文章编号：1000-6893(2010)07-1481-07

基于 PH 曲线的数控拐角过渡方法

王琦魁[1]，陈友东[2]，李伟[1]，魏洪兴[3]

（1. 中国农业大学 机械设计制造系，北京 100083）

（2. 北京航空航天大学 工程系统工程系，北京 100191）

（3. 北京航空航天大学 机器人研究所，北京 100191）

Corner Smoothing Using PH Curve for CNC System

Wang Qikui[1], Chen Youdong[2], Li Wei[1], Wei Hongxing[3]

(1. Department of Machine Design and Manufacturing, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

(2. Department of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

(3. Institute of Robotics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

摘 要：为了减弱轨迹拐角处的向心加速度变化给加工带来的不利影响，使用五次 PH 曲线进行拐角过渡，在控制加工速度的同时对向心加速度进行控制。通过对拐角处连接情况的分析，确定了连接 PH 曲线中的参数计算方法。在拐角前后使用 S 加减速进行加工，以保证直线、圆弧轨迹加工中的平稳；在拐角连接区域内使用基于曲率的速度模型，通过对拐角前后 S 加减速和拐角速度的连接，使拐角前后的速度更加连续，得到平滑的速度曲线；通过拐角处的加速度和弓高误差的限制，计算平稳的加工速度。结果表明，使用五次 PH 曲线进行拐角过渡的误差小于 7.4 μm，能够满足加工需要，同时，拐角处的向心加速度变化更加平稳。将拐角前后的 S 加减速和拐角区域内速度连接后，得到了平滑的速度曲线。

关键词：数控；拐角过渡；PH 曲线；S 型曲线加减速；误差

中图分类号：V261；TG51 **文献标识码**：A

Abstract: To control the normal acceleration in a corner area for machining, a quintic Pythagorean-Hodograph (PH) curve is introduced for corner smoothing. The normal acceleration as well as the velocity of the trajectory is controlled. Parameters for constructing the PH curves are proposed according to the situation of the corner. S-shape velocity profile is used to ensure the speed in line and circle machining. The velocity based on the rate of curvature is presented to meet the shape of the corner. The jerk of the S-shape acceleration is modified at the start and the end of the corner for the connection of speed. The federate in the corner area is controlled by the constraint of acceleration and chord error. The results show that the replacement error of the PH curve in the corner is less than 7.4 μm, which is sufficient to satisfy the requirements for machining. Meanwhile the difference of the normal acceleration is suppressed. A smooth velocity profile is obtained by the connection of the S-shape for the trajectory and the curvature based on the corner.

Key words: computer numerical control; corner smoothing; Pythagorean-Hodograph curve; S-shape velocity profile; errors

在对模具等轮廓型腔进行加工时，轮廓中的拐角会改变刀具的加工方向，并产生较大的向心加速度。进行高速加工时，高的曲率半径意味着高的加速度。这会使机床产生振动，同时也会降低加工精度。为了使拐角处的加工更加平稳，国内外的一些学者进行了研究。M. K. Jouaneh 等在拐角附近引入了圆弧和双螺旋曲线来得到光滑的轨迹，并将其应用于机器人控制中[1-2]。K. Erkorkmaz 等用五次样条来取代拐角区域的直线段，其拐角误差限制在 30 μm 以下[3]。张得礼等使用圆弧来处理相邻运动矢量拐角处的速度，利用速度前瞻有效地控制了加工误差[4]。J. Jahanpour 和 B. M. Imani 使用 PH 曲线进行拐角过渡，使得高速加工中伺服的滞后性得到抑制[5]。Z. Šír 等使用 PH 曲线对拐角进行过渡，利用 Hermite 插值计算得到五次 PH 曲线[6]，但是其计算较为复杂。

收稿日期：2009-07-06；**修订日期**：2009-09-02

基金项目：国家高档数控机床与基础制造装备专项(2009ZX04009-014)

通讯作者：陈友东 E-mail：chenyd@buaa.edu.cn

在拐角处的加工，特别是进行高速加工时，使用曲线进行拐角过渡可以有效地控制加工速度和加速度。使用圆弧进行过渡，会在圆弧与直线的连接处产生较大的向心加速度突变，不利于控制速度和加速度。使用双螺旋线进行过渡时，向心加速度成三角形，连续性较弱[1]。在利用 PH 曲线进行过渡时，文献[5]中利用迭代方法计算 PH 曲线所需参数，不利于满足系统的实时性要求。

