

文章编号: 1000-3851(2010)03-0155-07

直升机桨叶蒙皮大梁粘结面分层裂纹端部场分析

马存旺, 刘 勇, 张呈林*

(南京航空航天大学 直升机旋翼动力学国家重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 针对直升机桨叶受离心力、挥舞和摆振弯曲、扭矩等载荷特性, 采用非线性桨叶结构模型, 推导了复合材料桨叶蒙皮的广义二维位移方程。在此基础上, 基于 Stroh 理论, 应用各向异性界面断裂力学给出桨叶蒙皮大梁粘结面分层裂纹端部的应力与位移通解的渐近表达式。联合其特解, 采用边界配置法计算了离心力作用下桨叶蒙皮与大梁之间存在分层裂纹时裂尖的奇异应力及应力强度因子, 与采用界面元法计算的结果接近, 表明本文方法可有效地分析复合材料桨叶蒙皮大梁间的分层破坏, 为研究桨叶分层失效提供依据。

关键词: 直升机桨叶; 蒙皮与大梁; 分层裂纹; 界面断裂; 应力强度因子

中图分类号: V211.47 **文献标志码:** A

Analysis of delamination crack tip fields for adhesive surface between skin and spar for helicopter blades

MA Cunwang, LIU Yong, ZHANG Chenglin*

(National Key Laboratory of Rotorcraft Aeromechanics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The blades of helicopters suffer from centrifugal forces, flap moments, lag moments and torsion moments. Based on these loading characteristics, the displacement equations of skin and spar were derived through the nonlinear structural model for blades under generalized two dimensional deformation. Based on the Stroh formalism, the asymptotic solutions of stress fields and displacement fields for the delamination crack tip between skin and spar were obtained by applying the interfacial fracture mechanics to anisotropic bimetals. Combined with the special solutions, the stresses and stress intensity factors were computed for the delamination crack tip in the adhesive surface between skin and spar of the helicopter blade under centrifugal forces by applying the boundary collocation way, and the results are close to the values by the interface element way. The results show that the way in this paper is effective for analyzing the delamination failure between skin and spar, which could be used as the basis to research the delamination failure of composite blades.

Keywords: helicopter blade; skin and spar; delamination cracks; interfacial fracture; stress intensity factors

旋翼桨叶是直升机最重要的部件之一, 由于其工作环境恶劣, 疲劳寿命一直是人们关注的热点。复合材料的应用使旋翼桨叶寿命大幅提高, 但在实际使用中经常出现蒙皮大梁间分层破坏。近几年国外一些研究者主要从动力学出发, 考虑基体开裂、分层、纤维断裂致使桨叶刚度下降, 进而导致各阶模态频率变化来研究桨叶的疲劳问题^[1-2]。

分层问题的实质是材料的层间裂纹问题, 由于桨叶的载荷状态异常复杂^[3-7], 因此如何确定拉、

弯、扭载荷下蒙皮与大梁层间裂纹尖端应力及应力强度因子成为研究直升机桨叶蒙皮与大梁分层的关键。此外, 蒙皮材料一般采用碳纤维, 而大梁为玻璃纤维, 致使两者分层为不同材料间的层间断裂, 基于这些考虑, 本文中采用各向异性界面断裂力学来研究桨叶蒙皮与大梁之间的分层问题。

各向异性界面断裂力学的理论基础是 Lekhnitskii 针对广义二维问题建立的各向异性弹性理论, 或 Stroh 六维本征理论。前者应用协调方程推

导出一套椭圆微分方程，然后应用椭圆微分方程的特性得出位移、应力解的表达式；后者将弹性力学转化为本征值和本征矢量分析。Barnett、Lothe^[8]导出著名的 3 个实矩阵积分公式，绕过了本征值和本征矢量分析，推动了 Stroh 理论的发展。Suo^[9]证明两种理论本质是相通的，相对而言，Stroh 理论数学表达更简洁、严谨。

基于上述各向异性广义二维弹性理论，Qu、Bassani^[10]、Wu^[11]用解析法得出了各向异性双材料界面裂纹尖端的应力强度因子(SIF)的表达式。Suo^[9]表征了各向异性弹性材料间界面裂纹尖端奇异场的数学结构。应力强度因子计算方面，Chow等^[12]采用准三维有限元计算了多种层板在拉伸载荷下的应力强度因子及失效应变。Tan等^[13]用奇异单元求解裂尖奇异场，该方法的优点是能够较好地反映裂纹尖端奇异性。Kim等^[14-15]分别用杂交有限元、 M 积分法得出 Suo^[9]的应力强度因子。Wang^[16]计算了边界分层裂纹的应力强度因子及应变能释放率。Toru等^[17]用虚裂纹扩展技术计算有限界面裂纹的应力强度因子，与解析解吻合良好。许金泉^[18]研究了双材料界面多重应力奇异性，用边界元法给出双材料界面裂纹端部场的数值解。亢一澜^[19]等用实验方法来确定界面端应力强度因子。

