文章编号: 1000-6788(2010)08-1457-08 中图分类号: O225 文献标志码: A

具有模糊联盟博弈的 Shapley 值的刻画

孙红霞, 张 强

(北京理工大学 管理与经济学院, 北京 100081)

摘 要 将经典合作博弈中的势函数和一致性推广到具有模糊联盟的合作博弈中, 对具有模糊联盟博弈的 Shapley 值进行了刻画. 对于具有模糊联盟的合作博弈, 首先利用边际贡献定义势函数, 证明了势函数的唯一性, 并给出了势函数和 Shapley 值之间的对应关系. 其次, 通过具有模糊联盟的缩减博弈定义了解的一致性, 证明 Shapley 值具有一致性, 利用一致性和具有模糊联盟的标准二人博弈对 Shapley 进行了刻画.

关键词 Shapley 值; 势函数; 缩减博弈; 一致性

Characterization of Shapley value in games with fuzzy coalitions

SUN Hong-xia, ZHANG Qiang

(School of Management and Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract This paper generalized the definition of potential function and consistency to games with fuzzy coalitions and characterizes the Shapley value. In the framework of games with fuzzy coalitions, first, we gave the definition of potential function according to marginal contribution. The paper proves that there exists just one such function that the resulting payoff vector coincides with the Shapley value. Second, we gave the definition of the consistency according to the reduced game with fuzzy coalition. It proves that Shapley value is a consistent solution. Finally, it characterizes Shapley value by consistency and two person standard game with fuzzy coalitions.

Keywords Shapley value; potential function; reduced game; consistency

1 引言

Shapley 值[1] 是合作博弈中常用的解概念之一, 它是将 n 人合作带来的最大收益进行分配的一种方案. 这种分配方案是从全部参与人是理性的假设出发, 根据联盟中各参与人给联盟带来的边际贡献进行合理分配, 使得集体理性与个体理性达到均衡. 由于现实问题的需要, 许多学者对不确定环境下具有模糊联盟 n 人博弈的 Shapley 值进行了研究. Aubin[3] 于 1974 年正式提出了模糊联盟和模糊博弈的概念, 随后对模糊博弈的解展开了深入的研究[4−5]. Butnariu[6] 于 1978 年提出了与 Aubin 大致相同的模糊博弈及解的概念, 随后研究了具有模糊联盟 n 人博弈的 Shapley 值[7−9]. 由于 Butnariu 定义的具有模糊联盟 n 人博弈的 Shapley 值与经典的 Shapley 值相比, 既不单调非减又不连续, 为了克服此不足, Tsurumi[10] 于 2000 年利用 Choquet 积分构造了一类具有模糊联盟的 n 人博弈, 并对此博弈的 Shapley 值进行了研究. Butnariu 和 Kroupa[11] 于 2008 年在文献 [9] 的基础上, 研究了具有权重的 n 人博弈的 Shapley 值. Li 和 Zhang[12] 于 2009 年给出了具有模糊联盟 n 人博弈 Shapley 值的一般化表示形式, 并且证明 Shapley 值的一般化表示在特定条件下与文献 [7, 10–11] 所定义的 Shapley 值是等价的.

在经典 Shapley 值的定义中, 局中人的边际贡献起着很重要的作用, 但是每位局中人的边际贡献不满足有效性 (即: 局中人的边际贡献之和等于大联盟的总收益). 对于经典的合作博弈, Hart 和 Mas-Colell[2] 利

收稿日期: 2009-04-15
资助项目: 国家自然科学基金 (70471063, 70771010)
作者简介: 孙红霞 (1980–), 女, 山东德州人, 博士, 讲师, 研究方向: 模糊对策与决策; 张强 (1955–), 男, 辽宁沈阳人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 模糊对策与决策, 供应链与物流管理等.

用势函数的概念解决了这一问题, 说明 Shapley 值可以用势函数的边际贡献来表示, 借助于势函数, Hart 和 Mas-Colell 还说明 Shapley 值具有一致性, 用势函数和一致性对 Shapley 值进行了刻画. 本文借鉴 Hart 和 Mas-Colell 的思想, 将势函数和一致性概念推广到模糊联盟博弈中, 对文献 [12] 中具有模糊联盟博弈的 Shapley 值进行了刻画.