由于 PH 曲线不仅具有曲率连续变化的性质，而且其弧长可以表示为参数的多项式函数形式[7]，本文选用五次 PH 曲线进行拐角过渡。为了使拐角处 PH 曲线的参数计算更加方便，提高计算效率，文中通过分析拐角处直线与直线、圆弧与直线、圆弧与圆弧的连接情况，得到 PH 曲线所需首末点和切矢量的计算方法。在拐角区域使用基于曲率的速度模型使得速度与曲率的变化相适应，提高加工精度。在保证速度平稳变化的前提下，能够使向心加速度连续变化，减弱对机床的冲击。在曲率变化较小的拐角前后轨迹段使用 S 加减速模型，通过拐角区前后的速度连接，使整个加工轨迹能够具有平滑的加工速度。

1 PH 曲线的表示形式与 PH 曲线插补

为了便于计算，将 PH 曲线上的点表示成复数形式 $\boldsymbol{r}(\xi)=x(\xi)+\mathrm{i}y(\xi)$，曲线的导数表示为

$$\boldsymbol{r}'(\xi)=\boldsymbol{\omega}^2(\xi) \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{\omega}(\xi)=\boldsymbol{\omega}_0(1-\xi)^2+2\boldsymbol{\omega}_1(1-\xi)\xi+\boldsymbol{\omega}_2\xi^2$，参数 $\xi\in[0,1]$，$\boldsymbol{\omega}_0$、$\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$ 为多项式的系数。则存在两个多项式：

$$u(\xi)=\sum_{k=0}^{3}u_k\begin{bmatrix}3\\k\end{bmatrix}(1-\xi)^{3-k}\xi^k$$

$$v(\xi)=\sum_{k=0}^{3}v_k\begin{bmatrix}3\\k\end{bmatrix}(1-\xi)^{3-k}\xi^k$$

式中：u_k、v_k 为常数；k 为曲线次数。

使 $x'(\xi)=u^2(\xi)-v^2(\xi)$，$y'(\xi)=2u(\xi)v(\xi)$。多项式 $\boldsymbol{\omega}(\xi)=u(\xi)+\mathrm{i}v(\xi)$，曲线参数速度 $\sigma(\xi)=\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\xi)}=u^2(\xi)+v^2(\xi)$[7]。

$$\sigma(\xi)=\sum_{k=0}^{4}\sigma_k\begin{bmatrix}4\\k\end{bmatrix}(1-\xi)^{4-k}\xi^k \tag{2}$$

式中：多项式系数 $\sigma_0=u_0^2+v_0^2$，$\sigma_1=u_0u_1+v_0v_1$，$\sigma_2=2(u_1^2+v_1^2)/3+(u_0u_2+v_0v_2)/3$，$\sigma_3=u_1u_2+v_1v_2$，$\sigma_4=u_2^2+v_2^2$。

则曲线的弧长可以表示为[7]

$$s(\xi)=\int_0^{\xi}\sigma(\tau)\mathrm{d}\tau=\sum_{k=0}^{5}s_k\begin{bmatrix}5\\k\end{bmatrix}(1-\xi)^{5-k}\xi^k \tag{3}$$

式中：$s_0=0$；$s_k=\dfrac{1}{5}\sum_{i=0}^{k-1}\sigma_i$，$k=1,2,\cdots,5$。

曲率可以表示为[7]

$$\kappa(\xi)=2\frac{u(\xi)v'(\xi)-u'(\xi)v(\xi)}{\sigma^2(\xi)} \tag{4}$$

由于拐角处的曲线曲率变化较大，为了得到更加平稳的加工速度，将速度以曲率的形式表示，就得到了基于曲率的 PH 曲线插补。要计算 PH 曲线的插补点就要计算与时间相对应的曲线参数 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n。为了能够得到平滑的速度和向心加速度曲线，将基于曲率的速度 $V_\kappa(\xi)$ 表示为 $V_\kappa(\xi)=V_*\kappa_*/\sqrt[6]{\kappa(\xi)}$，则 ξ 是式(5)的根[7]。

$$s(\xi_k)=k\Delta s_0 \tag{5}$$

式中：$\Delta s_0=V_\kappa(\xi_k)\Delta t$；$\kappa_*$ 为曲率常数；V_* 为对应曲率的速度常数；Δt 为插补时间。

