第36卷第6期 中国科学技术大学学报 Vol. 36, No. 6
2006年6月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Jun. 2006

文章编号:0253-2778(2006)06-0607-04

局部纽立方体网络的容错泛圈性*

常青彦[1],马美杰[2],徐俊明[1]

(1.中国科学技术大学数学系,安徽合肥 230026;2.山东大学数学与系统科学学院,山东济南 250100)

摘要:n 维局部纽立方体网络 LTQ_n 是超立方体网络的一种新变型.已经证明:LTQ_n 中就包含任意长度 $\ell(4\leqslant \ell\leqslant 2^n)$ 的圈.我们改进了这个结果,证明了:只要网络故障点数 f_v 和故障边数 f_e 之和不超过 $(n-2)$,LTQ_n 中就包含任意长度 $\ell(4\leqslant \ell\leqslant 2^n-f_v)$ 的圈.

关键词:局部纽立方体网络;圈;泛圈;容错泛圈

中图分类号:O157.5;O157.9 **文献标识码**:A

AMS Subject Classification(2000):Primary 05C38;Secondary 90B10

Fault-tolerant pancyclicity of locally twisted cubes

CHANG Qing-yan[1], MA Mei-jie[2], XU Jun-ming[1]

(1. *Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*;
2. *School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan* 250100, *China*)

Abstract: An n-dimensional locally twisted cube, LTQ_n, is a new variant of hypercubes. It has been proved that LTQ_n contains cycles of all lengths from 4 to 2^n. We improved this result by showing that LTQ_n contains cycles of all lengths from 4 to (2^n-f_v) provided that the number of faulty vertices and edges is not larger than $(n-2)$, where f_v is the number of faulty vertices in LTQ_n.

Key words: locally twisted cubes; cycle; pancycle; fault-tolerant pancycle

0 引言

互连网络的拓扑结构通常用连通的简单图 $G=(V,E)$ 来表示,其中,V 和 E 分别表示图 G 的点集和边集.有关图论的术语和记号可参见文献[1].

超立方体网络 Q_n 是较早提出的一种总体性质较好的互连网络,目前已研制出多种超立方体连接模式的并行超级计算机(如 n-CUBE,CM-2,iPSC-860)并投入实际使用.但它并不是各方面拓扑性质都最好的网络,于是人们提出了很多超立方体的变型,如交叉立方体[2],纽立方体[3]等,这些变型在点数和边数与超立方体相同的情况下,直径大约是超立方体的一半.局部纽立方体是 Yang 等[4]最近提出的一种超立方体的变型,它的直径大约是相同维数的超立方体的一半.

以 x,y 为端点的边记为 (x,y).一条以 x_0,x_n 为端点的路记为 $\langle x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\rangle$.一条两端点相同的路称为圈.包含图中所有的点的路称为 Hamilton 路.包含图中所有的点的圈称为 Hamilton 圈.如果一个图包含一条 Hamilton 圈,则它是 Hamilton 的.如果图中任何两点之间都存在 Hamilton路,则它是 Hamilton 连通的.如果图 G 含

* 收稿日期:2005-11-29;修回日期:2006-05-15
基金项目:国家自然科学基金(10271114)资助.
作者简介:常青彦,女,1975 年生,硕士生.研究方向:组合网络.E-mail:qychang@mail.ustc.edu.cn
通讯作者:徐俊明,教授.E-mail:xujm@ustc.edu.cn

有长从3(或者4)到$|V|$的任何长度的圈,则称图G是泛圈(或者几乎泛圈)的[5].

大型互连网络在使用过程中,它的结点和连线难免发生故障,因此考虑发生故障的网络具有现实意义.如果对图G的任意故障点(或者边)集$F\subset V(G)$(或者$E(G)$)且$|F|\leqslant k$,图$G-F$仍是Hamilton的(Hamilton连通的,泛圈的,几乎泛圈的),称图G为k点(或者边)容错Hamilton的(Hamilton连通的,泛圈的,几乎泛圈的).如果对图G的任意故障集$F\subset V(G)\cup E(G)$且$|F|\leqslant k$,图$G-F$仍是Hamilton的(Hamilton连通的,泛圈的,几乎泛圈的),称图G为k容错Hamilton的(Hamilton连通的,泛圈的,几乎泛圈的)[6~8].