本文作者在上述理论的基础上，针对直升机桨叶受离心力、挥、摆、扭等复杂载荷的作用，推导桨叶蒙皮的广义二维位移方程，然后基于 Stroh 理论，给出复合材料桨叶蒙皮大梁间分层裂纹端部的应力与位移通解的渐近表达式，最后用边界配置法计算了离心力作用下桨叶蒙皮大梁粘结面分层裂纹尖端应力及应力强度因子。

1 直升机桨叶蒙皮位移方程

1.1 桨叶位移方程

直升机桨叶以角速度 Ω 绕 x_2 轴转动，在这一过程中主要受离心力 F_{x_3} 、挥舞弯矩 M_{x_1} 、摆振弯矩 M_{x_2} 及气动扭矩 M_{x_3} 的作用，其运动形式见图 1。

图 1 中所有力矩正向都由右手法则确定。在广义二维下，可以写出桨叶的位移方程：

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2) + \frac{1}{2}C_c x_3^2 - \phi x_3 x_2 + U_{10},$$

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = u_2(x_1, x_2) - \frac{1}{2}C_f x_3^2 + \phi x_3 x_1 + U_{20},$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2) - C_c x_3 x_1 + C_f x_3 x_2 +$$

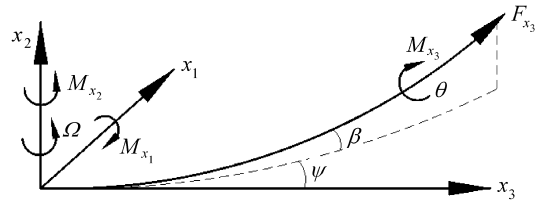


图 1 直升机旋翼桨叶运动

Fig. 1 Rotor blade motion of helicopter

$$\epsilon_0 x_3 + U_{30}. \tag{1}$$

式中： ϵ_0 为轴向拉伸率； C_c 为摆振弯曲曲率； C_f 为挥舞弯曲曲率； ϕ 为轴向扭转率； θ 为扭转角； β 为挥舞角； ψ 为摆振角； U_0 、 U_{20} 、 U_{30} 为桨叶的刚体位移。

1.2 蒙皮的位移方程

桨叶在坐标 x_1 、 x_2 、 x_3 方向的位移由公式(1)给出，根据文献[5]中桨叶改进结构模型，则蒙皮中面位移可写成下式：

$$\begin{pmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ U_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\theta \\ -q\theta \\ x_3 \gamma_5 + x_2 \gamma_6 - \bar{\omega} \phi \end{pmatrix} \tag{2}$$

桨叶上任意一点的位移就可以表示成

$$\bar{U}_1^0 = U_1^0 + n\varphi x_3, \bar{U}_2^0 = U_2^0, \bar{U}_3^0 = U_3^0 + n\varphi x_2 \tag{3}$$

式中： α 为桨叶截面切线与水平方向的夹角； φ_{x_3} 为法线在 x_2 方向的转角； φ_{x_2} 为法线在 x_3 方向的转角，等于 ϕ ； γ_5 、 γ_6 分别为绕 x_2 、 x_3 面外剪切转角；

$\bar{\omega} = \int_0^s r ds$ 为截面积； θ 为沿 x_3 方向的扭转角。

蒙皮与大梁分层发生在蒙皮内壁与大梁外侧之间的粘结面，此面上蒙皮与大梁的位移是相同的，可采用式(3)导出桨叶上任一点的应力-应变关系。桨叶截面受 6 个广义力，见图 2。

2 桨叶蒙皮大梁分层裂纹端部场

2.1 广义二维下桨叶蒙皮大梁弹性变形

蒙皮大梁粘结面的位移、应变和应力分别由 \bar{U}_i^0 、 ϵ_{ij} 、 σ_{ij} 表示，根据公式(3)，广义二维下应变-位移关系和应力-应变关系可表示为

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= (\bar{U}_{i,j}^0 + \bar{U}_{j,i}^0)/2, (i, j = 1, 2, 3) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{ij}, C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}. \end{aligned} \tag{4}$$