通过牛顿迭代法得到式(6)和式(7)，就可以得到迭代 r 次时 k 次 PH 曲线的参数 ξ，从而得到基于曲线曲率的插补点坐标[7]。

$$\xi_k^{(0)}=\xi_{k-1}+\frac{\Delta s_0}{\sigma(\xi_{k-1})} \tag{6}$$

$$\xi_k^{(r)}=\xi_k^{(r-1)}-\frac{s(\xi_k^{(r-1)})-k\Delta s_0}{\sigma(\xi_k^{(r-1)})} \tag{7}$$

2 拐角处 PH 曲线过渡的实现方法

在构建 PH 曲线进行拐角过渡时，就要确定拐角处 PH 曲线的首末点坐标及其对应的切矢量坐标，并使 PH 曲线在拐角处的过渡误差满足许用加工误差。

2.1 PH 曲线的形成

为了在拐点附近得到一条 PH 曲线，首先要确定曲线的首末端点及其对应的切矢量。曲线的首末点坐标分别为$(x_{\mathrm{is}},y_{\mathrm{is}})$和$(x_{\mathrm{ie}},y_{\mathrm{ie}})$，其复数形式为

$$\boldsymbol{r}_0=x_{\mathrm{is}}+\mathrm{i}y_{\mathrm{is}},\quad \boldsymbol{r}_1=x_{\mathrm{ie}}+\mathrm{i}y_{\mathrm{ie}}$$

式中：$\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{r}_1$ 是首末点。PH 曲线的首末切矢量 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{s}}$ 和 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{e}}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{s}}=c_0(\cos\alpha_{\mathrm{is}},\sin\alpha_{\mathrm{is}})$$

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{e}}=c_1(\cos\alpha_{\mathrm{ie}},\sin\alpha_{\mathrm{ie}})$$

式中：α_{is} 和 α_{ie} 分别为首末点切矢量与坐标轴的夹角；c_0 和 c_1 为常数。

由于 PH 曲线首末点的切矢量的方向是沿直线方向的，所以 α_{is} 和 α_{ie} 的大小分别与拐角处两条直线与坐标轴的夹角大小相一致。并且，多项式 $\boldsymbol{\omega}(\xi)$ 中的系数可以表示为[8]

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{d}_0} \\ \boldsymbol{\omega}_2 = \pm\sqrt{\boldsymbol{d}_1} \\ \boldsymbol{\omega}_1 = \dfrac{-3(\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\omega}_2)}{4} \pm \\ \qquad \dfrac{\sqrt{120(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)-15\boldsymbol{\omega}_0^2-15\boldsymbol{\omega}_2^2+10\boldsymbol{\omega}_0\boldsymbol{\omega}_2}}{4} \end{cases}$$

式中：$\boldsymbol{d}_0$、$\boldsymbol{d}_1$ 为对应的切矢量。

这样就得到了 $\boldsymbol{\omega}(\xi)$，利用式(1)就可以得到五次 PH 曲线。

2.2　拐角过渡模型中参数的计算

进行 PH 曲线过渡时，需要计算拐点处 PH 曲线的首末点及其相对应的切矢量。下面根据拐点处的连接情况，得到单位切矢量计算方法。通过拐角情况与误差限制，计算过渡 PH 曲线的首末点 $\boldsymbol{P}_s(x_s, y_s)$，$\boldsymbol{P}_e(x_e, y_e)$。

(1) 拐角区 PH 曲线切矢量 $\boldsymbol{d}$ 的计算

① 直线与直线的连接

根据曲线首末点所在的直线段的情况，并由单位切矢量的定义，可以得到

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= c(\cos\beta_0, -\sin\beta_0) & -\pi/2 < \beta_0 < 0 \\ \boldsymbol{d} &= c(\cos\beta_0, \sin\beta_0) & 0 \leqslant \beta_0 \leqslant \pi/2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中：β_0 为直线与 X 正方向的夹角；c 为常数。