2 模糊联盟及具有模糊联盟博弈的 Shapley 值

2.1 模糊联盟

对于非空的局中人集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^N$ 表示模糊联盟变量. $Lx=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示 x 中参与水平变量的集合. $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 表示模糊联盟, 其中 s_i 表示第 i 个局中人的参与水平, 全体模糊联盟形成的集合用 $L(N)$ 表示. $S=\{i\mid s_i\neq 0\}$ 表示参与水平非零的局中人集合. $s^*=\{t\mid t_i=s_i\text{或}t_i=0,i\in N\}$ 表示由 s 生成的模糊联盟集.

在模糊环境下, 向量 $e^{\emptyset}=(0,0,\cdots,0)$ 表示空联盟. e^S $(S\in 2^N)$ 表示一个类经典联盟, 它对应着这样一种情况: S 中所有局中人以参与水平 1 进行合作, 联盟 S 之外的局中人与 S 中局中人没有合作, 即他们的参与水平都为 0, $e^N=(1,1,\cdots,1)$ 被称为最大的联盟. 文中以 e^i 代替 $e^{\{i\}}$. 任意 $t\in L(N)$, $t=\sum\limits_{i\in T}x_ie^i$, $x-x_ie^i$ 表示除局中人 i 之外其余局中人参与水平变量组成的模糊联盟变量.

定义 1 函数 $v:L(N)\to R$, $v(e^{\emptyset})=0$. 对于 $t\in L(N)$, $v(t)$ 表示联盟 t 所获得的可转移支付总量.

具有模糊联盟的 n 人合作博弈被表示为 (N,v,x), 所有具有模糊联盟合作博弈全体表示为 Γ, Γ 上的解记为 $\sigma(N,v,x)=(\sigma_{x_i}(N,v,x))_{x_i\in Lx}\in R^{Lx}$, 其中 $\sigma_{x_i}(N,v,x)$ 表示第 i 个局中人在参与水平 x_i 下获得的支付.

2.2 具有模糊联盟博弈的 Shapley 值

Butnariu 用一个介于 [0,1] 区间的实值模糊数表示局中人参与联盟的程度, 定义了具有实值模糊联盟的合作博弈 [7].

定义 2 对于给定 $s\in L(N)$, $s^r=\{i\mid i\in N,s_i=r\}$ $(\forall r\in[0,1])$. 如果函数 v 具有形式 $v(s)=\sum\limits_{r\in[0,1]}v(s^r)\cdot r$, 则 $(N,v,s)\in\Gamma$ 被称为具有比例值的合作博弈. 具有比例值的合作博弈全体记作 Γ_p.

定义 3 对于合作博弈 $(N,v,x)\in\Gamma_p$, $s\in L(N)$, $s^r=\{i\mid i\in N,s_i=r\}$ $(\forall r\in[0,1])$, 函数 $g:\Gamma_p\to(R^N)^{L(N)}$, 则第 i 个局中人在参与水平 s_i 下的 Shapley 值为

$$g_i(N,v,x)(s)\cdot s_i=\begin{cases}\sum\limits_{i\in T\subset s^r}\dfrac{(|T|-1)!(|s^r|-|T|)!}{|s^r|!}(v(T)-v(T\backslash\{i\}))\cdot s_i, & i\in s^r,\ \ r\in(0,1]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{1}$$

Butnariu 和 Kroupa 定义了具有权重函数的合作博弈 [11], 将具有比例值的合作博弈进行了推广.

定义 4 对于给定 $s\in L(N)$, $s^r=\{i\mid i\in N,s_i=r\}$ $(\forall r\in[0,1])$. 如果函数 v 具有形式 $v(s)=\sum\limits_{r\in[0,1]}\Psi(r)v(s^r)$, 则 $(N,v,s)\in\Gamma$ 被称为具有权重函数 Ψ 的模糊博弈. 具有权重函数的合作博弈全体记作 Γ_w.

定义 5 对于合作博弈 $(N,v,x)\in\Gamma_w$, $s\in L(N)$, $s^r=\{i\mid i\in N,s_i=r\}$ $(\forall r\in[0,1])$, 函数 $\Phi:\Gamma_w\to(R^N)^{L(N)}$, 第 i 个局中人在参与水平 s_i 下的 Shapley 值为

$$\Phi_i(N,v,x)(s)\cdot s_i=\begin{cases}\Psi(r)\sum\limits_{i\in T\subset s^r}\dfrac{(|T|-1)!(|s^r|-|T|)!}{|s^r|!}(v(T)-v(T\backslash\{i\})), & s_i=r>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{2}$$

为了克服具有比例值博弈的缺点, Tsurumi 定义了具有 Choquet 积分形式的模糊博弈 [10].