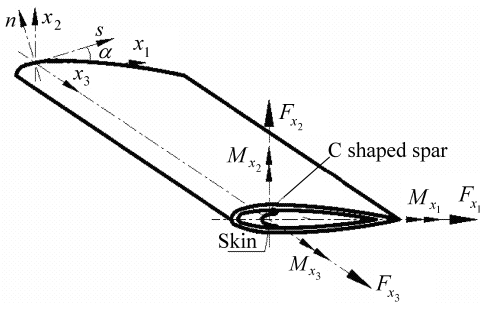


图2 桨叶截面受力及力矩

Fig. 2 Forces and moments of blade section

其中 C_{ijkl} 是四阶刚度张量, 逗号表示位移关于坐标变量的偏微分。此时在直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 下的 Navier 方程为

$$C_{i1k1} \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial x_1^2} + (C_{i1k2} + C_{i2k1}) \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{i2k2} \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial x_2^2} = 0 \quad (5)$$

$$C_{i1k1} \frac{\partial^2 u_i^p}{\partial x_1^2} + (C_{i1k2} + C_{i2k1}) \frac{\partial^2 u_i^p}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{i2k2} \frac{\partial^2 u_i^p}{\partial x_2^2} + (C_{i123} \phi + C_{i133} C_i) + (C_{i233} C_c - C_{i213} \phi) = 0 \quad (6)$$

式中: U_i 为位移的通解; u_i^p 为位移的特解。那么, 桨叶在离心力、挥舞弯矩、摆振弯矩及扭矩作用下某一截面的位移、应力可写成通解和特解的叠加, 通解对应广义二维平面应变变形, 特解对应应变参数引起的弹性变形, 可表示如下:

$$\begin{aligned} U_i^0(x_1, x_2) &= u_i^h(x_1, x_2) + u_i^p(x_1, x_2), \\ \sigma_{2i}(x_1, x_2) &= \sigma_{2i}^h(x_1, x_2) + \sigma_{2i}^p(x_1, x_2), \\ \sigma_{1i}(x_1, x_2) &= \sigma_{1i}^h(x_1, x_2) + \sigma_{1i}^p(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7)$$

将式(7)结合式(4)与式(5), 可写出

$$\sum_{i=1}^3 [C_{i1k1}^* + p_j (C_{i1k2}^* + C_{i2k1}^*) + p_j^2 C_{i2k2}^*] A_{ij} = 0 \quad (8)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^3 (C_{i2k1}^* + p_j C_{i2k2}^*) A_{ij} \quad (9)$$

$$A_{ij} = -B_{ij} p_j \quad (10)$$

式(8)、(9)中 j 不求和, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 都是矩阵, 且不是唯一的, 3×3 乘以任何一个常数式(8)都是成立的。

$$\Omega = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

根据坐标变换可知

$$C_{ijkl}^* = \Omega_{ip} \Omega_{jq} \Omega_{kr} \Omega_{ls} C_{pqrs} \quad (12)$$

2.2 蒙皮大梁分层裂纹尖端应力和位移通解

需要指出, 诸如蒙皮大梁这种双材料界面应力场在裂纹尖端具有正负相间的振荡奇异性, 并且振荡频率随距离 r 减小趋于无穷大, 与此相应的裂纹面也以振荡的形式相互嵌入。直到 20 世纪 70 年代末, 界面断裂力学处于停滞状态。Comninou 建立的接触区模型、Delale 和 Erodgan 建立的非均匀层模型及 Atkinson 建立的粘着层模型都力图在计算中消除振荡性, 但都不如传统的断裂力学理论简单易行, 直到 1988 年 Rice^[21] 提出小范围接触理论才解决这一问题, 该理论认为裂纹尖端塑性半径小于裂纹尖端弹性场渐近展开级数解的收敛半径时, 裂纹尖端渐近场的应力与纯弹性解给出的应力状态几乎没有差别, 接触域模型也有类似的观点。自此, 结束了关于界面裂纹经典弹性解有用性的争论。

鉴于此, 文中根据裂纹面自由条件, 将问题归结为 Hilbert 问题, 这一分析在数学上强调了裂纹尖端应力场的振荡奇异性 ($\epsilon \neq 0$) 和 $r \rightarrow 0$ 裂纹面会相互嵌入, 但在小范围屈服下这种振荡的弹性解可以作为评价界面断裂的依据。

Jeon、Kim^[14] 的研究表明, 裂纹端部主要的奇异性出现在由广义二维平面应变变形产生的通解中。对于这样一个问题, 位移、应力表达为

$$\begin{aligned} u_i^h &= 2\text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^3 A_{ij} f_j(z_j) \right\}, \\ \sigma_{2i}^h &= 2\text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^3 B_{ij} f_j'(z_j) \right\}, \\ \sigma_{1i}^h &= -2\text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^3 B_{ij} p_j f_j'(z_j) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