② 直线与圆弧的连接

当直线段与圆弧相连进行拐角过渡时，位于直线端的单位切矢量与直线连接中的方法相同。圆弧端的单位切矢量依据象限的不同得到不同的表示形式：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= c(-\cos\gamma, \sin\gamma) & 0 \leqslant \gamma < \pi/2 \\ \boldsymbol{d} &= c(-\cos\gamma, -\sin\gamma) & \pi/2 \leqslant \gamma < \pi \\ \boldsymbol{d} &= c(\cos\gamma, -\sin\gamma) & \pi \leqslant \gamma < 3\pi/2 \\ \boldsymbol{d} &= c(\cos\gamma, \sin\gamma) & 3\pi/2 \leqslant \gamma < 2\pi \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中：γ 为圆弧切矢量与 X 正方向的夹角。

③ 圆弧与圆弧的连接

圆弧与圆弧连接的单位切矢量的计算方法与直线与圆弧连接中圆弧切矢量的计算方法相同。

由于参数 c 影响 PH 曲线的形状，则当拐角的大小为 φ 时，$c=2\varphi/\pi$。

综上，通过上述连接，原轨迹的拐角处转化为 PH 曲线，得到了连续的轨迹，流程如图 1 所示。

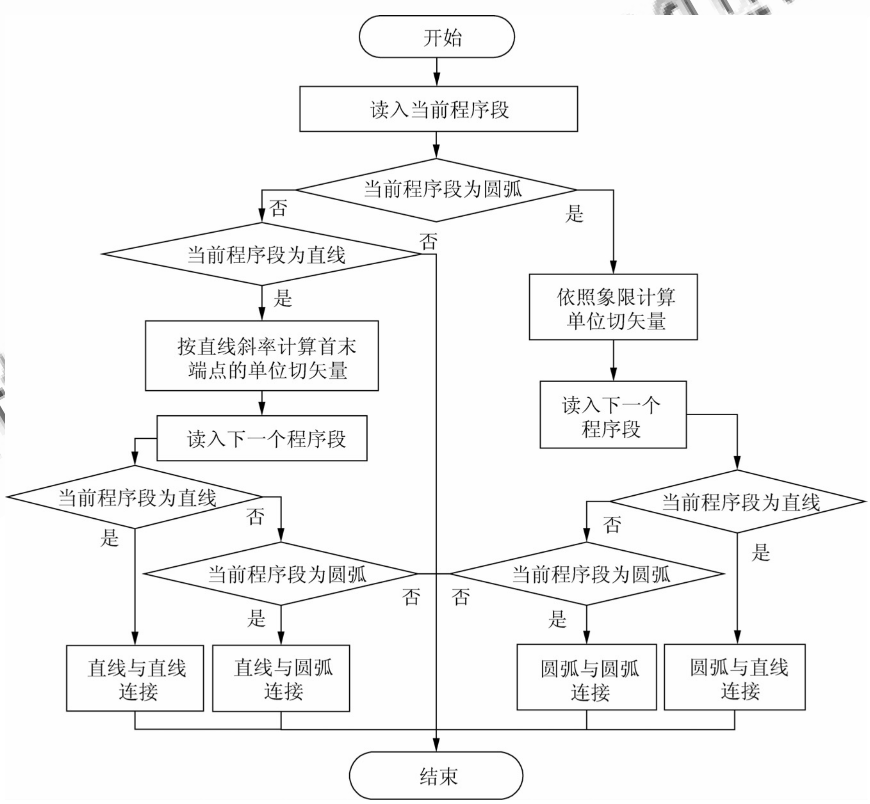

图 1　拐角连接情况判定流程

Fig. 1　Flowchart of the judgment of corner situation

(2) PH 曲线首末点的计算

已知 3 点 $P_A(x_A, y_A)$，$P_B(x_B, y_B)$，$P_C(x_C, y_C)$，如图 2 所示。则拐角 P_B 处的角平分线方程为

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \tag{10}$$

式中：$\lambda = \sqrt{\dfrac{A_1^2 + B_1^2}{A_2^2 + B_2^2}} = \sqrt{\dfrac{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}{(y_C - y_B)^2 + (x_C - x_B)^2}} > 0$，$A_1$、$B_1$、$C_1$、$A_2$、$B_2$、$C_2$ 为常数。则与角平分线垂直的直线的斜率为

$$k_l = \frac{B_1 + \lambda B_2}{A_1 + \lambda A_2} \tag{11}$$

由于首末点的位置会影响拐角的过渡误差，所以在进行首末点计算时要考虑过渡误差的限制。考虑到加工精度要求的不同，令首末点所在直线与拐点处的距离与最大过渡误差值 ε_c 之间的比为 n。n 值越小，表明加工对拐角的要求越高。由于起始点坐标位于直线 l 上，并且点 P_B 到直线 l 的距离为 $n\varepsilon_c$（如图 2 所示）。由于常数 c_0 和 c_1 可以用来调整 PH 曲线的形状，进而控制误差，所以当拐角大小为 φ 时，给定 n 为 $1 + \sin \varphi/2$。