定义 6 对于给定 $s\in L(N)$, $[s]_h=\{i\mid i\in N,s_i\geq h\}$ $(\forall h\in[0,1])$. 令 $Q(s)=\{s_i\mid s_i\geq 0,i\in N\}$, $q(s)$ 为 $Q(s)$ 中元素的个数, 将 $Q(s)$ 中的元素按照非减序列排列为 $h_1\leq h_2\leq\cdots\leq h_{q(s)}$, 则具有 Choquet 积分形式的模糊博弈具有形式

$$v(s)=\sum_{l=1}^{q(s)}v([s]_{h_l})\cdot(h_l-h_{l-1})\tag{3}$$

具有 Choquet 积分形式的模糊博弈全体记作 Γ_c.

定义 7　对于合作博弈 $(N,v,x)\in\Gamma_c$, $s\in L(N)$, $[s]_h=\{i\mid i\in N, s_i\geq h\}$ $(\forall h\in[0,1])$, 函数 $f:\Gamma_c\to(R^N)^{L(N)}$, 第 i 个局中人在参与水平 s_i 下的 Shapley 值为

$$f_i(N,v,x)(s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{q(s)}f_i^{'}([s]_{h_l})(h_l-h_{l-1}), & i\in[s]_{h_l}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$f_i^{'}([s]_{h_l})=\sum_{i\in T\subset[s]_{h_l}}\frac{(|T|-1)!(|[s]_{h_l}|-|T|)!}{|[s]_{h_l}|!}(v(T)-v(T\backslash\{i\})),\quad i\in[s]_{h_l}\tag{5}$$

文献 [12] 给出了 Shapley 值的一般化表示形式, 并说明在一定条件下, Shapley 值的一般化表示形式和 (1)、(2)、(4) 式是一致的.

定义 8　任意 $(N,v,x)\in\Gamma$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是模糊联盟变量, 第 i 个局中人在参与水平 x_i 下的 Shapley 值为

$$\varphi_{x_i}(N,v,x)=\sum_{i\in T\subset N}\frac{(|T|-1)!(|N|-|T|)!}{|N|!}\bigg(v\bigg(\sum_{j\in T}x_je^j\bigg)-v\bigg(\sum_{j\in T\backslash\{i\}}x_je^j\bigg)\bigg)\tag{6}$$

如果没有特殊说明, 以下各节所说的具有模糊联盟博弈的 Shapley 值均指 (6) 式.

3　具有模糊联盟博弈的势函数

定义 9　函数 $P:\Gamma\to R$, $P(N,v,e^{\emptyset})=0$, 第 i 个局中人在合作博弈 $(N,v,x)\in\Gamma$ 中的边际贡献定义如下:

$$D_{x_i}P(N,v,x)=P(N,v,x)-P(N,v,x-x_ie^i).$$

定义 10　函数 $P:\Gamma\to R$, $P(N,v,e^{\emptyset})=0$. 如果任意 $(N,v,x)\in\Gamma$, 有

$$\sum_{i\in N}D_{x_i}P(N,v,x)=v\bigg(\sum_{i\in N}x_ie^i\bigg),$$

那么 P 被称为 Γ 上的势函数.

由定义 10 可知, 势函数就是其边际贡献的分配之和等于大联盟 N 的收益值. 我们把这一性质称为有效性, 即 $\{D_{x_i}P(N,v,x)\}_{x_i\in Lx}$ 是合作博弈 (N,v,x) 的一个有效支付向量.

引理 1　任意 $(N,v,x)\in\Gamma$, $P(N,v,x)=\dfrac{1}{|N|}\bigg(v\bigg(\displaystyle\sum_{i\in N}x_ie^i\bigg)+\sum_{i\in N}P(N,v,x-x_ie^i)\bigg)$.

证明　当 $|N|=1$ 时, 由 $P(N,v,e^{\emptyset})=0$ 知

$$D_{x_i}P(N,v,x_ie^i)=P(N,v,x_ie^i)=v(x_ie^i).$$

当 $|N|=2$ 时,

$$D_{x_i}P(N,v,x_ie^i+x_je^j)=P(N,v,x_ie^i+x_je^j)-P(N,v,x_je^j),$$
$$D_{x_j}P(N,v,x_ie^i+x_je^j)=P(N,v,x_ie^i+x_je^j)-P(N,v,x_ie^i),$$

由势函数定义可得

$$2P(N,v,x_ie^i+x_je^j)-P(N,v,x_je^j)-P(N,v,x_ie^i)=v(x_ie^i+x_je^j),$$

即

$$P(N,v,x_ie^i+x_je^j)=\frac{1}{2}(v(x_ie^i+x_je^j)+P(N,v,x_ie^i)+P(N,v,x_je^j)).$$