界面裂纹端部函数 $f_j(z_j)$ 表示为级数形式:

$$f_j(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} \frac{z_j^{\delta_n+1}}{1 + \delta_n} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 位移和应力通解的渐近表达可写成

$$u_i^h = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [a_{jn} A_{ij} z_j^{\delta_n+1} + a_{(j+3)n} \bar{A}_{ij} \bar{z}_j^{\delta_n+1}] / (1 + \delta_n) \quad (15)$$

$$\sigma_{2i}^h = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [a_{jn} B_{ij} z_j^{\delta_n} + a_{(j+3)n} \bar{B}_{ij} \bar{z}_j^{\delta_n}] \quad (16)$$

$$\sigma_{1i}^h = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [a_{jn} B_{ij} z_j^{\delta_n} + a_{(j+3)n} \bar{B}_{ij} \bar{p}_j \bar{z}_j^{\delta_n}] \quad (17)$$

这里

$$z_j = x_1 + p_j x_2$$

$$\delta_n = \begin{cases} \left(n - \frac{1}{2}\right) \text{和} \\ \left(n - \frac{1}{2}\right) \pm i\epsilon \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots) \quad (18)$$

其中振荡因子

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right) \quad (19)$$

$$Y = [-(1/2)\text{tr}(WD^{-1})]^{1/2} \quad (20)$$

$$W = -\text{Re}(A^{(1)}B^{(1-1)} - \bar{A}^{(2)}B^{(2-1)}),$$

$$D = -\text{Im}(A^{(1)}B^{(1-1)} - \bar{A}^{(2)}B^{(2-1)}). \quad (21)$$

上标 (1)、(2) 表示分层界面上下的材料, $\text{tr}(\ast)$ 表示 (\ast) 对角元相加, 当没有振荡性时 $\epsilon=0$ 。

2.3 离心力作用下蒙皮大梁应力和位移特解

桨叶在运动过程中受离心力、挥舞及摆振弯矩, 气动扭矩的作用, 其中离心力对桨叶破坏影响非常大。例如, 我国某型机飞行过程中每片桨叶受的离心力达到 20 吨。因此, 本文中主要考虑离心力对蒙皮大梁分层的影响。

根据 Rand [6] 的研究结果, 桨叶受离心力 F_{x_3} 作用, 其轴向应变 ϵ_0 为

$$\epsilon_0 = \frac{F_{x_3}}{A} \frac{C_{55}^*}{C_{33}^* C_{55}^* - C_{35}^*} \quad (22)$$

式中 A 为桨叶的截面积。

应力与位移的特解可采用与通解相似的表达式:

$$\begin{aligned} U_i^{p1} &= \text{Re} \sum_{i=1}^3 (A_{ij} z_j q_j + \bar{A}_{ij} \bar{z}_j h_j) + \delta_{i3} \epsilon_0 x_3, \\ \sigma_{i1}^{p1} &= -\text{Re} \sum_{i=1}^3 (B_{ij} p_j q_j + \bar{B}_{ij} \bar{p}_j h_j), \\ \sigma_{i2}^{p1} &= \text{Re} \sum_{i=1}^3 (B_{ij} q_j + \bar{B}_{ij} h_j). \end{aligned} \quad (23)$$

式中: δ_{i3} 为 Kronecker 数, q_j 和 h_j 是 3×1 的向量。根据 Ting [20] 沿裂纹面位移与应力的连续性以及裂纹面应力为零有

$$\begin{aligned} A^{(1)} q^{(1)} + \bar{A}^{(1)} h^{(2)} &= A^{(2)} q^{(2)} + \bar{A}^{(2)} h^{(2)} \\ B^{(1)} q^{(1)} + \bar{B}^{(1)} h^{(1)} + P^{(1)} \epsilon_0 &= 0 \\ B^{(2)} q^{(2)} + \bar{B}^{(2)} h^{(2)} + P^{(2)} \epsilon_0 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $P^{(i)} = C_{233}^{*(i)}$ 。令 $h^{(2)} = 0$, 解式(24)则有

$$h^{(1)} = (-A^{(1)} B^{(1-1)} \bar{B}^{(1)} + \bar{A}^{(1)})^{-1} \times (A^{(1)} B^{(1-1)} P^{(1)} - A^{(2)} B^{(2-1)} P^{(2)}) \epsilon_0 \quad (25)$$