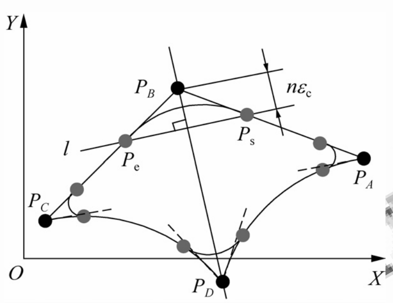

图 2 PH 曲线参数

Fig. 2 Parameters for the PH curve

计算得到 PH 曲线的起始点和终止点的坐标可以表示为

$$\left.\begin{aligned} x_s &= \frac{B_1(k_l x_B - y_B - n\varepsilon_c\sqrt{k_l^2 + 1}) - C_1}{A_1 + B_1 k_l} \\ y_s &= \frac{A_1(y_B - k_l x_B + n\varepsilon_c\sqrt{k_l^2 + 1}) - C_1 k_l}{A_1 + B_1 k_l} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

同理可以得到 PH 曲线的终止点坐标。综合上述方法的 PH 过渡曲线形成流程如图 3 所示。

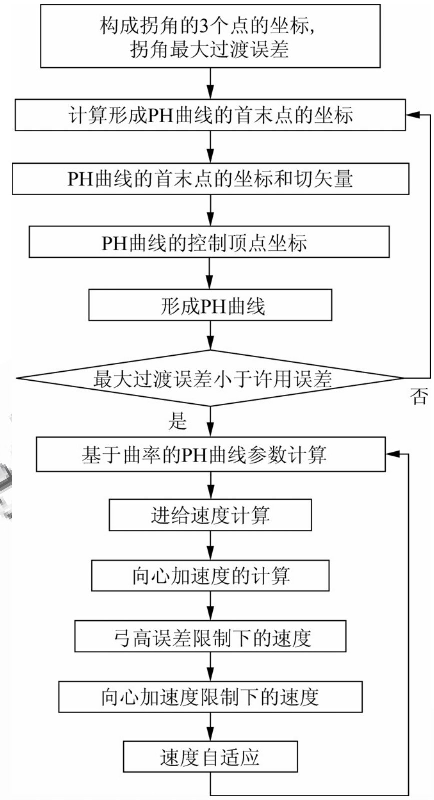

图 3 PH 曲线过渡方法流程

Fig. 3 Flowchart of PH smoothing

3 加速度与速度控制方法

由于 S 型加减速在加工中更加平稳，所以在进入拐角前使用 S 型加减速方式进行减速。S 加减速在加速时分为加加速段、匀加速段和减加速段；在减速时分为加减速段、匀减速段和减减速段[9-10]。在拐角区域内，为了使速度能够适应于曲线形状的变化，使用基于曲率的速度控制方法。为了满足该加工速度，就要在进入拐角前进行加减速，使其末速度要与进入拐角的目标速度相一致。下面对拐角区前后的速度连接以及弓高误差与向心加速度对速度的限制进行讨论。

3.1 进入拐角区域前速度的连接

由于拐角前、后与拐角区速度的连接情况近似，下面对拐角前与拐角区速度的连接进行讨论。

(1) 满足完整 S 加减速的轨迹长度的判定

为了使过渡更加平滑，将 S 加减速中的减减速段与匀减速段合并，并使末速度与拐角区初速度一致。这样 S 加减速模型发生改变，进行拐角前速度连接时需要重新计算减速段加速度的导数。当拐角区前减速段的速度为 v_{dec}，拐角区初速度为 v_{cs} 时，减速段的加速度导数为

$$J_{\text{dec}} = 2\frac{v_{\text{dec}} - v_{\text{cs}}}{t_5^2 + 2(t_5 t_6 + t_5 t_7)} \tag{13}$$

