

使用 GEM 求解 Bingham 流体在非均匀介质中的渗流问题*

邵德保, 卢德唐

(中国科学技术大学力学与机械工程系, 安徽合肥 230027)

摘要: 用 GEM (green element method) 求解了一维 Bingham 流体在均匀介质中的渗流问题, 并与边界元方法进行了比较, 发现两者基本吻合; 给出了二维 Bingham 流体非均匀介质渗流方程使用 GEM 的求解过程及运算结果, 并从 Bingham 渗流机理方面验证了 GEM 的可靠性。

关键词: 边界元法; GEM; 非均匀介质; Bingham 流体

中图分类号: O242.21 **文献标识码:** A

Solution to the flow problem of Bingham fluid in inhomogeneous medium with the green element method

SHAO De-bao, LU De-tang

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: The flow problem of 1D Bingham fluid in homogeneous medium was solved by means of the green element method (GEM). It has been found that the results obtained from GEM are consistent with those obtained with the boundary element method (BEM). The computing process and results of the flow equation of 2D Bingham fluid in inhomogeneous medium were given, and the reliability of GEM was validated based on the Bingham fluid theory.

Key words: boundary element method; green element method; inhomogeneous medium; Bingham flow

0 引言

传统的边界元法具有计算量小, 精度高的特点, 然而边界元法难以运用于非均匀介质问题, 且在处理大规模问题时遇到了困难. 为扩大边界元法的求解范围许多学者^[1~4]提出了 green element method (GEM), GEM 是边界元法按 element-by-element 方式执行的, 可以很好地解决非均匀介质问题, 而且

避免了边界元法形成满系数矩阵的缺点. 另外, GEM 采用有限元网格划分技术, 因而结合了边界元法的精确高效性和有限元方法多功能性的优点.

Bingham 流体的渗流问题在高粘度低渗透率油藏中是普遍存在的, 像油田开采中经常遇到的高含沥青和焦油的高粘度原油便具有 Bingham 流体的流变性. 由于 Bingham 流体渗流的性质使得问题的求解相当复杂, 尤其是在非均匀介质中的求解. 目前

* 收稿日期: 2006-04-26; 修回日期: 2006-07-06

基金项目: 国家重点基础研究发展(973)计划(2006CB705805), 国家自然科学基金(10672159)和油气藏地质开发工程国家重点实验室(西南石油学院)开放基金(PLN0409)资助.

作者简介: 邵德保, 男, 1982年生, 硕士生. E-mail: dbshao@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 卢德唐, 教授. E-mail: dtlu@ustc.edu.cn; Tel: 0551-3603674; Fax: 0551-3603674

为止,对非均匀介质中 Bingham 流体渗流问题还没有学者进行研究.

本文通过引进 GEM 成功地对 Bingham 流体在非均质介质中的渗流问题进行了求解.文中首先使用 GEM 求解了 Bingham 流体在均匀介质中的平面径向渗流问题,并与边界元方法进行了比较,两者误差较小.最后讨论了用 GEM 求解二维 Bingham 流体在非均匀介质中的渗流问题,给出了求解过程和计算结果,并从理论上分析了结果的可靠性.

1 二维 Bingham 流体渗流方程

Bingham 流体渗流的广义 Darcy 定律^[5]可写成

$$V = -\frac{K}{\mu} \nabla p \left[(1 - \lambda H) - \frac{1}{3} \lambda H (1 - \lambda^3 H^3) \right]. \quad (1)$$

其中, $H = 1/|\nabla p|$.

为简单起见,对 Bingham 流体渗流方程进行某些简化^[6],略去方程(1)式中的 $\lambda^4 H^4$ 项,且为了满足 $|\nabla p| = \lambda$ 时速度为零,只保留 λH 而不是 $\frac{4}{3} \lambda H$ 项.采用近似在 $\lambda/|\nabla p| < 0.1$ 范围内引起的误差不超过 3%.利用近似的广义 Darcy 定律可得 Bingham 流体渗流方程如下

$$(1 - \lambda H) \nabla \left(\frac{K}{\mu} \nabla p \right) - \lambda \frac{K}{\mu} \nabla H \cdot \nabla p = \phi_{c_i} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2)$$

式中, $\lambda, K, p, \phi, \mu, c_i, t$ 分别表示启动压力梯度 ($L^3 T/M$)、绝对渗透率 (L^2)、压力 (M/LT^2)、孔隙度 (无量纲)、粘度 (M/LT)、综合压缩系数 (LT^2/M)、时间 (T).