$$q^{(1)} = -B^{(1-1)} \bar{B}^{(1)} h^{(1)} - B^{(1-1)} P^{(1)} \epsilon_0 \quad (26)$$

$$q^{(2)} = -B^{(2-1)} \bar{B}^{(1)} \epsilon_0 \quad (27)$$

解出的 $h^{(1)}$ 、 $q^{(1)}$ 、 $q^{(2)}$ 代入式(23)即可求出应力与位移的特解。此外还存在如下位移与应力的特解:

$$\begin{bmatrix} U_1^{p2} \\ U_2^{p2} \\ U_3^{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\theta \\ -q\theta \\ x_3 \gamma_5 + x_2 \gamma_6 - \bar{\omega} \phi \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\sigma_{ij}^{p2} = C_{ijkl} (U_{i,j}^{p2} + U_{j,i}^{p2}) / 2, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (29)$$

这两类特解相加即为桨叶上任一点位移和应力的特解。需要指出, 在离心力下, 第二类特解为零, 但是如果考虑拉弯、拉扭耦合, 此时 γ_5 、 γ_6 、 ϕ 均不为零, 故第二类特解也不为零。本文的计算没有考虑这两种耦合。

3 系数 a_{jn}

在给出桨叶在离心力下应力与位移的通解的渐近表达式及特解求解过程后, 关键问题是确定式(14)级数的系数 a_{jn} , 只要计算出这些系数, 就能求出分层裂纹尖端的应力场和位移场。可采用多种方法确定这些系数, 如有限元方法, 边界元法, 边界配置法等。

裂纹面应力为零, 界面位移与应力连续性条件

$$\sigma_{2i}^{(1)} = \sigma_{2i}^{(2)} = 0, \sigma_{2i}^{(1)} - \sigma_{2i}^{(2)} = 0, u_i^{(1)} - u_i^{(2)} = 0 \quad (30)$$

依据式(30), 可以推导出一个 12×12 的矩阵, 为了方便, 写成极坐标形式:

$$K_c(\delta_n) = r^{\delta_n} \begin{bmatrix} B^{(1)} \zeta_n^{\delta_n} & \bar{B}^{(1)} \bar{\zeta}_n^{\delta_n} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & B^{(2)} \zeta_n^{(2)\delta_n} & \bar{B}^{(2)} \bar{\zeta}_n^{(2)\delta_n} \\ B^{(1)} & \bar{B}^{(1)} & -B^{(2)} & -\bar{B}^{(2)} \\ A^{(1)} & \bar{A}^{(1)} & A^{(2)} & \bar{A}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中: $\zeta_j = r(\cos\omega + \zeta_j \sin\omega)$, K_c 是一个 12×12 复矩阵, 单元由 δ_n 确定。由矩阵 K_c 可以计算出 n 个 12×1 的归一化复向量 b_{jn} , 计算公式如下:

$$K_c(\delta_n)b_{jn} = 0 \quad (32)$$

系数 a_{jn} 即可写成

$$\begin{aligned} a_{jn} &= 0.5(\gamma_{1n} - i\gamma_{2n})b_{jn}, & (\delta_n \text{ 为复数}) \\ a_{jn} &= 0.5\gamma_{3n}b_{jn}, & (\delta_n \text{ 为实数}) \end{aligned} \quad (33)$$

式中: γ_{1n} 、 γ_{2n} 、 γ_{3n} 均为实数。应力、位移及位移偏微分这些量的通解与特解之和满足远场边界条件, 采用合适的数值方法即可确定这些实数, 最终计算出裂纹尖端的应力、位移及应力强度因子。

4 数值算例

桨叶蒙皮一般都采用 $[\pm 45]_n$ 铺层形式, 材料为碳纤维, 单层厚度约为 0.125 mm。大梁为 0° 方向的玻璃纤维。桨叶在制造过程中, 由于工艺上的原因, 导致大梁向外挤压蒙皮, 形成一个三角形的缺陷, 这个缺陷一般是无法避免的。我国某型机桨叶在使用中和进行全尺寸疲劳试验时, 都是此处(桨根和翼型段)首先产生分层裂纹。图 3 为某型机桨根剖面, 可以看到蒙皮与大梁间存在的三角形缺陷。