当 $|N|\geq3$ 时, 按照上述方法循环做下去可得

$$P(N,v,x)=\frac{1}{|N|}\bigg(v\bigg(\sum_{i\in N}x_ie^i\bigg)+\sum_{i\in N}P(N,v,x-x_ie^i)\bigg)\tag{7}$$

定理 1　存在唯一的具有模糊联盟博弈的势函数 $P:\Gamma\to R$, 且对于具有模糊联盟博弈的 Shapley 值 φ 有

$$D_{x_i}P(N,v,x)=\varphi_{x_i}(N,v,x).$$

证明 由引理 1 可知存在唯一的具有模糊联盟博弈的势函数.

任意 $(N,v,x)\in\Gamma$, 令

$$Q(N,v,x)=\sum_{T\subset N}\frac{(|T|-1)!(|N|-|T|)!}{|N|!}v\left(\sum_{i\in T}x_ie^i\right),$$

则 $Q(N,v,e^{\emptyset})=0$.

$$\begin{aligned}
&D_{x_i}Q(N,v,x)\\
=\ &Q(N,v,x)-Q(N,v,x-x_ie^i)\\
=\ &\sum_{T\subset N}\frac{(|T|-1)!(|N|-|T|)!}{|N|!}v\left(\sum_{j\in T}x_je^j\right)-\sum_{T\subset N\setminus\{i\}}\frac{(|T|-1)!(|N|-1-|T|)!}{(|N|-1)!}v\left(\sum_{j\in T\setminus\{i\}}x_je^j\right)\\
=\ &\sum_{T\subset N\setminus\{i\}}\frac{(|T|)!(|N|-|T|-1)!}{|N|!}v\left(\sum_{j\in T}x_je^j+x_ie^i\right)+\sum_{T\subset N\setminus\{i\}}\frac{(|T|-1)!(|N|-|T|)!}{|N|!}v\left(\sum_{j\in T\setminus\{i\}}x_je^j\right)-\\
&\sum_{T\subset N}\frac{(|T|-1)!(|N|-1-|T|)!}{(|N|-1)!}v\left(\sum_{j\in T\setminus\{i\}}x_je^j\right)\\
=\ &\sum_{T\subset N\setminus\{i\}}\frac{(|T|)!(|N|-|T|-1)!}{|N|!}\left(v\left(\sum_{j\in T}x_je^j+x_ie^i\right)-v\left(\sum_{j\in T}x_je^j\right)\right)\\
=\ &\varphi_{x_i}(N,v,x).
\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{i\in N}D_{x_i}Q(N,v,x)=v\left(\sum\limits_{i\in N}x_ie^i\right)$, 故 Q 为势函数. 又因为势函数是唯一的, 所以 $Q=P$, 因此 $D_{x_i}P(N,v,x)=\varphi_{x_i}(N,v,x)$.

文献 [12] 给出了 (1)、(2) 和 (4) 与 (6) 式之间的关系, 由定理 1 可以得到以下推论.

推论 1 令 $(N,v,x)\in\Gamma_p$, $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in L(N)$, 那么

$$D_{x_i}P(N,v,x)|_{x=s}=g_i(N,v,x)(s)s_i.$$

推论 2 令 $(N,v,x)\in\Gamma_w$, $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in L(N)$, 那么

$$D_{x_i}P(N,v,x)|_{x=s}=\Phi_i(N,v,x)(s).$$

推论 3 令 $(N,v,x)\in\Gamma_c$, $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in L(N)$, 那么

$$D_{x_i}P(N,v,x)|_{x=s}=f_i(N,v,x)(s).$$

由定理 1 的证明过程可知, 具有模糊联盟博弈的势函数可以用模糊联盟的收益的值来表示. 同时定理 1 给出了具有模糊联盟博弈的势函数与 Shapley 值的对应关系.

例 1 现有 A、B、C 三家公司 (分别代表 1、2、3 三个局中人) 欲合作一个工程项目, 在清晰联盟下的预期收益为: $v(1)=10$, $v(2)=v(3)=20$, $v(1,2)=v(1,3)=60$, $v(2,3)=80$, $v(1,2,3)=120$. 现假设公司 A、B、C 合作的项目要求 100 单位的资源投入 (这种资源包括资金、技术、客户关系等), 由于精力、能力等诸多条件的限制, 公司 A 只能投入 20 单位资源, 公司 B 只能投入 40 单位资源, 公司 C 只能投入 50 单位资源, 这样公司 A、B、C 参与水平分别为 20/100、40/100、50/100, 考虑模糊联盟 $s=(0.2,0.4,0.5)$.