对方程(2)进行化简,得到有利于边界元法求解所需的 ∇^2 项,于是

$$(1 - \lambda H) \nabla^2 p = - (1 - \lambda H) \nabla \ln \frac{K}{\mu} \cdot \nabla p + \lambda \nabla H \cdot \nabla p + \frac{\phi_{c_i}}{K/\mu} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3)$$

显然,对于均匀介质,式(3)中的 $(1 - \lambda H) \nabla \ln \frac{K}{\mu} \cdot \nabla p$ 项为零 (K 为一常数),从而使得均匀介质问题相对非均匀介质问题简单了很多.不妨令 $M = \frac{K}{\mu}$, 表示流度 ($L^3 T/M$); $\omega = \phi_{c_i}$, 表示储容 (LT^2/M).在方程(3)的两边同乘上 $G = \ln(r - r_i)$ (其中 r 即 $r(x, y)$ 表示求解区域中的任一点坐标,表示源点坐标),再对其在求解区域内积分,得

$$\iint_{\Omega} G \nabla^2 p d\Omega = \iint_{\Omega} G \left(\lambda H \nabla^2 p - \nabla \ln M \cdot \nabla p + \lambda H \nabla \ln M \cdot \nabla p + \lambda \nabla H \cdot \nabla p + \frac{\omega}{M} \frac{\partial p}{\partial t} \right) d\Omega. \quad (4)$$

其中, Ω 表示整个二维的求解区域.

对式(4)利用 Green 函数进行分部积分,有

$$- \alpha p(r_i, t) + \int_{\Gamma} (p \cdot \nabla G - G \cdot \nabla p) \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{\Omega} G \left(\lambda H \nabla^2 p - \nabla \ln M \cdot \nabla p + \lambda H \nabla \ln M \cdot \nabla p + \lambda \nabla H \cdot \nabla p + \frac{\omega}{M} \frac{\partial p}{\partial t} \right) d\Omega = 0. \quad (5)$$

上式中, \mathbf{n} 是求解区域边界的外法向量, α 表示节点 i 相对于源点的夹角与 2π 的比值,当源点在求解区域内时其值为 1,而源点在边界上时值为 $\frac{1}{2}$.

从积分方程(5)可以看到,问题区域中任意点 i 的压力值 p 可以通过对其的求解获得.然而方程(5)是相当复杂的,不可能通过解析的方法去求得,需要采用数值求解的方法.首先采用有限元网格的划分技术将求解区域 Ω 划分为 N 个小区域 Ω^e ,分别对这 N 个小区域进行积分并求和,得到一个离散化的积分方程.

同时对 $p, \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}$ 进行变量分离^[5],即令

$$p(r, t) = N_j(r) p_j(t),$$

$$\frac{\partial p(r, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial N_j(r)}{\partial \mathbf{n}} p_j(t).$$

另外流度可以写成

$$\ln M(r) = N_j(r) \ln M_j,$$

储容写成

$$\ln \omega(r) = N_j(r) \ln \omega_j.$$

经过上面的一系列处理之后方程(5)转化为下式

$$- \alpha p(r_i, t) + \sum_{e=1}^N \left[\int_{\Gamma^e} \left(N_j \frac{\partial G(r, r_i)}{\partial \mathbf{n}} p_j - G(r, r_i) \frac{\partial N_j}{\partial \mathbf{n}} p_j \right) ds + \iint_{\Omega} G(r, r_i) \left(- \nabla N_j \cdot \nabla N_i \ln M_j p_i + \frac{N_i N_m}{N_j} \frac{\omega_m}{M_j} \frac{\partial p_i}{\partial t} + f \right) d\Omega \right] = 0. \quad (6)$$

式中, $f = \lambda \frac{\nabla^2 N_j}{|\nabla N_j|} + \lambda \frac{\ln M_i \nabla N_i \cdot \nabla N_j}{|\nabla N_j|} +$

$$\lambda \nabla \left(\frac{1}{|\nabla N_j|} \right) \cdot \nabla N_j.$$

方程(6)可以简化成

$$\sum_{e=1}^N \left(R_{ij}^e p_j - U_{ijl}^e \ln M_j p_l + V_{ijlm}^e \frac{\omega_m}{M_j} \frac{\partial p_l}{\partial t} + F_i^e \right) = 0. \quad (7)$$