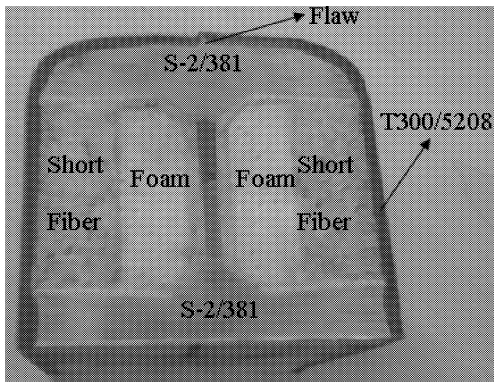


图 3 直升机桨根截面
Fig. 3 Section of helicopter blade

本例选蒙皮材料为 T300/5208, 其材料弹性常数为 $E_{x_1} = E_{x_2} = 10.2 \text{ GPa}$, $E_{x_3} = 134 \text{ GPa}$, $G_{x_2x_3} = G_{x_1x_3} = 5.52 \text{ GPa}$, $G_{x_2x_1} = 3.43 \text{ GPa}$, $\nu_{x_2x_3} = \nu_{x_1x_3} = 0.3$, $\nu_{x_2x_1} = 0.49$ 。

大梁材料为玻璃纤维 S-2/381, 材料弹性常数为 $E_{x_1} = E_{x_2} = 14.9 \text{ GPa}$, $E_{x_3} = 48.2 \text{ GPa}$, $G_{x_2x_3} = G_{x_1x_3} = 4.7 \text{ GPa}$, $G_{x_2x_1} = 2.8 \text{ GPa}$, $\nu_{x_2x_3} = \nu_{x_1x_3} = 0.227$, $\nu_{x_2x_1} = 0.64$ 。

碳纤维和玻璃纤维界面处缺陷当量成一长度为 $2a = 2.5 \text{ mm}$ 的分层裂纹, 见图 4。

应用计算出位移的特解, 联合通解, 采用如下

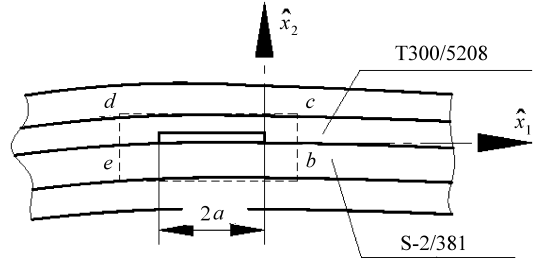


图 4 蒙皮大梁分层裂纹
Fig. 4 Delamination crack between skin and spar

边界条件:

$$\begin{aligned} u_1^{(a)h} + u_1^{(a)p} &= 0, & \frac{\partial u_2^{(a)h}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(a)p}}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_3^{(a)h}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^{(a)p}}{\partial x_2} &= 0 & \text{On } de, cb \\ \frac{\partial u_1^{(a)h}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1^{(a)p}}{\partial x_1} &= 0, & u_2^{(a)h} + u_2^{(a)p} &= 0 \\ \frac{\partial u_3^{(a)h}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^{(a)p}}{\partial x_2} &= 0 & \text{On } dc, eb \end{aligned} \quad (34)$$

采用下式对图 4 中的 $ebcd$ 边界进行最小二乘边界配置:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \gamma_n \int_{ebcd} \sum_{i=1}^3 [A_i g_i^m g_i^n + A_{i+3} g_{i+3}^m g_{i+3}^n + B_i h_i^m h_i^n + \\ &C_i h_{i,x}^m h_{i,x}^n + D_i h_{i,y}^m h_{i,y}^n] ds \\ &= \int_{ebcd} \sum_{i=1}^3 [A_i \bar{\sigma}_i g_i^m + A_{i+3} \bar{\sigma}_{i+3} g_{i+3}^m + B_i \bar{u}_i h_i^m + \\ &C_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} \right) h_{i,x}^m + D_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y} \right) h_{i,y}^m] ds \end{aligned} \quad (35)$$

式中: $\alpha = 1, 2$, 表示裂纹面上、下材料, 系数 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 及函数 g_i 、 h_i 的确定方法见文献[15]。若函数 $f_j(z_j)$ 截断为 n_1 项, 则存在 $2n_1$ 的线性方程组, 解这个方程组, 即可确定式(33)中的实系数。

图 5 为应变 $\epsilon_0 = 0.001$ 分层裂纹尖端的应力场。从中可以看出, 在接近裂纹端部应力剧烈增加, 剪应力 σ_{12} 值远大于 σ_{13} 、 σ_{23} , 主要是由于分层界面处 0° 方向玻璃纤维的存在, 使得分层裂纹端部主要受 I 型和 II 型断裂形式控制。正应力 σ_{11} 在靠近裂纹端部迅速变化, 而正应力 σ_{22} 值在分层裂纹端部附近出现一个微小的波浪形, 然后在接近裂纹端部其值剧烈改变。由于界面元只输出 3 种断裂形式对应的应力, 本文只比较了 σ_{23} 、 σ_{22} 、 σ_{12} 结果, 从图中可看出, 计算结果与界面元结果接近。