式中：t_5 为加减速段时间；t_6 为匀减速段时间；t_7 为减减速段时间。

利用 J_{dec} 得到减速段路径长度为 S_{dbf}。同时由最大加速度导数 $J_{\max}$ 计算出加速段路径长度 S_{abf}。则拐角前轨迹加减速的总长度为 $S_{\text{cbt}} = S_{\text{abf}} + S_{\text{dbf}}$。即当拐角前轨迹长度 $S_{\text{b}} \geqslant S_{\text{cbt}}$ 时，拐角前可以进行完整的 S 加减速。

（2）不满足完整 S 加减速的轨迹长度的判定

由拐角前一段轨迹的初速度 v_{tbs} 和拐角初速度 v_{cs} 计算出加速段的加速度导数为

$$j_{\text{acc}} = 2\frac{v_{\text{cs}} - v_{\text{tbs}}}{t_1^2 + 2t_1 t_2 + 2t_1 t_3 - t_3^2} \tag{14}$$

式中：t_1 为加加速段时间；t_2 为匀加速段时间；t_3 为减加速段时间。则由 j_{acc} 可得到 S 加减速加速段的最小距离 S_{abp}。

当拐角前轨迹长度 $S_{\text{b}} \geqslant S_{\text{abp}}$ 时，拐角前最大速度 $v_{\text{tbmax}} \geqslant v_{\text{cs}}$。则拐角前以 $J_{\max}$ 进行加速，当轨迹速度 v_{s} 达到 v_{cs} 时，就保持 $v_{\text{s}} = v_{\text{cs}}$ 直到进入拐角区。

当拐角前轨迹长度 $S_{\text{b}} < S_{\text{abp}}$ 时，则拐角前的最大速度 $v_{\text{tbmax}} < v_{\text{cs}}$。即拐角前的末速度小于拐角初速度。则以此速度进入拐角区，直到拐角区内速度等于该速度时再以曲率变化进行加减速。

3.2　拐角区域速度的自适应控制

当进入拐角区域后，PH 曲线的加工速度与曲率的变化相一致。同时，为了保证加工精度，曲线加工中的弓高误差和加速度对于曲线加工速度的限制也应考虑。令曲线的曲率半径为 ρ_i，最大许用弓高误差为 $\delta_{\max}$，插补周期为 T。则弓高误差限制下的速度可以表示为

$$v_{\text{chord}} = \sqrt{8\rho_i \delta_{\max}}/T \tag{15}$$

曲线插补点的合加速度由切向加速度 a_{t} 和法向加速度 $a_{\text{n\_}\rho}$ 组成。拐角处的加速度 a_ρ 表示为

$$a_\rho = \sqrt{a_{\text{t}}^2 + a_{\text{n\_}\rho}^2} = \sqrt{[(v_i - v_{i-1})/T]^2 + (v_i^2/\rho_i)^2} \tag{16}$$

式中：v_i 为本周期速度；v_{i-1} 为上一周期速度。

令拐角许用最大加速度 $a_{\max}$，则当 $a_\rho \leqslant a_{\max}$ 时，拐角速度 $v_{i\_\rho} = v_i$。否则，$v_{i\_\rho} = v_{i-1}$。所以，拐角处的最大速度为 $v_{i\_\text{c}} = \min\{v_{\text{chord}}, v_{i\_\rho}\}$。

4　模拟实验验证

在拐角处使用基于曲率的速度控制方法，可以使向心加速度的变化更加平稳，减弱对机床的冲击。图 4 和图 5 给出了拐角区域加工向心加速度和速度的曲线轮廓图，图 4 中的向心加速度的曲线平稳。图 6 和图 7 给出了分别使用圆弧过渡和 PH 曲线过渡时，拐角区域向心加速度和速度的曲线图。从图中可以看出利用 PH 曲线进行拐角过渡时，基于曲率的速度控制方法能够有效地降低拐角首末点处的加速度突变。图 8 和图 9 表明将拐角前后的 S 加减速与基于曲率的拐角区域速度进行连接后，得到了平稳的向心加速度和速度曲线。图 10、图 11 和图 12 分别给出了拐角前

