

用圆判据方法设计非线性观测器^{*}

王冰, 季海波, 奚宏生

(中国科学技术大学自动化系, 合肥 230027)

摘要: 研究一类非线性系统的观测器设计方法, 其中观测器误差系统中非线性部分满足一般扇区条件. 该系统的观测器误差系统可表示为线性部分与时变非线性部分反馈连接的形式. 利用满足一般扇区条件非线性系统稳定性的圆判据设计方法, 得到观测器误差系统渐近稳定的严格正实条件, 实现非线性观测器的设计.

关键词: 圆判据; 非线性观测器; 严格正实条件

中图分类号: TP13

文献标识码: A

0 引言

有关非线性系统控制设计的研究近年来取得了很大的进展^[1,2,4], 但在非线性观测器方面取得的成果却较少. 一些早期的成果大都在全局 Lipschitz 条件下进行的, 因此排除了很多常见的非线性情况, 如 x^3 , e^x 等. Khalil^[4] 利用高增益方法设计观测器, 为了得到收敛的高增益观测器, 需要满足全局 Lipschitz 条件. Marino 和 Tomei^[5] 采用 Lyapunov 设计方法, 研究了一类非线性输出反馈规范形的观测器问题.

文献[7]中对一类非线性模型采用圆判据设计观测器, 避免了全局 Lipschitz 条件. 但是在[7]中要求系统中未知状态的非线性向量值函数没有耦合, 满足单变量扇区条件, 并且为非减函数. 这样对扇区条件的要求就很严格, 减弱了这一观测器设计方法的通用性. 本文中, 我们将扇区条件加以拓展, 利用 Lyapunov 稳定性设计方法以及结构图变换, 得到这一非线性模型在一般扇区条件下非线性观测器的设计方法, 并且将结果归结为一个满足严格正实条件(SPR)的传递函数矩阵. 这样圆判据设计方法可以在一般扇区条件下, 用于[7]中非线性系统的观测器设计, 推广了圆判据方法的应用范围. 最后我们给出一个应用实例, 说明这一方法的可行性.

1 问题提出

我们考虑如下一类非线性系统^[7]

$$\dot{x} = Ax + G\gamma(Hx) + \rho(y, \mu) \quad (1)$$

* 收稿日期: 2002-11-26

基金项目: 安徽省自然科学基金资助项目(03042302)

作者简介: 王冰, 男, 1975年生, 硕士生. E-mail: iceking@mail.ustc.edu.cn

$$y = Cx \tag{2}$$

的观测器设计. 其中状态 $x \in \mathbb{R}^n$, 输出 $y \in \mathbb{R}^p$, 输入 $\mu \in \mathbb{R}^m$, (A, C) 可测, $\gamma(\cdot)$ 和 $\rho(\cdot)$ 是局部 Lipschitz 的, 状态相关非线性部分 $\gamma(Hx)$ 是一个 p 维向量值函数, 其中每一个元素都是状态 x 的线性组合的函数.

$$\gamma_i = \gamma_i \left(\sum_{j=1}^n H_{ij} x_j \right), i = 1, 2, \dots, p \tag{3}$$

首先, 我们给出一般扇区条件, 定义如下:

定义 1 一个无记忆非线性函数 $g: [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ 被称作满足扇区条件, 如果

$$[g(t, y) - K_{\min} y]^T [g(t, y) - K_{\max} y] \leq 0, \forall t \geq 0, \forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p \tag{4}$$

其中 K_{\min} 和 K_{\max} 为实矩阵, 且满足 $K = K_{\max} - K_{\min}$ 是一个正定对称阵. Γ 是连通域且包含原点. 如果 $\Gamma = \mathbb{R}^p$, 则 $g(\cdot, \cdot)$ 全局满足扇区条件, 记作 $g(\cdot, \cdot)$ 属于扇区 $[K_{\min}, K_{\max}]$. 如果 (4) 式严格不等, 则记作 $g(\cdot, \cdot)$ 属于扇区 (K_{\min}, K_{\max}) .