采用 Suo^[9] 的应力强度因子公式

$$\sigma_{2i}(r) = (2\pi r)^{-0.5} [K(r/l)^{ie} \mathbf{w} + \overline{K}(r/l)^{ie} \overline{\mathbf{w}} + K_3 \mathbf{w}_3] \quad (36)$$

式中： r 为距裂尖距离； $K = K_1 + iK_2$ ； \mathbf{w} 、 \mathbf{w}_3 为 3×1 的向量； l 为特征长度，取 $l = 10 \mu\text{m}$ 。

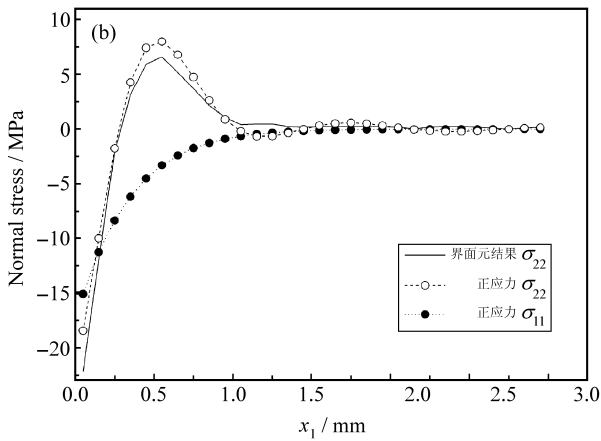
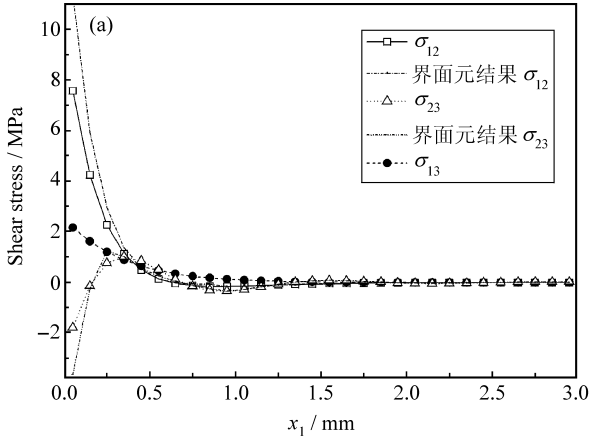


图5 桨叶蒙皮与大梁间分层裂纹端部应力

Fig. 5 Stresses of delamination crack tip between skin and spar of helicopter blade

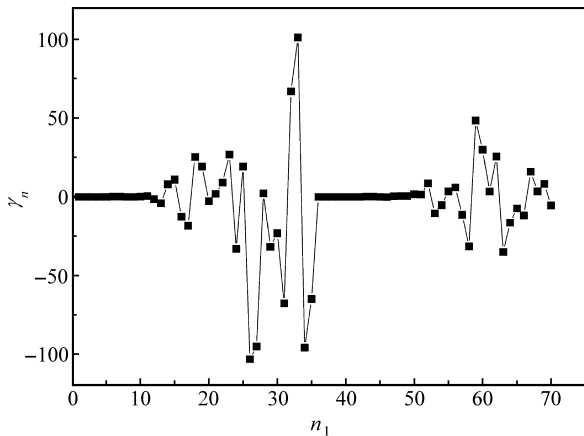


图6 实系数 γ_n

Fig. 6 Real indexes γ_n

计算了3种断裂形式的应力强度因子，进行最小二乘配置时级数的截断项分别选20、25和35，结果见表1。图6为级数截断35项对应的实系数 γ_n 。

采用式(19)计算的振荡因子 $\epsilon = 0.024088$ 。同时由于分层界面处大梁为 0° 方向玻璃纤维，致使在其式(31)中矩阵 $K_c(\delta_n)$ 退化为一个 10×10 的矩阵，向量 b_m 也变为 n 个 10×1 的复向量^[22]。

表1 桨叶3种断裂形式的应力强度因子

Table 1 Stress intensity factors(SIF) of helicopter blade

Truncation n_1	SIF/(MPa · mm ^{-0.5})		
	$ K_1 $	$ K_2 $	$ K_3 $
20	1.0030	0.4868	0.0907
25	1.0648	0.5252	0.0992
35	1.1099	0.5883	0.1067

