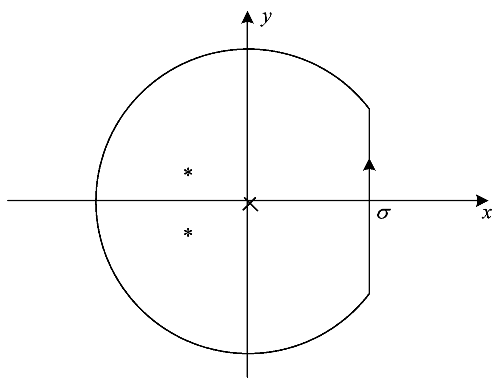


**图 1　积分的围道**

**Fig. 1　The integral contour**

因为

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\beta p-\mathrm{e}^{-\alpha p}+1}=0,$$

所以当圆的半径趋于无穷时,沿半圆的积分趋于 0. 所以逆变换(3)等于在所有极点处的留数之和

$$\sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{p_k t}}{\beta p_k-\mathrm{e}^{-\alpha p_k}+1},p_k\right], \tag{6}$$

其中,$p_k$ 是围道内的极点,即式(4)的根. 因为

$$\lim_{p\to p_k}\frac{(p-p_k)^3}{\beta p-\mathrm{e}^{-\alpha p}+1}=\lim_{p\to p_k}\frac{6(p-p_k)^3}{-\alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha p}}=0,$$

所以所有的极点不是一阶就是二阶. 假设有一个二阶极点 $p_k$,则它意味着方程(4)可以写成$(p-p_k)^2g(p)$,其中 $g(p_k)\neq 0$,因此对 $p$ 求导,得

$$(\beta p-\mathrm{e}^{-\alpha p}+1)'=\beta+\alpha\mathrm{e}^{-\alpha p}\overset{p\to p_k}{=}0,$$

于是有如下方程组

$$\left.\begin{aligned}\beta p_k-\mathrm{e}^{-\alpha p_k}+1&=0,\\ \beta+\alpha\mathrm{e}^{-\alpha p_k}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

它的根是 $p_k=-\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}$,这不满足方程组的第一个方程,矛盾. 所以不存在二阶极点. 因而留数可以写成

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{pt}}{\beta p-\mathrm{e}^{-\alpha p}+1},p_k\right]=$$
$$\lim_{p\to p_k}\frac{(p-p_k)\mathrm{e}^{pt}}{\beta p-\mathrm{e}^{-\alpha p}+1}=\frac{\mathrm{e}^{p_k t}}{\beta+\alpha\mathrm{e}^{-\alpha p_k}}.$$

把所有的留数加起来就得到所要求的逆变换(式中已经把 $\alpha$ 和 $\beta$ 换成它们的原始值):

$$\sum_k\frac{\mathrm{e}^{p_k t}}{1+\dfrac{c\tau}{L}(\mathrm{e}^{-\frac{2L}{c}p_k}-1)}.\tag{8}$$

利用方程(4)可以化简式(8)的分母,得

$$\sum_k\frac{\mathrm{e}^{p_k t}}{1+\left(1-\dfrac{c\tau}{L}\right)\dfrac{2L}{c}p_k},$$

下面分情况讨论. 当 $L>c\tau$ 时,按照式(1)后的说明,此时的电子半径 $L$ 大于 $\dfrac{2}{3}r_e$($r_e$ 为电子经典半径),方程(1)的解为

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\int_0^t\frac{\boldsymbol{F}(t-\tau)}{m}\sum_k\frac{\mathrm{e}^{p_k\tau}}{1+\left(1-\dfrac{c\tau}{L}\right)\dfrac{2L}{c}p_k}\mathrm{d}\tau+$$
$$\left(1-\frac{c\tau}{L}\right)\dot{\boldsymbol{R}}(0)\sum_k\frac{\mathrm{e}^{p_k t}}{1+\left(1-\dfrac{c\tau}{L}\right)\dfrac{2L}{c}p_k}.\tag{9}$$

因为所有的 $p_k$ 的实部都小于 0,所以当时间趋于无穷时,可把积分和求和交换,写成

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\sum_k\int_0^t\frac{\boldsymbol{F}(t-\tau)}{m}\frac{\mathrm{e}^{p_k\tau}}{1+\left(1-\dfrac{c\tau}{L}\right)\dfrac{2L}{c}p_k}\mathrm{d}\tau+$$
$$\left(1-\frac{c\tau}{L}\right)\dot{\boldsymbol{R}}(0)\sum_k\frac{\mathrm{e}^{p_k t}}{1+\left(1-\dfrac{c\tau}{L}\right)\dfrac{2L}{c}p_k}.\tag{10}$$

考虑到外力的存在与否不影响方程的内禀属性,以下先不考虑外力.

因为对于所有的极点 $p_k$,$\mathrm{Re}(p_k)\leqslant 0$,所以在长时间后,所有的项趋于 0,除了第一项

$$\lim_{t\to\infty}\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\left(1-\frac{c\tau}{L}\right)\dot{\boldsymbol{R}}(0),$$

因此这个解没有奔离现象. 数值求解式(4)的根,可以发现除 0 以外实部最大的一个根的实部约为 $10^{-22}$,这意味着电子在很短的时间里就进入匀速运动状态.