当 $(N,v,x)\in\Gamma_c$ 时, 首先利用 (6) 式计算各公司的支付值.

利用 (3) 式计算由公司 A、B 和 C 组成模糊联盟下的预期收益. $v((0.2,0,0))=2$, $v((0,0.4,0))=8$, $v((0,0,0.5))=10$, $v((0.2,0.4,0))=16$, $v((0.2,0,0.5))=18$, $v((0,0.4,0.5))=34$, $v((0.2,0.4,0.5))=42$. 由 (5) 式可计算出 $f_i'([s]_{h_l})$的值, 结果如表 1 所示.

表 1 $f_i'([s]_{h_l})$值

$[s]_{h_l}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
1	10	0	0	30	30	0	30
2	0	20	0	35	0	40	45
3	0	0	20	0	35	40	45

利用 (4) 式计算各个公司获得的支付值:

$$\varphi_{x_1}(N,v,x)|_{x=s}=0.2f_i'(\{1,2,3\})+0.2f_i'(\{2,3\})+0.1f_i'(\{3\})=6,$$

同理可求 $\varphi_{x_2}(N,v,x)|_{x=s}=17$, $\varphi_{x_3}(N,v,x)|_{x=s}=19$.

下面用势函数方法计算各公司的支付值.

由 $P(N,v,e^{\emptyset})=0$, 利用 (7) 式可得

$$P(N,v,(0.2,0,0))=2,\quad P(N,v,(0,0.4,0))=8,\quad P(N,v,(0,0,0.5))=10,$$
$$P(N,v,(0.2,0.4,0))=\frac{1}{2}(v((0.2,0.4,0)+P(N,v,(0.2,0,0))+P(N,v,(0,0.4,0)))=13,$$
$$P(N,v,(0.2,0,0.5))=\frac{1}{2}(v((0.2,0,0.5)+P(N,v,(0.2,0,0))+P(N,v,(0,0,0.5)))=15,$$
$$P(N,v,(0,0.4,0.5))=\frac{1}{2}(v((0,0.4,0.5)+P(N,v,(0,0.4,0))+P(N,v,(0,0,0.5)))=26.$$

由定义 9 可得

$$D_{x_1}P(N,v,x)|_{x=s}=P(N,v,(0.2,0.4,0.5))-P(N,v,(0,0.4,0.5))=6,$$
$$D_{x_2}P(N,v,x)|_{x=s}=P(N,v,(0.2,0.4,0.5))-P(N,v,(0.2,0,0.5))=17,$$
$$D_{x_3}P(N,v,x)|_{x=s}=P(N,v,(0.2,0.4,0.5))-P(N,v,(0.2,0.4,0))=19.$$

所以 $\{D_{x_i}P(N,v,x)\}_{x_i\in Lx}=\varphi_x(N,v,x)=(6,17,19)$.

4 具有模糊联盟博弈的一致性

一致性指内部一致性, 即: 去掉一部分局中人之后, 其他局中人在缩减博弈中的收益与在原博弈中的收益是一样的. 本节主要利用一致性对具有模糊联盟博弈的 Shapley 值进行刻画.

定义 11 设 σ 是 Γ 上的一个解, 向量 $\sigma(N,v,x)\in R^n$. 对于 $(N,v,x)\in\Gamma$, $t\in L(N)$, $t=\sum\limits_{i\in T}x_ie^i$, $t\neq e^{\emptyset}$. 如果博弈 $(N,v_{t,\sigma},x-t)$, $v_{t,\sigma}(e^{\emptyset})=0$, 满足

$$v_{t,\sigma}(s)=v(s+t)-\sum_{i\in T}\sigma_{x_i}(N,v,s+t),\quad s\in(x-t)^*\backslash e^{\emptyset},$$

则称 $v_{t,\sigma}$ 是具有模糊联盟博弈 (N,v,x) 的 (t,σ) 缩减博弈.

定义 12 设 σ 是 Γ 上的一个解, 对于 $(N,v,x)\in\Gamma$, $t\in L(N)$, $t=\sum\limits_{i\in T}x_ie^i$, $t\neq e^{\emptyset}$. 如果

$$\sigma_{x_i}(N,v_{t,\sigma},x-t)=\sigma_{x_i}(N,v,x),$$

则称 σ 具有一致性.