式中

$$R_{ij}^e = \int_{\Gamma^e} \left(\frac{\partial G(r, r_i)}{\partial \mathbf{n}} N_j - G(r, r_i) \frac{\partial N_j}{\partial \mathbf{n}} \right) ds - \omega \delta_{ij};$$

$$U_{ijl}^e = \iint_{\Omega^e} G(r, r_i) \nabla N_j \cdot \nabla N_l d\Omega;$$

$$V_{ijlm}^e = \iint_{\Omega^e} G(r, r_i) \frac{N_l N_m}{N_j} d\Omega;$$

$$F_i^e = \iint_{\Omega^e} G(r, r_i) f d\Omega.$$

对方程(7)在时间项上进行离散,取其全隐式形式,得离散化方程如下

$$\sum_{e=1}^N \left[R_{ij}^e p_j^{n+1} - U_{ijl}^e \ln M_j p_l^{n+1} + V_{ijlm}^e \frac{\omega_m}{M_j} \frac{(p_l^{n+1} - p_l^n)}{\Delta t} + F_i^e \right] = 0. \quad (8)$$

2 算例及其结果

2.1 一维径向均匀介质模型

考虑平面径向流的 Bingham 流体在均匀介质(认为 K 是常数)中的渗流问题,此时式(2)可化简为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\lambda}{r} = \frac{\phi \mu c_t}{K} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (9)$$

引进无量纲量^[6]

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad t_D = \frac{Kt}{\phi \mu c_t r_w^2},$$

$$p_D = \frac{2\pi Kh(p_i - p)}{Q\mu}, \quad \lambda_D = \frac{2\pi Kh r_w \lambda}{Q\mu}.$$

其中, Q, h 分别表示流量 (L^3/T)、地层有效厚度 (L).

将式(9)化为

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} + \frac{\lambda_D}{r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}. \quad (10)$$

考虑无限大外边界条件^[5,6]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=r_D(t_D)} &= -\lambda_D \\ \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D \rightarrow \infty} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

及考虑表皮因子 S 和无量纲井储常数 C_D 的内部边界条件^[5,6]

$$\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = C_D \frac{dp_{wD}}{dt} - (\lambda_D + 1). \quad (12)$$

其中, $p_{wD} = \left[p_D(r_D, t_D) - S \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right] \Big|_{r_D=1}$, 初始条件为 $p_D(r_D, t_D) \Big|_{t_D=0} = 0$.

考虑均匀径向求解区域,外部区域取与生产井同心的圆.其中外圆半径 $R_D = 10^{20}$ (认为是无穷大外边界),内圆半径 $r_D = 1, C_D e^{2s} = 1.4 \times 10^4, \lambda_D = 2.2 \times 10^{-4}$.

对方程(10)及定解条件分别采用 GEM 和边界元法进行了计算,并绘制出无量纲压力及其导数的双对数曲线(如图 1(a)),以及半对数曲线(如图 1(b)).通过对使用 GEM 和使用边界元法分别计算所得的数据分析发现,两者的无量纲压力误差较小,

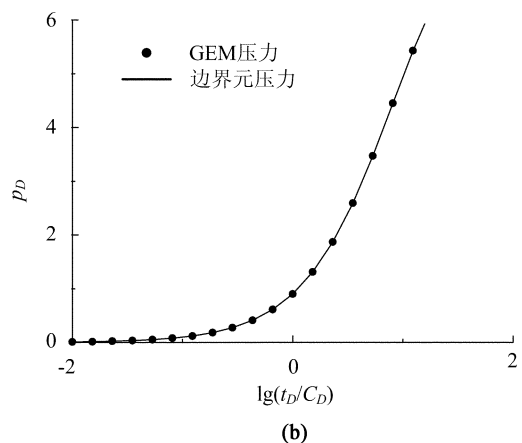
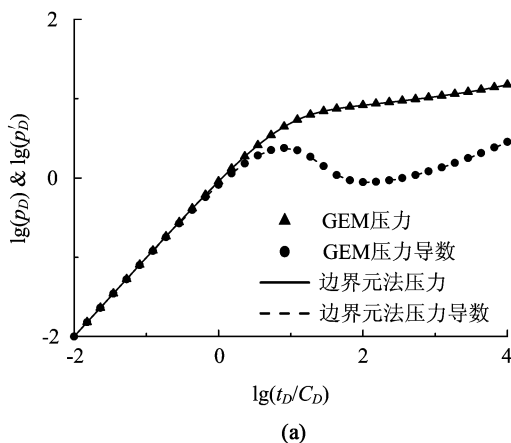