当 γ_i 为非减函数, 即 $g(\cdot, \cdot)$ 属于扇区 $[0, \infty)$ 时 (如图 1(a) 所示), 文献 [7] 中已有具体讨论 ($\gamma_i(\cdot)$ 与 $g(\cdot, \cdot)$ 关系在下节推导中有具体论述). 我们现将约束条件充分放宽, 考虑满足一般扇区条件 $[K_{\min}, K_{\max}]$ 的情况 (如图 1(b) 所示), 其中 $K_{\min}, K_{\max} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 且 $K_{\max} - K_{\min}$ 为正定对称阵. 我们作出以下假设

假设 1 非线性函数 $g(\cdot, \cdot)$ 满足扇区条件

$$[g(t, y) - K_{\min} y]^T [g(t, y) - K_{\max} y] \leq 0, \forall t \geq 0, \forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p \tag{5}$$

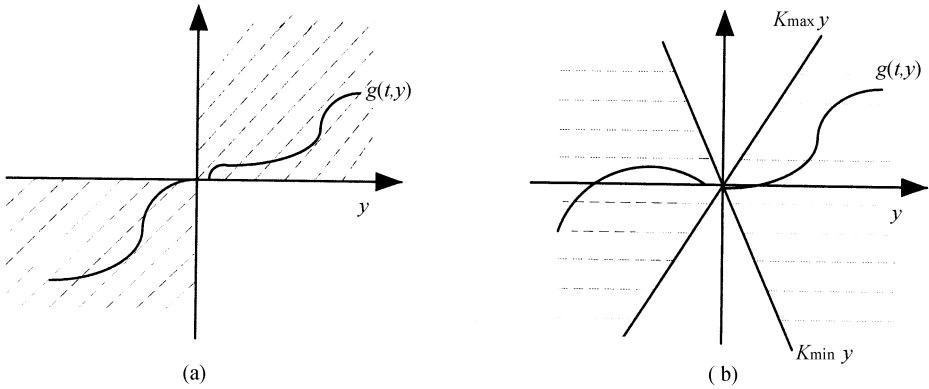


图 1 扇区条件

Fig. 1 Sector condition

为了下节中推导的需要, 在此给出正实性引理 (Kalman-Yakubovich-Popov 引理) 如下:

引理 1 令 $\Omega(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 是一个 $p \times p$ 的传递函数矩阵, 其中 A 是 Hurwitz 的, (A, B) 可控, (A, C) 可观, 则 $\Omega(s)$ 是严格正实的充要条件为: 存在一个正定对称阵 P , 矩阵 W 和 L , 及一个正常数 ϵ , 使得

$$PA + A^T P = -L^T L - \epsilon P \tag{6}$$

$$PB = C^T - L^T W \tag{7}$$

$$W^T W = D + D^T \tag{8}$$

该引理的证明可参看文献 [3].

2 非线性观测器设计

对系统(1)–(2),我们构造非线性观测器,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) + G\gamma(H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)) + \rho(y, \mu) \quad (9)$$

只需确定观测器矩阵 $K \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 和 $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 即可达到设计目标. 由(1)和(9)可知观测器误差 $e = x - \hat{x}$ 决定于

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A + LC)e + G[\gamma(v) - \gamma(w)] \quad (10)$$

其中 $v := Hx, w := H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)$. 我们将观测器误差系统(10)表示为一个线性系统与一个满足扇区条件的非线性系统的反馈连接. 首先, $\gamma(v) - \gamma(w)$ 可看作 v 和 z 的一个函数, 其中 $z := v - w = (H + KC)e$, 则关于 z 的时变非线性部分为

$$g(t, z) = \gamma(v) - \gamma(v - z) \quad (11)$$

其中时间 t 决定于 $v(t)$. 这时, 观测器误差系统可写为

$$\dot{e} = (A + LC)e + Gg(t, z) \triangleq A_0e + B_0u \quad (12)$$

$$z = (H + KC)e \triangleq C_0e \quad (13)$$

$$u = -g(t, z) \quad (14)$$

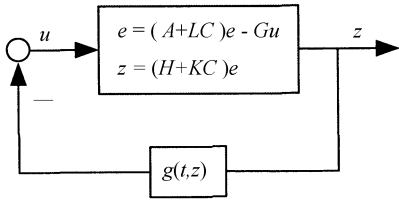


图 2 观测器误差系统

Fig. 2 Observer error system

如图 2 所示, 已知 $g(t, z)$ 满足扇区条件 $[g(t, z) - K_{\min}z]^T [g(t, z) - K_{\max}z] \leq 0$.