引理 2 任意 $(N,v,x)\in\Gamma$, $s\in L(N)\backslash\emptyset$, $s=\sum\limits_{j\in S}x_ie^i$, $P:\Gamma\to R$ 为 Γ 上具有模糊联盟的博弈势函数, 如果 $\mu:L(N)\to R$ 满足 $\sum\limits_{i\in S}\Big(\mu(s)-\mu\Big(\sum\limits_{j\in S\backslash\{i\}}x_je^j\Big)\Big)=v(s)$, 那么

$$\mu(s)=P(N,v,s)+\mu(e^{\emptyset})\tag{8}$$

证明 当 $|S|=1$ 时, 任意 $i\in N$,

$$\mu(x_ie^i)-\mu(e^{\emptyset})=v(x_ie^i)=P(N,v,x_ie^i),$$

故 (8) 式成立.

取 $t\in L(N)$, $t\neq e^{\emptyset}$. 假设 $s\in t^*$ 时, (8) 式成立, 那么

$$\begin{aligned}\mu(t)&=\frac{1}{|T|}\Bigg(v(t)+\sum_{i\in T}\mu\Bigg(\sum_{j\in T\backslash\{i\}}x_je^j\Bigg)\Bigg)\\&=\frac{1}{|T|}\Bigg(v(t)+|T|\mu(e^{\emptyset})+\sum_{i\in T}P(N,v,x-x_ie^i)\Bigg)\\&=\mu(e^{\emptyset})+\frac{1}{|T|}\Bigg(v(t)+\sum_{i\in T}P(N,v,x-x_ie^i)\Bigg)\\&=\mu(e^{\emptyset})+P(N,v,t).\end{aligned}$$

定理 2 具有模糊联盟博弈的 Shapley 值 φ 具有一致性.

证明 取 $(N,v,x)\in\Gamma$, $t\in L(N)$, $t=\sum\limits_{i\in T}x_ie^i$, $t\neq e^{\emptyset}$. 下证

$$\varphi_{x_i}(N,v_{t,\varphi},x-t)=\varphi_{x_i}(N,v,x),\quad x_i\in Lx.$$

任意 $s\in(x-t)^*\backslash e^{\emptyset}$, 由 Shapley 值的有效性及定理 1 知

$$\begin{aligned}v_{t,\varphi}(s)&=v(s+t)-\sum_{i\in T}\varphi_{x_i}(N,v,s+t)\\&=\sum_{i\in S}\varphi_{x_i}(N,v,s+t)\\&=\sum_{i\in S}(P(N,v,s+t)-P(N,v,s+t-x_ie^i)).\end{aligned}$$

对于 $s\in(x-t)^*\backslash e^{\emptyset}$, 定义 $\mu(s)=P(N,v,s+t)$, 则

$$\sum_{i\in S}\left(\mu(s)-\mu\left(\sum_{j\in S\backslash\{i\}}x_je^j\right)\right)=v_{t,\varphi}(s).$$

由引理 2 可知

$$\mu(s)=P(N,v_{t,\varphi},s)+\mu(e^{\emptyset})=P(N,v_{t,\varphi},s)+P(N,v,t).$$

根据 μ 的定义有

$$P(N,v,s+t)=P(N,v_{t,\varphi},s)+P(N,v,t),$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi_{x_i}(N,v_{t,\varphi},x-t)&=P(N,v_{t,\varphi},x-t)-P(N,v_{t,\varphi},x-t-x_ie^i)\\&=(P(N,v,x)-P(N,v,t))-(P(N,v,x-x_ie^i)-P(N,v,t))\\&=P(N,v,x)-P(N,v,x-x_ie^i)\\&=\varphi_{x_i}(N,v,x).\end{aligned}$$

定义 13 设 σ 是 Γ 上的一个解, 如果对所有的博弈 (N,v,x) 满足

$$\sigma_{x_i}(N,v,x_ie^i+x_je^j)=v(x_ie^i)+\frac{1}{2}(v(x_ie^i+x_je^j)-v(x_ie^i)-v(x_je^j)),$$

$$\sigma_{x_j}(N,v,x_ie^i+x_je^j)=v(x_je^j)+\frac{1}{2}(v(x_ie^i+x_je^j)-v(x_ie^i)-v(x_je^j)),$$

则称 σ 是具有模糊联盟的标准两人博弈.

定理 3 设 σ 是 Γ 上的一个解, 那么 σ 是具有模糊联盟博弈的标准两人博弈且具有一致性当且仅当 σ 是具有模糊联盟博弈的 Shapley 值.

证明 若 σ 是具有模糊联盟博弈的 Shapley 值, 则由定理 2 知, σ 是一致的, 由 (6) 式知 σ 是具有模糊联盟的标准两人博弈.