1 定理

本文考虑局部纽立方体的圈嵌入问题.Yang等[4]证明了:局部纽立方体是几乎泛圈的.我们改进了这个结果,通过考虑局部纽立方体中故障边和故障点都可能存在的情况,得到

定理1.1 局部纽立方体$LTQ_n(n\geqslant 3)$是$(n-2)$容错几乎泛圈的.

注 局部纽立方体网络LTQ_n是n正则的,如果与同一个点相连的$(n-1)$条边全部发生故障,则Hamilton圈不可能嵌入该网络中,所以界$(n-2)$是紧的.

2 局部纽立方体

n维局部纽立方体$LTQ_n(n\geqslant 2)$的每个顶点是由$\{0,1\}$组成的n元字符串.两个点$x=x_1x_2\cdots x_n$和$y=y_1y_2\cdots y_n$之间有边相连,当且仅当它们满足下列两条件之一:

(1)存在整数$1\leqslant k\leqslant n-2$,使得

(a)$x_k=\bar{y}_k$($\bar{y}_k$是y_k在$\{0,1\}$中的补),

(b)$x_{k+1}=y_{k+1}+x_n$,

(c)x和y其余分量都相同.

(2)存在整数$k\in\{n-1,n\}$,使得x和y只有第k个分量不同.

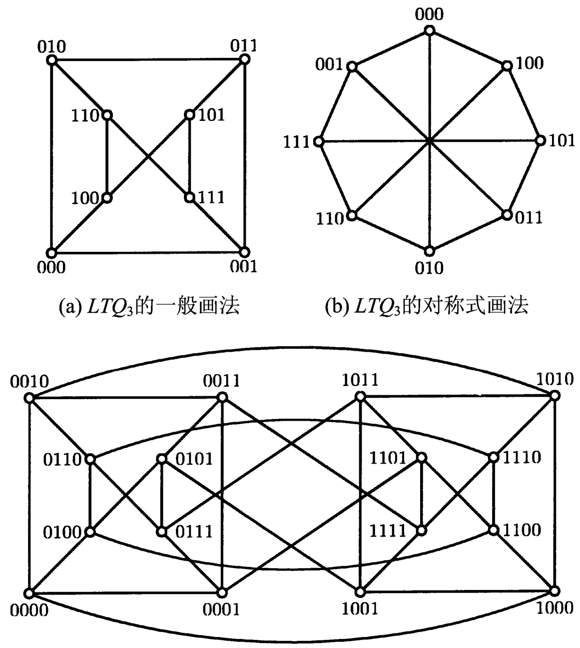
图1给出了LTQ_3和LTQ_4.根据上述定义,局部纽立方体LTQ_n是有2^n个点的n正则图.它也可以递归定义如下:LTQ_2的顶点集为

$$\{00,01,10,11\},$$

边集为

$$\{(00,01),(00,10),(10,11),(01,11)\}.$$

当$n\geqslant 3$时,LTQ_n可以由两个LTQ_{n-1}增加2^{n-1}条边得到.具体做法如下:在一个LTQ_{n-1}的所有顶点前面加“0”得到LTQ_{n-1}^0,在另一个LTQ_{n-1}的所有顶点前面加“1”得到LTQ_{n-1}^1,再把LTQ_{n-1}^0中的点$0x_2x_3\cdots x_n$和LTQ_{n-1}^1中的点$1(x_2+x_n)x_3\cdots x_n$连边即得LTQ_n,这里的“+”表示模2加法.简记$LTQ_n=L\oplus R$,其中,$L\cong LTQ_{n-1}^0$,$R\cong LTQ_{n-1}^1$,连接L和R之间的边称为交叉边,记做(u_L,u_R),其中,$u_L\in L$,$u_R\in R$.



(a) LTQ_3的一般画法 (b) LTQ_3的对称式画法

(c) LTQ_4

图1 局部纽立方体LTQ_3和LTQ_4

Fig. 1 Locally twisted cubes LTQ_3 and LTQ_4

文献[9]考虑更一般的图类$G(G_1,G_2;M)$,它的顶点集为

$$V(G)=V(G_1)\cup V(G_2),$$

边集为

$$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup M,$$

其中,M是G_1和G_2之间的完备匹配.由LTQ_n的递归构造,LTQ_n显然是$G(G_1,G_2;M)$的特例,其中,$G_1=LTQ_{n-1}^0$,$G_2=LTQ_{n-1}^1$.由文献[10]中的定理1和定理2,我们立即得到如下结论.