2.1 扇区为 $[0, K_{\max}]$ 的情况

设 $K_{\min} = 0, K_{\max} = K_0$, 我们先研究

$$g^T(t, z) [g(t, z) - K_0z] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall z \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p \quad (15)$$

的情况, 其中 K_0 是一个正定对称阵. 取 Lyapunov 函数为

$$V(e) = e^T P e$$

其中 P 为待定的正定对称阵. 则 $V(e)$ 关于(12)–(14)的时间导数为

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} = e^T (A_0^T P + P A_0) e - 2g^T B_0^T P e$$

由(15)式 $g^T(g - K_0z) \leq 0$, 可知 $-2g^T(g - K_0z) \geq 0$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq e^T (A_0^T P + P A_0) e - 2g^T B_0^T P e - 2g^T g + 2g^T K_0 z = \\ &e^T (A_0^T P + P A_0) e - 2e^T (P B_0 - C_0^T K_0) g - 2g^T g \end{aligned}$$

设存在矩阵 $P = P^T > 0$ 和 L_0 , 及常数 $\epsilon > 0$ 使得

$$A_0^T P + P A_0 = -L_0^T L_0 - \epsilon P \quad (16)$$

$$P B_0 = C_0^T K_0 - \sqrt{2} L_0^T \quad (17)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\epsilon e^T P e - (L_0 e - \sqrt{2}g)^T (L_0 e - \sqrt{2}g) \leq \\ &-\epsilon e^T P e \end{aligned}$$

因此, 只要找到 P, L_0 和 ϵ 满足(16)–(17), 则可得 $V(x)$ 为负定的. 由引理 1 可知, 这等价于 $\Omega_0(s) = I + K_0 C_0 (sI - A_0)^{-1} B_0$ 严格正实, 再由圆判据我们可以判定系统(12)–(14)渐近稳定. 所以只需求得 K, L 使得 $\Omega_0(s)$ 严格正实或满足(16)–(17), 就可完成观测器在扇区条件(15)下的设计工作.

2.2 扇区为 $[K_{\min}, K_{\max}]$ 的情况

现在考虑一般的扇区条件

$$[g(t, z) - K_{\min}z]^T [g(t, z) - K_{\max}z] \leq 0 \tag{18}$$

其中 $K_1 = K_{\max} - K_{\min}$ 为正定对称阵.

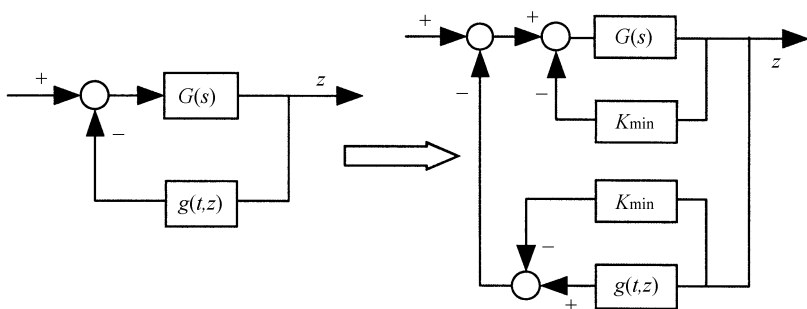


图 3 结构图变换

Fig. 3 Loop transformation

我们可以通过结构图变换将扇区条件 (18) 归为扇区条件 (15) 的情况. 如图 3 所示, 在原系统中线性部分 $G(s)$ 加上负反馈 $K_{\min}z$. 该变换定义了新的线性部分和新的非线性部分. 其中新的线性部分为

$$G_T(s) = G(s)[I + K_{\min}G(s)]^{-1}$$

等价于状态空间方程

$$\dot{e} = (A_0 - B_0K_{\min}C_0)e + B_0u \tag{19}$$

$$z = C_0e \tag{20}$$

新的非线性部分为

$$g_T(t, z) = g(t, z) - K_{\min}z \tag{21}$$

其中 $g_T(t, z)$ 满足 $g_T^T(g_T - K_1z) \leq 0, K_1 = K_{\max} - K_{\min}$. 则可推知

$$(g - K_{\min}z)^T (g - K_{\min}z - K_1z) \leq 0$$

即为

$$(g - K_{\min}z)^T (g - K_{\max}z) \leq 0$$

因此如果 $g(\cdot, \cdot)$ 满足扇区条件 (18), 等价于新系统中非线性部分 $g_T(\cdot, \cdot)$ 满足扇区条件 (15). 此时新系统可写成

$$\dot{e} = (A_0 - B_0K_{\min}C_0)e + B_0u \triangleq A_1e + B_0u \tag{22}$$

$$z = C_0e \tag{23}$$

$$u = -g_T = -(g - K_{\min}z) \tag{24}$$

类似于 2.1 节的推导过程, 可知若存在 $P_1 = P_1^T > 0, \epsilon_1 > 0$ 和 L_1 满足

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -L_1^T L_1 - \epsilon_1 P_1 \tag{25}$$

$$P_1 B_0 = C_0^T K_1 - \sqrt{2} L_1^T \tag{26}$$

即等价于传递函数矩阵

$$\Omega_1(s) = I + K_1 G_T(s) = I + (K_{\max} - K_{\min}) C_0 (sI - A_0 + B_0 K_{\min} C_0)^{-1} B_0$$

严格正实, 则圆判据可判定系统 (12)—(14) 在扇区条件 (18) 下渐近稳定. 所以对于属于扇区 $[K_{\min}, K_{\max}]$ 的非线性系统观测器的设计, 就转化为寻找矩阵 K, L 使其满足传递函数矩阵 $\Omega_1(s)$ 严格正实. 只需找到 K, L 使得 $\Omega_1(s)$ 严格正实, 我们就完成了该非线性系统观测器的设计. 以下用实例对这一设计方法加以说明.