5 结论

(1) 采用改进桨叶结构模型，导出了桨叶蒙皮的广义二维位移方程，桨叶上某一截面的位移由两部分组成，分别为广义平面应变变形产生的通解和变形参数产生的特解。

(2) 对主要的振荡奇异性出现的通解部分，这一过程强调了蒙皮大梁分层裂纹端部应力场的振荡奇异性。3种断裂形对应的奇异应力是蒙皮与大梁分层破坏的主要原因。

(3) 数值结果表明，裂纹端部应力场是奇异的，而且从边界配置程序中函数 $f_j(z_j)$ 取不同截断项计算的应力强度因子值可知，该边界配置程序收敛性很好，本文算例中取 $n_1 = 25$ 时，计算的结果已足够精确。

参考文献:

[1] Prashant M P. Simulation of composite helicopter rotor - system matrix cracking, debonding/delamination and fiber breakage [C]// 61th Annual Forum of the American Helicopter Society. Grapevine, TX: The American Helicopter Society International, Inc. All rights reserved, 2005: 2206-2220.

[2] Niranjana Roy, Ranjan Ganguli. Helicopter rotor blade frequency evolution with damage growth and signal processing [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 28(3): 821-851.

[3] John C Fish. Stress analysis of composite rotor systems [C]// 47th Annual Forum of the American Helicopter Society. Phoenix, AZ: The American Helicopter Society International,

- 1991; 615-627.
- [4] Kosmatka J B. Extension-bend-twist coupling behavior of thin-walled advanced composite beams with initial twist [C]// 32th AIAA/AHS/ASME/ASCE/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Baltimore, MD; American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 1991; 1037-1049.
- [5] Sung N J, Nagaraj V T, Inderjit Chopra. Refined structural model for thin- and thick-walled composite rotor blade [J]. AIAA Journal, 2002, 40(1): 105-116.
- [6] Rand O. Fundamental closed-form solutions for solid and thin-walled composite beams including a complete out-of-plane warping model [J]. International Journal of Solids Structures, 1998, 35(21): 2775-2793.
- [7] 马存旺, 张呈林, 刘勇. 复合材料桨叶蒙皮层间裂纹的应力强度因子求解方法研究 [J]. 机械强度, 2009, 31(2): 282-286.
Ma Cunwang, Zhang Chenglin, Liu Yong. Solution of stress intensity factor for interface cracks of composite blade skins [J]. Journal of Mechanical Strength, 2009, 31(2): 282-286.
- [8] Barnett D M, Lothe J. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators [J]. Phys Status Solidi, 1975, B67: 105-111.
- [9] Suo Z G. Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media [C]// Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences. London; Printed in Great Britain, 1990, A427: 331-358.
- [10] Qu J, Bassani J L. Interfacial fracture mechanics for anisotropic bimaterial [J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60(2): 422-431.
- [11] Wu K C. Stress intensity factors and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials [J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, 57(4): 882-886.
- [12] Chow W T, Atluri S N. Stress intensity factors as the fracture parameters for delamination crack growth in composite laminates [J]. Computational Mechanics, 1998, 21(1): 1-10.
- [13] Tan M A, Meguid S A. Analysis of bimaterial wedge using a new singular finite element [J]. International Journal of Fracture, 1997, 88(4): 371-391.
- [14] Jeon I, Cha B W, Im S. Edge delamination in laminated composite strip under generalized plane deformation [J]. International Journal of Fracture, 1996, 77(2): 95-110.
- [15] Kim T W, Kim H, Im S. Delamination crack originating from transverse cracking in cross-ply composite laminates under extension [J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 27(15): 1925-1941.
- [16] Wang S S. Edge delamination in angle-ply composite laminates [J]. AIAA Journal, 1984, 22(2): 256-264.
- [17] Toru I, Masaki N, Yamanaga K. Stress intensity factor analyses of interface cracks between dissimilar anisotropic materials using the finite element method [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2006, 73(12): 2067-2079.
- [18] 许金泉. 界面力学[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [19] 亢一澜, Laermann K H. 异质双材料界面端部应力奇异性实验分析[J]. 力学学报, 1995, 27(4): 506-512.
Kang Yilan, Laermann K H. Experimental analysis for edge singular stress of bimaterial interface [J]. Acta Mechanica Sinica, 1995, 27(4): 506-512.
- [20] Ting T C T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites [J]. International Journal of Solids and Structures, 1986, 22(9): 965-983.
- [21] Rice J R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1988, 55(1): 98-103.
- [22] Huang T F, Chen W H. On the free-edge stress singularity of general composite laminates under uniform axial strain [J]. International Journal of Solids and Structures, 1993, 31(22): 3139-3151.