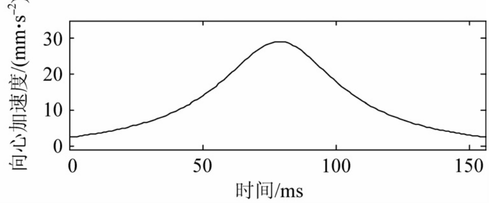

图 4　拐角区向心加速度曲线

Fig. 4　Normal acceleration profile in corner

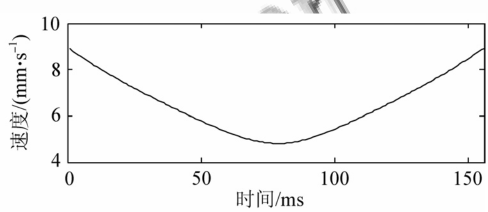

图 5　拐角区速度曲线

Fig. 5　Velocity profile in corner

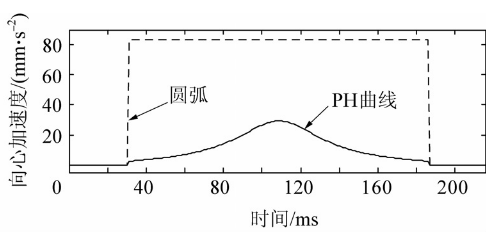

图 6　拐角过渡中向心加速度曲线

Fig. 6　Normal acceleration profile in corner smoothing

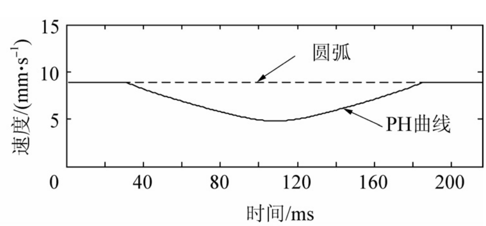

图 7　拐角过渡中的速度曲线

Fig. 7　Velocity profile in corner smoothing

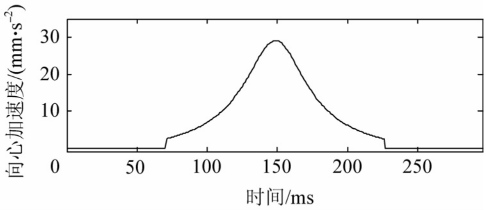

图 8 拐角过渡轨迹的向心加速度曲线

Fig. 8 Normal acceleration profile of trajectory

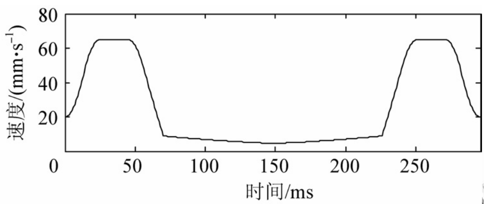

图 9 拐角过渡轨迹的速度曲线

Fig. 9 Velocity profile of trajectory

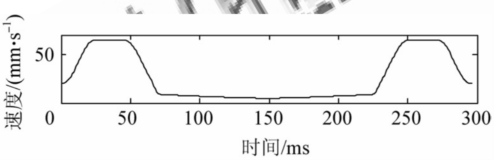

图 10 完整 S 加减速的连接速度曲线

Fig. 10 Profile satisfying full S-shape connection

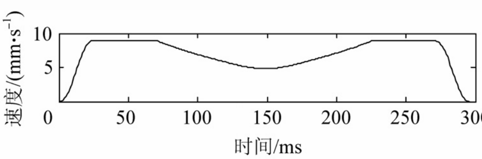

图 11 最大速度满足拐角最大速度的连接速度曲线

Fig. 11 Profile satisfying corner maximal velocity

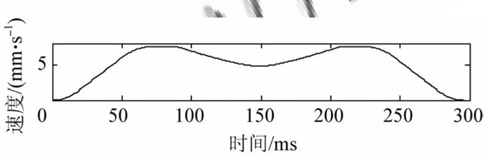

图 12 最大速度不满足拐角最大速度的连接速度曲线

Fig. 12 Profile not satisfying corner maximal velocity

后满足完整 S 加减速的情况以及不满足完整 S 加减速的两种情况时速度的连接曲线，曲线表明不同连接情况下的速度保持了平稳变化。

使用 PH 曲线进行拐角过渡可以得到平滑的加工轨迹(如图 13 所示)。通过拐角处 PH 曲线的调节，控制 PH 曲线的最大过渡误差为 7.4 μm (如图 14 所示)，能够满足一般加工的需要。