引理2.1 LTQ_n是$(n-2)$容错Hamilton的和$(n-3)$容错Hamilton连通的$(n\geqslant 3)$.

用LTQ_{n-2}^{ij}表示由点集$ijx_3\cdots x_n$导出的LTQ_n的子图,它是一个$(n-2)$维局部纽立方体.如果$LTQ_{n-1}^i(i\in\{0,1\})$中的一条边的一个端点在LTQ_{n-2}^{i0}中,另一个端点在LTQ_{n-2}^{i1}中,称该边为

LTQ_n 的临界边.

引理 2.2　记 $LTQ_n = L \oplus R(n \geqslant 3)$. 如果 $(u_L, v_L) \in E(L)$ 是 LTQ_n 的临界边，则 $(u_R, v_R) \in E(R)$ 也是 LTQ_n 的临界边，其中，u_R 和 v_R 分别是 u_L 和 v_L 在 R 中的邻点.

证明　设 $(u_L, v_L) \in E(L)$ 是 LTQ_n 的一条临界边. 不失一般性，设 $u_L = 00u_3u_4 \cdots u_n$. 则

$$v_L = 01(u_3 + u_n)u_4 \cdots u_n,$$
$$u_R = 1(0 + u_n)u_3u_4 \cdots u_n,$$
$$v_R = 1(1 + u_n)(u_3 + u_n)u_4 \cdots u_n.$$

根据 LTQ_n 的定义知，u_R 和 v_R 是相邻的. 因此，(u_R, v_R) 是 LTQ_n 中的一条临界边.　□

在 $LTQ_n = L \oplus R$ 中，对于 L 中任何两邻点 u_L 和 v_L，它们在 R 中的邻点 u_R 和 v_R 不一定相邻，反之亦然. 若 (u_L, v_L) 是 L 中的一条临界边，则由引理 2.2，u_R 和 v_R 一定相邻，此时 $\langle u_L, v_L, v_R, u_R, u_L \rangle$ 构成一个长为 4 的圈，称这样的圈为交叉 4 圈. 易知对 LTQ_{n-2}^{00} 中的每个顶点，恰有一个交叉 4 圈与之对应，故 LTQ_n 中含有 2^{n-2} 个点不交的交叉 4 圈. 我们称 LTQ_n 中至少包含两条临界边的圈为 2 临界圈. 因为 LTQ_{n-2}^{ij} 中恰含有 2^{n-2} 个点，所以如果 L 或 R 中的任何圈长大于 $2^{n-2}(n \geqslant 4)$，则它一定是一个 2 临界圈.

3　定理证明

在证明定理之前，首先给出一些记号：$F \subset V(LTQ_n) \cup E(LTQ_n)$ 表示故障集；F^L 表示 L 中的故障集，F^R 表示 R 中的故障集，$f = |F|$，$f^L = |F^L|$，$f^R = |F^R|$；$F_v \subset V(LTQ_n)$ 表示故障点集，F_v^L 表示 L 中的故障点集，F_v^R 表示 R 中的故障点集，$f_v = |F_v|$，$f_v^L = |F_v^L|$，$f_v^R = |F_v^R|$；$F_e \subset E(LTQ_n)$ 表示故障边集，F_e^L 表示 L 中的故障边集，F_e^R 表示 R 中的故障边集，$f_e = |F_e|$，$f_e^L = |F_e^L|$，$f_e^R = |F_e^R|$.

定理 1.1 的证明　我们对维数 $n(n \geqslant 3)$ 用数学归纳法证明.

当 $n=3$ 时，由图 1(b) 知 LTQ_3 是点可迁图，分下列两种情形来证明 LTQ_3 是 1 容错泛圈的.

情形 Ⅰ　LTQ_3 有一个故障点 x. 不妨设 $x = 000$，在 $LTQ_3 - x$ 中长从 4 到 7 的圈为

〈100，101，111，110，100〉，

〈100，101，011，001，111，110，100〉，

〈100，101，011，010，110，100〉，

〈100，101，111，001，011，010，110，100〉.

情形 Ⅱ　LTQ_3 有一条故障边 e. 不妨设边 e 与点 000 相邻. 由情形 Ⅰ 知，在 $LTQ_3 - e$ 中含有长度从 4 到 7 的圈. 下面只需找到长度为 8 的圈即可.

若 $e = (000, 010)$，则长为 8 的圈为

〈000，001，111，110，010，011，101，100，000〉.