现在把外力的影响计算在内,典型的情况是电子处在一个周期性的力场中,$\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{f}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,其中 $\boldsymbol{f}_0$ 是常数矢量. 代入式(10)并令 $t\to\infty$,得

$$\dot{\boldsymbol{R}}(\infty)=\frac{\boldsymbol{f}_0}{m}\frac{\sin\omega t}{\omega}+$$
$$\frac{\boldsymbol{f}_0}{m}\sum_k\frac{1}{p_k^2+\omega^2}(\omega\sin\omega t-p_k\cos\omega t)+$$
$$\left(1-\frac{c\tau}{L}\right)\dot{\boldsymbol{R}}(0).\tag{11}$$

当 $L=c\tau$ 时,$\beta=0$,由式(5)的第二个方程可得

$$y=\frac{n\pi}{\alpha}\qquad(n=0,\pm1,\pm2).$$

于是由式(5)的第一个方程可得

$$\cos(\alpha y)=1,\quad \mathrm{e}^{-\alpha x}=1,$$

由此得到所有的极点

$$p_k=\mathrm{i}\frac{2k\pi}{\alpha}.$$

同理可以证明所有这些极点都是一阶极点,所以逆变换是

$$\sum_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{\alpha}t}=\alpha\delta(t),$$

把它代入式(10)即得 $L=c\tau$ 条件下的解

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\frac{\alpha}{m}\boldsymbol{F}(t)\delta(t),\tag{12}$$

同样若 $\boldsymbol{F}(t)$ 为一个周期性的外力 $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{f}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,可得

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\frac{\boldsymbol{f}_0}{m}\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\tag{13}$$

即电子以外力的频率和相位振动.

当 $L<c\tau$ 时,有 $\beta<0$,考虑方程(4),假定 $p$ 是实数,则方程改写成

$$1-\mathrm{e}^{-\alpha p}=|\beta|p.\tag{14}$$

在 $p=0$ 点,方程左边的斜率等于 $\alpha$ 或 $2L/c$,而右边的斜率等于$|\beta|$或$\dfrac{2L}{c}\left(1-\dfrac{L}{c\tau}\right)$,所以右边的斜率小于左边的斜率. 因为 $p=0$ 总是根,所以必有一个正实根. 由方程(7)可得惟一的二阶极点 $p=-\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}$,这个极点的留数是$-\dfrac{2}{3|\beta|}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)t}$.

为了确定右半复平面上的根,从方程(5)中消去 $y$,得到 $x$ 的方程:

$$1-|\beta|x=$$
$$\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\left[\frac{\alpha}{|\beta|}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sqrt{1-\mathrm{e}^{2\alpha x}(1-|\beta|x)^2}\right].$$

方程左边是一条斜率为负的直线，右边是衰减的振荡函数，所以在右半复平面上只有有限个根，因此逆变换总是存在的. 右半平面上的根在变换后都有一个正实部，它们造成了解的奔离. 在文献[7]中，假设解为指数形式试解，得到的结果也与我们基本相同.

## 2 结论

本文由 Moniz 和 Sharp 的方程出发，求出了其严格解. 结果表明电子存在一个临界半径，它等于 2/3 的经典电子半径. 若电子的实际半径大于这个临界值，则电子在很短的弛豫时间后，就进入稳定的运动状态，且没有 Lorentz 理论中的奔离或预加速的困难. 但当电子半径小于或等于临界值时，方程就只能给出错误的运动状态. 因此 Moniz 和 Sharp 的方程从某种程度上解决了 Lorentz 理论的困难. 应该说，Moniz 和 Sharp 的方程只适用于解决奔离解和预加速的问题，方程的推导过程没有考虑相对论协变性，而且舍掉了所有的非线性项(在低速情况下应该是没问题的)，因此它还远不是一个完整的电子运动方程. 此外，方程的推导完全以非相对论经典电动力学为基础，因此求解过程中得到的电子临界半径，可以看作是对电动力学适用范围的一个粗略估计. 即约在 $10^{-15}$ m 的尺度以下，经典电动力学失效. 这是由电动力学理论对自身适用范围的预言. 更精确的估计需要考虑量子力学效应.

**致谢** 感谢美国 Argonne 国家实验室 Kim 教授的讨论和提供的研究资料！

### 参考文献(References)

[1] Abraham M. Theorie der Elektrizitat[M]. Leipzig: Teubner, 1905, Vol Ⅱ: Elektromagnetische Theorie der Strahlung.

[2] Lorentz H A. Theory of Electrons[M]. $2^{nd}$ ed.. New York: Dover, 1952.

[3] Dirac P A M. Classical theory of radiating electrons [J]. Proc. Roy. Soc. (London), 1938, A167: 148-169.

[4] Yaghjian A D. Relativistic Dynamics of a Charged Sphere[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992: 80-81.

[5] 张宗燧. 电动力学及狭义相对论[M]. 2 版. 北京：北京大学出版社，2004.

[6] Jackson J D. Classical Electrodynamics[M]. New York: Wiley, 1999: 751-753.

[7] Moniz E J, Sharp D H. Radiation reaction in nonrelativistic quantum electrodynamics [J]. Phys. Rev. D, 1977, 15: 2 850-2 865.

[8] Kim K J, Sessler A M. The equation of motion of an electron [C]// the $8^{th}$ Workshop on Advanced Acceleration Concepts. New York: Springer-Verlag, 1998.

[9] Kim K J. The equation of motion of an electron: A debate in classical and quantum physics[J]. Nucl. Instru. Meth. A, 1999, 429: 1-8.