另一方面, 设 σ 是具有模糊联盟的标准两人博弈且具有一致性, 首先证 σ 具有有效性, 即

$$\sum_{j\in N}\sigma_{x_j}(N,v,x)=v\left(\sum_{i\in N}x_ie^i\right)\tag{9}$$

当 $|N|=2$ 时, 由具有模糊联盟的标准两人博弈定义直接可得.

当 $|N|\geq 3$ 时, 假设对于不超过 $n-1$ 人具有模糊联盟博弈 (9) 式成立, 则当 $|N|=n$ 时, 对于 $k\in N$, 由 σ 的一致性可知

$$\begin{aligned}\sum_{j\in N}\sigma_{x_j}(N,v,x)&=\sigma_{x_k}(N,v,x)+\sum_{i\in N\backslash\{k\}}\sigma_{x_i}(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k)\\&=\sigma_{x_k}(N,v,x)+v_{k,\sigma}\left(\sum_{i\in N\backslash\{k\}}x_ie^i\right)\\&=v\left(\sum_{i\in N}x_ie^i\right).\end{aligned}$$

当 $|N|=1$ 时, (N,v,x_ie^i) 是一人博弈, 下证 $\sigma_{x_i}(N,v,x_ie^i)=v(x_ie^i)$.

按下面的方式构造一个两人博弈 $(N,\overline{v},x_ie^i+x_je^j)$,

$$\overline{v}(x_je^j)=0,\quad \overline{v}(x_ie^i+x_je^j)=\overline{v}(x_ie^i)=v(x_ie^i).$$

由 σ 的标准性可得

$$\sigma_{x_i}(N,\overline{v},x_ie^i+x_je^j)=\overline{v}(x_ie^i)+\frac{1}{2}(\overline{v}(x_ie^i+x_je^j)-\overline{v}(x_ie^i)-\overline{v}(x_je^j))=\overline{v}(x_ie^i)-0=v(x_ie^i),$$
$$\sigma_{x_j}(N,\overline{v},x_ie^i+x_je^j)=0.$$

根据 $\overline{v}_{j,\sigma}$ 的定义, 有

$$\overline{v}_{j,\sigma}(x_ie^i)=\overline{v}(x_ie^i+x_je^j)-\sigma_{x_j}(N,\overline{v},x_ie^i+x_je^j)=v(x_ie^i).$$

由 σ 的一致性,

$$\sigma_{x_i}(N,v,x_ie^i)=\sigma_{x_i}(N,\overline{v}_{j,\sigma},x_ie^i)=\sigma_{x_i}(N,\overline{v},x_ie^i+x_ie^i)=v(x_ie^i).$$

综上可知, σ 满足有效性.

下面构造函数 $\psi:\Gamma\to R$.

$$\begin{cases}\psi(N,v,e^{\emptyset})=0,\\ \psi(N,v,x_ie^i)=v(x_ie^i),\\ \psi(N,v,x_ie^i+x_je^j)=\dfrac{1}{2}(v(x_ie^ix_je^j)+v(x_ie^i)+v(x_je^j)).\end{cases}$$

当 $|N|=1$, $|N|=2$ 时, 容易验证

$$\sigma_{x_i}(N,v,x)=\psi(N,v,x)-\psi(N,v,x-x_ie^i)\tag{10}$$

当 $|N|\geq 3$ 时, 设 $(N,v,x)\in\Gamma$. 假设对局中人小于 n 的具有模糊联盟博弈 (10) 式成立, 则当 $|N|=n$ 时, 只需证

$$\sigma_{x_i}(N,v,x)+\psi(N,v,x-x_ie^i)=\sigma_{x_j}(N,v,x)+\psi(N,v,x-x_je^j),\quad i,j\in N,i\neq j.$$

取 $k\in N\backslash\{i,j\}$, 由 σ 的一致性, 有

$$\begin{aligned}\sigma_{x_i}(N,v,x)-\sigma_{x_j}(N,v,x)&=\sigma_{x_i}(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k)-\sigma_{x_j}(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k)\\&=[\psi(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k)-\psi(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k-x_ie^i)]-\\&\quad[\psi(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k)-\psi(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k-x_je^j)]\\&=[(-\psi(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k-x_ie^i))+\psi(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k-x_ie^i-x_je^j)]+\\&\quad[\psi(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k-x_je^j)-\psi(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k-x_ie^i-x_je^j)]\\&=-\sigma_{x_j}(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k-x_ie^i)+\sigma_{x_i}(N,v_{k,\sigma},x-x_ke^k-x_je^j)\\&=-\sigma_{x_j}(N,v,x-x_ie^i)+\sigma_{x_i}(N,v,x-x_je^j)\\&=[-\psi(N,v,x-x_ie^i)+\psi(N,v,x-x_ie^i-x_je^j)]+\\&\quad[\psi(N,v,x-x_je^j)-\psi(N,v,x-x_je^j-x_ie^i)]\\&=\psi(N,v,x-x_je^j)-\psi(N,v,x-x_ie^i),\end{aligned}$$

即 (10) 式得证.