若 $e = (000, 001)$，则长为 8 的圈为

〈000，010，110，111，001，011，101，100，000〉.

若 $e = (000, 100)$，与 $e = (000, 001)$ 类似可得长为 8 的圈. 因此，当 $n=3$ 时，定理成立.

设 LTQ_{n-1} 是 $(n-3)$ 容错几乎泛圈的 $(n \geqslant 4)$. 下面证明 $LTQ_n = L \oplus R(L \cong LTQ_{n-1}^0, R \cong LTQ_{n-1}^1)$ 是 $(n-2)$ 容错几乎泛圈的. 设

$$F \subset V(LTQ_n) \cup E(LTQ_n)$$

是任意的故障集且 $|F| = n-2$. 可以分以下两种情形讨论.

情形 1　F 在 L 或 R 中. 不妨设 $F \subset L$. 分下列三种情形来构造长 ℓ 从 4 到 $2^n - f_v$ 的圈.

情形 1.1　$4 \leqslant \ell \leqslant 2^{n-1}$. 根据归纳假设，$R$ 是 $(n-3)$ 容错几乎泛圈的，R 中包含所有长度从 4 到 2^{n-1} 的圈. 故 $LTQ_n - F$ 中也包含长度从 4 到 2^{n-1} 的圈.

情形 1.2　$\ell = 2^{n-1}+1$. 在 $LTQ_n - F$ 中构造一个长为 ℓ 的圈，含有 R 中 $2^{n-1}-1$ 个非故障点，L 中两个非故障点. 在构造圈之前先定义一个概念：隐故障. 设 $\langle u_L, v_L, v_R, u_R, u_L \rangle$ 是一个交叉 4 圈，其中，u_L，v_L 在 L 中，u_R，v_R 在 R 中. 若该圈上存在故障但不在 R 中，则称边 (u_R, v_R) 为故障 F 在 R 中的隐故障. 类似可以定义故障 F 在 L 中的隐故障. 令 $F^s = \{e \mid e$ 是故障 F 在 R 中的隐故障$\}$. 由于所有的交叉 4 圈都是点不交的，所以 $|F^s| \leqslant n-2$. 当 $|F^s| = n-2$ 时，任取 $e_R \in F^s$，令 $F' = R - e_R$；当 $|F^s| < n-2$ 时，令 $F' = F^s$，则 $|F'| \leqslant n-3$. 由归纳假设，R 是 $(n-3)$ 容错几乎泛圈的，所以 $R - F'$ 是泛圈的，$R - F'$ 中存在长为 $2^{n-1}-1$ 的圈 C_R. 因为

$$2^{n-1} - 1 > 2^{n-2},$$

所以圈 C_R 上存在两条临界边. 设 (u_R, v_R) 是圈 C_R 上不同于 e_R 的一条临界边，并设 u_L，v_L 分别是 u_R，v_R 在 L 中的邻点，则 u_L，v_L 均为非故障点，且由引理 2.2 知，(u_L, v_L) 也是 L 中的一条非故障临界边. 于是，

$$C_R - (u_R, v_R) + (u_R, u_L) + (u_L, v_L) + (v_L, v_R)$$

是 $LTQ_n - F$ 中长为 $2^{n-1}+1$ 的圈(参见图 2(a)).