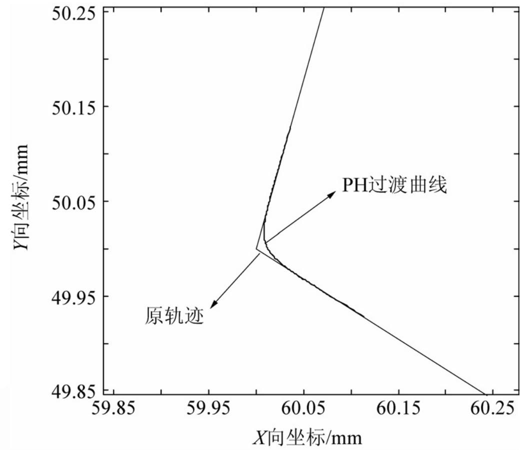

图 13 PH 曲线拐角过渡实现

Fig. 13 Corner smoothing of PH curve

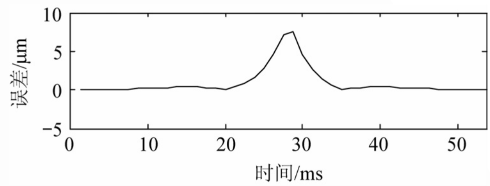

图 14 PH 曲线拐角区的误差

Fig. 14 Error of PH curve corner

5 结 论

(1) 使用 PH 曲线进行拐角过渡能够得到平滑的轨迹，其过渡误差能够满足一般加工的需要。

(2) 在拐角区使用基于曲率的速度控制方法使速度随曲率变化，有利于提高加工精度。同时向心加速度得到了平稳的变化，减弱了加工过程对机床的冲击。

(3) 通过对拐角前后与拐角区速度的连接情况的判定，对拐角前后的速度进行了平滑处理，得到了平稳的加工速度。

参 考 文 献

[1] Jouaneh M K, Wang Z, Dornfeld D A. Trajectory planning for coordinated motion of a robot and a positioning table: Part Ⅰ—path specification [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(6): 735-745.

[2] Jouaneh M K, Dornfeld D A, Tomizuka M. Trajectory planning for coordinated motion of a robot and a positioning table: Part Ⅱ—optimal trajectory specification [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(6): 746-759.

[3] Erkorkmaz K, Yeung C H, Altintas Y. Virtual CNC system: Part Ⅱ—high speed contouring application[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture,

2006，46(10)：1124-1138.

[4] 张得礼，周来水. 数控加工运动的平滑处理[J]. 航空学报，2006，27(1)：125-130.
Zhang Deli，Zhou Laishui. Adaptive algorithm for feedrate smoothing of high speed machining [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2006，27(1)：125-130. (in Chinese)

[5] Jahanpour J，Imani B M. Real-time P-H curve CNC interpolators for high speed cornering [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology，2008，39(3-4)：302-316.

[6] Šír Z，Wings E，Jüttler B. Rounding spatial G-code tool paths using Pythagorean-Hodograph curves [J]. Journal of Computing and Information Science in Engineering，2007，7(3)：186-191.

[7] Farouki R T，Shah S. Real-time CNC interpolators for Pythagorean-Hodograph curves [J]. Computer Aided Geometric Design，1996，13(7)：583-600.

[8] Moon H P，Farouki R T，Choi H I. Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants[J]. Computer Aided Geometric Design，2001，18(2)：93-115.

[9] Erkorkmaz K，Altintas Y. High speed CNC system design. Part I：jerk limited trajectory generation and quintic spline [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture，2001，41(9)：1323-1345.

[10] 石川，赵彤，叶佩青，等. 数控系统 S 曲线加减速规划研究[J]. 中国机械工程，2007，18(12)：1421-1425.
Shi Chuan，Zhao Tong，Ye Peiqing，et al. Study on S-shape curve acceleration and deceleration control on NC system[J]. China Mechanical Engineering，2007，18(12)：1421-1425. (in Chinese)

作者简介：

王琦魁(1982－) 男，博士研究生。主要研究方向：数控技术。
Tel：010-82316182
E-mail：qkwang@126.com

陈友东(1973－) 男，博士，讲师。主要研究方向：数控技术。

李伟(1956－) 女，博士，教授。主要研究方向：农业装备自动化技术。

魏洪兴(1974－) 男，博士，副教授。主要研究方向：先进机器人及其嵌入式控制技术。

(编辑：蔡斐)