所以 $\sigma_{x_i}(N,v,x)=\psi(N,v,x)-\psi(N,v,x-x_ie^i)$. 由 σ 的有效性知 ψ 为势函数, 因为势函数是唯一的, 所以 $\psi=P$. 由定理 1 知 $\sigma_{x_i}(N,v,x)=\varphi_{x_i}(N,v,x)$.

下面举例说明定理 3 中的一致性和具有模糊联盟博弈的标准两人博弈两个条件是相互独立的.

例 2 对任意 $(N,v,x)\in\Gamma$, $x\in L(N)$.

1) 令 $\sigma_{x_i}(N,v,x)=0$. 容易验证 σ 满足一致性, 但是不满足具有模糊联盟博弈的标准两人博弈条件.

2)

$$\sigma_{x_i}(N,v,x)=\begin{cases}\varphi_{x_i}(N,v,x), & \text{if } |N|\leq 2,\\ v(x_ie^i), & \text{否则}.\end{cases}$$

显然, σ 满足具有模糊联盟博弈的标准两人博弈条件.

$|N|>2$ 时, 任取 $t \in L(N)$, $t=\sum\limits_{i \in T} x_i e^i$, $t \neq e^{\emptyset}$, 则任意 $x_i e^i \in (x-t)^* \backslash e^{\emptyset}$,

$$v_{t,\sigma}(x_i e^i)=v(x_i e^i+t)-\sum_{j \in T} \sigma_{x_j}(N,v,x_j e^j+t)=v(x_i e^i+t)-\sum_{j \in T} v(x_j e^j).$$

所以 $\sigma_{x_i}(N,v_{t,\sigma},x-t) \neq \sigma_{x_i}(N,v,x)$, 因此 σ 不满足一致性.

5 结论

本文基于 Hart 和 Mas-Colell 的思想, 将经典合作博弈中的势函数和一致性概念推广到了具有模糊联盟的合作博弈中, 对具有模糊联盟的 Shapley 值进行了刻画. 对于具有 Choquet 积分形式的合作博弈, 用例子说明利用具有模糊联盟博弈的势函数与 Shapley 值之间的对应关系. 此外, 利用缩减博弈可以定义一致性, 而在经典合作博弈中有多种定义缩减博弈的方式, 本文只是将其中的一种推广到具有模糊联盟的合作博弈中, 并用其所定义的一致性对具有模糊联盟博弈的 Shapley 值进行了刻画.

参考文献

[1] Shapley L S. A value for n-person games[J]. Annals of Mathematics Studies, 1953, 28: 307–318.

[2] Hart S, Mas-Colell A. Potential value and consistency[J]. Econometrica, 1989, 57: 589–641.

[3] Aubin J P. Coeur et valuer des jeux flous à paiements latèraux[J]. Comptes Rendus de I'Acad. Sci. Paris, 1974, 279: 891–894.

[4] Aubin J P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory[M]. Amsterdam: North-Holland Press, 1980.

[5] Aubin J P. Cooperative fuzzy games[J]. Mathematical Operation Research, 1981(6): 1–13.

[6] Butnariu D. Fuzzy games: A description of the concept[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978(1): 181–192.

[7] Butnariu D. Stability and Shapley value for an n-person fuzzy games[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1980(4): 63–72.

[8] Butnariu D, Klement E P. Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions[M]. Kluwer: Dordrecht, 1993.

[9] Butnariu D, Klement E P. Core, value and equilibria for market games: On a problem of Aumann and Shapley[J]. International Journal of Game Theory, 1996: 149–160.

[10] Tsurumi M, Tanino T, Inuiguchi M. A Shapley function on a class of cooperative fuzzy games[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129(3): 596–618.

[11] Butnariu D, Kroupa T. Shapley mappings and the cumulative value for n-person games with fuzzy coalitions[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 186(1): 288–299.

[12] Li S J, Zhang Q. A reduced expression of the Shapley function for fuzzy game[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 196(1): 234–245.