3 实例分析

例 已知非线性系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - \sin x_2 + \mu \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

由于 $\sin x_2$ 不是非减函数, 所以 [7] 中的方法不能适用于该系统. 设计观测器 (k 为观测器参数) 可以得到

$$g(t, z) = \sin x_2 - \sin(\hat{x}_2 + k(\hat{x}_1 - y))$$

其中 $z = x_2 - \hat{x}_2 - k(\hat{x}_1 - y)$ 且设 $|z| < 1$. 则有

$$\begin{aligned} g(t, z) &= \sin x_2 - \sin(x_2 - z) = \\ &= 2 \sin \frac{z}{2} \cos(x_2 - \frac{z}{2}) \leq |z| \end{aligned}$$

因此, $g(t, z)$ 属于扇区 $[-1, 1]$.

由系统可知 $G = [0 \quad -1]^T$, $H = [0 \quad 1]$, 设

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad K = k$$

则有

$$A_0 = A + LC = \begin{bmatrix} 1 + l_1 & 1 \\ l_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = -G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_0 = H + KC = [k \quad 1]$$

由 $g(z)$ 属于扇区 $[-1, 1]$, 可得 $K_{\min} = -1, K_{\max} = 1$. 计算 $A_1 = A_0 - B_0 K_{\min} C_0$, 可得

$$\Omega(s) = I + (K_{\max} - K_{\min})C_0(sI - A_1)^{-1}B_0 = \frac{s^2 - (1 + l_1)s + (k - l_2)}{s^2 - (3 + l_1)s + (2 + 2l_1 - l_2 - k)}$$

只需找到 L 和 K , 使得 $\Omega(s)$ 满足严格正实条件就可设计出非线性观测器.

取 $L = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$, $K = -4$, 可求得

$$\Omega(s) = \frac{s^2 + 4s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

满足严格正实条件, 所以得到观测器为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -5(\hat{x}_1 - y) + \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -5(\hat{x}_1 - y) + \hat{x}_2 + \mu - \sin(\hat{x}_2 - 4(\hat{x}_1 - y)) \end{aligned}$$

4 结论

本文利用圆判据设计非线性观测器,对文献[7]中的设计方法加以拓展.对于一类模型较一般的非线性系统,在满足一般性扇区条件下,可以构造其渐近稳定的非线性观测器.这种方法利用了严格正实条件和圆判据,不同于以往非线性观测器的设计方法,使得这种设计适用于更多的非线性系统.在本文基础上可以进一步研究非线性观测器的鲁棒性或基于观测器的反馈控制设计.

参 考 文 献

- [1] Kokotović P V and Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective [J]. Automatica, 2001, 37(5):637-662.
- [2] Kanellakopoulos I, Kokotović P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr, 1991, 36(11):1241-1253.
- [3] Khalil H K. Nonlinear System(2nd edition) [M]. New Jersey:Prentice - Hall,1996.
- [4] Khalil H K. Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input - output models [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(2):177-188.
- [5] Marino R and Tomei P. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(8):1239-1245.
- [6] Marino R and Tomei P. Nonlinear Control Design Geometric, Adaptive and Robust [M]. London:Prentice Hall,1995.
- [7] Arcak M and Kokotović P V Nonlinear Observers:a circle criterion design and robustness analysis [J]. Automatica, 2001, 37(12):1923-1930.

Nonlinear Observer Design via Circle Criterion

WANG Bing, JI Hai- bo, XI hong- sheng

(Dept. of Automation, USTC, Hefei 230027, China)

Abstract: Nonlinear observers are designed for a class of systems where the nonlinearity of the observer error system satisfies a general sector condition. The approach is to represent the observer error system as a feedback interconnection of a linearity and a time- varying sector nonlinearity. Using the circle criterion, if the observer error system with nonlinearity satisfying the general sector condition can be made strictly positive real, the designed nonlinear observer is asymptotically stable.

Key words: circle criterion; nonlinear observer; strictly positive real