图 1 GEM 和边界元法的计算结果比较

Fig. 1 Compared the result calculated with GEM and BEM

最大误差小于 1%，这已在图 1 中体现出来，两种方法计算结果绘成的曲线基本重合。在理论上，由图 1 (a) 可以发现，当时间 t_D/C_D 较大时，无量纲压力及其导数曲线两者基本平行，斜率趋近于 $\frac{1}{2}$ ，即当 $t_D/C_D \rightarrow \infty$ 时，有 $p_D \propto \sqrt{t_D}$ ，这与均质无限大地层中低速非达西渗流 (Bingham 流体渗流与低速非达西渗流方程相同) 在时间较大时的解析解相同^[5,6]，从而验证了本文采用的 GEM 程序的正确性。

2.2 二维非均质模型

在石油的勘探与开发中，由于多种原因 (如地质条件的变化、注水、注聚合物以及热采等等) 都会造成地层的非均质性，油气田的渗流中使用复合油藏模型处理该类非均质问题。本文研究矩形区域复合油藏的 Bingham 流体渗流问题，考虑如图 2 所示的复合矩形区域，假设生产井处于矩形区域的中心，在生产井外围是有着不同的流度 $M \left(M = \frac{K}{\mu} \right)$ 和储容 ω ($\omega = \phi c_i$) 的矩形区域。其中，外部矩形取为 $10^{20} \times 10^{20}$ (认为是无限大区域)，内部矩形取为 $3\,000 \times 3\,000$ 。

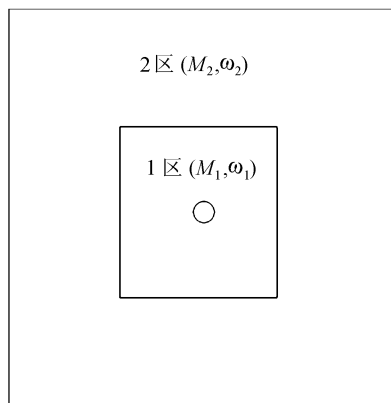


图 2 非均质矩形求解区

Fig. 2 Rectangle model of inhomogeneous medium

对方程 (8) 采用以下的无量纲

$$r_D(x, y) = \frac{r(x, y)}{r_w(x, y)}, t_D = \frac{M_1 t}{\omega_1 r_w^2},$$

$$p_D = \frac{2\pi M_1 h (p_i - p)}{Q}, \lambda_D = \frac{2\pi M_1 h r_w \lambda}{Q}.$$

类似 2.1 节，对复合矩形区域模型的边界条件采用上述无量纲进行无量纲化 (外部边界条件考虑无限大边界，内部边界条件考虑有表皮因子 S 和无量纲井储常数 C_D 影响时的情况)。

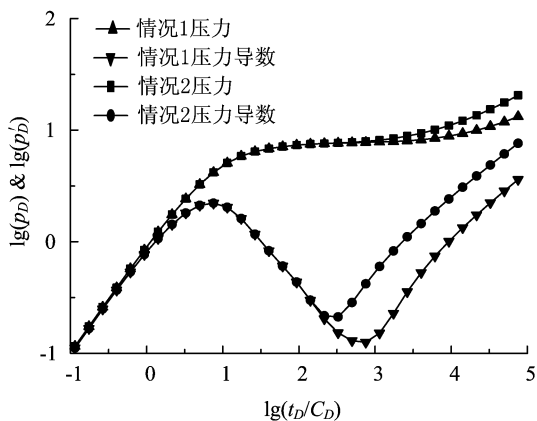
本文中，针对内外矩形区域的不同的流度比

$M_{12} \left(M_{12} = \frac{M_1}{M_2} \right)$ 和储容比 $\omega_{12} \left(\omega_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)$ ，以及不同的启动压力梯度 λ_D 分别用 GEM 进行了计算。具体取值如表 1 所示。根据计算结果绘得无量纲压力及其导数曲线如图 3 所示。其中，图 3(a) 为相同流度比 ($M_{12} = 0.2$)，不同启动压力梯度 ($\lambda_D = 8 \times 10^{-5}$ 和 $\lambda_D = 3 \times 10^{-4}$) 下的无量纲井底压力及其导数

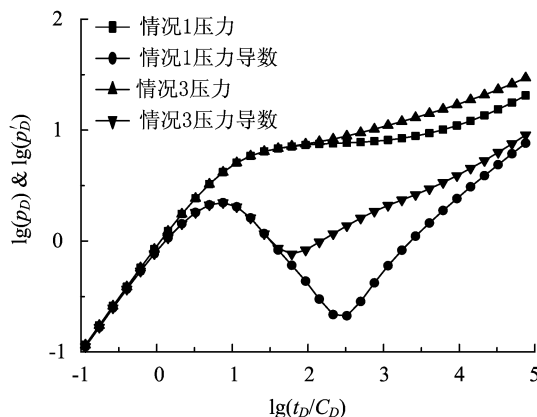
表 1 算例中使用的流度比、储容比以及启动压力梯度的对应值

Tab. 1 Corresponding values of fluidity ratio, store capacity ratio and startup pressure gradient that the example uses

情况	对应值		
	M_{12}	ω_{12}	λ_D
1	0.2	2	8×10^{-5}
2	0.2	2	3×10^{-4}
3	3	2	8×10^{-5}
4	3	2	3×10^{-4}



(a) 启动压力不同时比较图



(b) 流度比不同时比较图

图 3 GEM 求解复合矩形区域模型的计算结果

Fig. 3 Computing result of compound rectangle model using GEM

数的双对数图. 从图中可以看出: 当时间较大时, 导数曲线都有上翘, 其特征与均质无限大地层时间较大时相同. 随着启动压力梯度的增加, 导数曲线上翘的时间变小, 由于本例中流度比 $M_{12} = 0.2$, 所以如果启动压力梯度很小时, 中间一段的压力导数趋近于 $M_{12}/2$. 图 3(b) 为相同启动压力梯度 ($\lambda_D = 8 \times 10^{-5}$), 不同流度比 ($M_{12} = 0.2$ 和 $M_{12} = 3$) 时的无量纲井底压力及其导数的双对数图, 从图中可以看出: 不同流度比的导数曲线在时间趋向于无穷大时, 导数曲线重合, 而由于流度比不同造成导数上翘的时间也不相同, 主要是在中期压力导数趋向于 $M_{12}/2$. 图中曲线的形状和走势与理论分析的结果基本吻合, 从而证明了 GEM 在求解 Bingham 流体在非均匀介质中的渗流问题是具有可行性的.

3 结论

GEM 是一个既具有边界元方法的某些优点, 又可以求解非均匀介质问题的数值计算方法. 本文将这种方法应用到求解非均匀介质地层 Bingham 流体渗流问题, 得出以下结论:

(I) 不同大小的启动压力梯度影响 Bingham 流体渗流, 当启动压力梯度增加时, Bingham 流体渗流阻力增加, 导致井底压力变化幅度增加.

(II) 地层的非均质性(流度比的不同)也影响 Bingham 流体渗流, 主要表现在中期(即有着不同流度比的内环和外环同时影响的阶段). 当时间较大(即渗流贡献主要来自外环)时, 非均质性影响消失.

(III) 本文的研究对油田的 3 次开采中压力分析

具有重要指导作用, 通过使用 GEM 使得该类问题的求解变得简单可行. 对该问题的进一步研究可望解决其他非均质、非牛顿渗流问题(如裂缝井、幂律非牛顿流体等).

参考文献(References)

- [1] Archer R A, Horne R N. Green element method and singularity programming for numerical well test analysis [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2002, 26(6): 537-546.
- [2] Archer R A, Horne R N. The green element method for numerical well test analysis[R]. SPE 62916, 2000.
- [3] Taigbenu A E. The green element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 38(13): 2 241-2 263.
- [4] Taigbenu A E, Onyejekwe O O. Green element simulations of the transient nonlinear unsaturated flow equation[J]. *Applied Mathematic Modelling*, 1995, 19(11): 675-684.
- [5] 孔祥言. 高等渗流力学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999: 408-415.
- [6] GUO Yong-cun, LU De-tang, ZENG Qing-hong, et al. Mathematical model of fluid flow in porous media related to start-up pressure gradients[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2005, 35(4): 492-498.
郭永存, 卢德唐, 曾清红, 等. 有启动压力梯度渗流的数学模型[J]. *中国科学技术大学学报*, 2005, 35(4): 492-498.
- [7] 郭永存, 卢德唐, 马凌霄. 低渗透油藏渗流的差分法数值模拟[J]. *水动力学研究与进展*, 2004, 19(3): 288-293.