情形 1.3　$2^{n-1}+2 \leqslant \ell \leqslant 2^n - f_v$. 由引理 2.1，

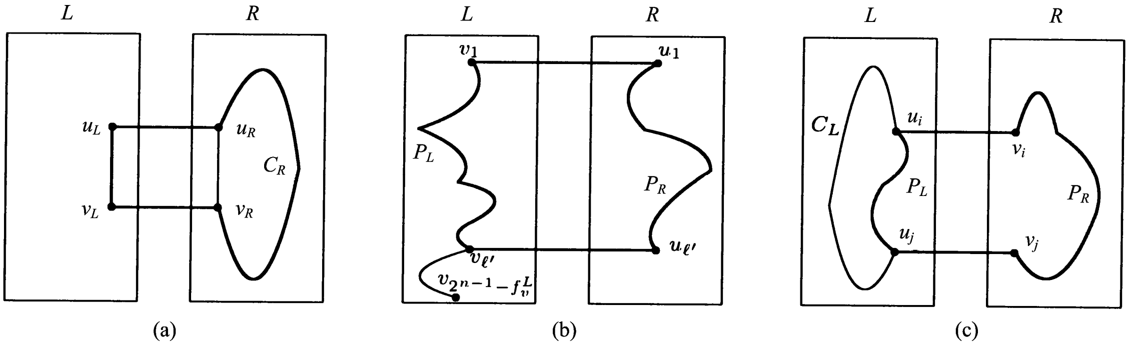


图 2　定理 1.1 证明中的图示

Fig. 2　Illustrations for the proof of Theorem 1.1

L 是$(n-3)$容错 Hamilton 的. 因为

$$f^L = n-2,$$

所以 $L-F^L$ 中存在一条长为 $2^{n-1}-f_v^L-1$ 的 Hamilton 路

$$P_L = \langle v_1, v_2, \cdots, v_{2^{n-1}-f_v^L} \rangle (f_v^L = f_v).$$

令 $$2 \leqslant \ell' \leqslant 2^{n-1} - f_v,$$

则 $$\ell = \ell' + 2^{n-1}.$$

我们用下面的方法构造长为 ℓ 的圈. 设 $v_1, v_{\ell'}$ 在 R 中的邻点分别为 $u_1, u_{\ell'}$, 由于 R 中无故障点, 由引理 2.1, 在 R 中存在连接 $u_1, u_{\ell'}$ 的长为 $2^{n-1}-1$ 的 Hamilton 路 P_R. 所以$\langle v_1, \cdots, v_{\ell'}, u_{\ell'}, P_R, u_1, v_1 \rangle$构成了 LTQ_n-F 中长为$\ell(2^{n-1}+2\leqslant \ell \leqslant 2^{n-1}-f_v)$的圈(参见图 2(b)).

情形 2　$f^L \leqslant n-3$ 且 $f^R \leqslant n-3$. 由归纳假设, $L-F^L$ 和 $R-F^R$ 都是泛圈的. 分下列三种情形来构造长 ℓ 从 4 到 2^n-f_v 的圈.

情形 2.1　$4 \leqslant \ell \leqslant 2^{n-1}-f_v^R$. 由于 R 是$(n-3)$容错几乎泛圈的, 所以 $R-F^R$ 中包含长度从 4 到 $2^{n-1}-f_v^R$ 的圈.

情形 2.2　$\ell = 2^{n-1}-f_v^R+1$. 与情形 1.2 类似, 令 $F^s = \{e \mid e$ 是故障 F 在 R 中的隐故障$\}$. 则

$$|F^s \cup F^R| \leqslant n-2.$$

若

$$|F^s \cup F^R| = n-2,$$

取 F^s 中的任意一条边 e_R, 令

$$F' = F^s \cup F^R - e_R;$$

否则, 取

$$F' = F^s \cup F^R.$$

则有 $$|F'| \leqslant n-3.$$

由归纳假设, R 是$(n-3)$容错几乎泛圈的, 所以 $R-F'$是泛圈的, $R-F'$中存在长为 $2^{n-1}-f_v^R-1$ 的圈 C_R. 因为

$$2^{n-1} - f_v^R - 1 > 2^{n-2} (n \geqslant 4),$$

圈 C_R 上存在两条临界边. 设

$$(u_R, v_R) \neq e_R$$

是 C_R 上的一条临界边, (u_R, v_R)不在 F^s 中, 设 u_R, v_R 在 L 中的邻点分别为 u_L, v_L, 则

$$\langle u_L, v_L, v_R, u_R, u_L \rangle$$

是一个不含故障的交叉 4 圈. 则

$$C_R - (u_R, v_R) + (u_R, u_L) + (u_L, v_L) + (v_L, v_R)$$

是 LTQ_n-F 中长为 $2^{n-1}-f_v^R+1$ 的圈.

情形 2.3　$2^{n-1}-f_v^R+2 \leqslant \ell \leqslant 2^n-f_v$. 不妨设

$$f^R \leqslant f^L \leqslant n-3,$$

若 $$f^R = n-3,$$

则

$$f^L = n-3, f^R + f^L = 2n-6 \leqslant n-2 = f,$$

则有 $n \leqslant 4$. 故当

$$f^R = n-3$$

时, 只需讨论 $n=4$ 的情形. 这种情形的证明只是验证, 故略去其验证过程. 下面假设

$$f^R \leqslant n-4,$$

令

$$1 \leqslant \ell' \leqslant 2^{n-1} - (f_v - f_v^R) - 1 = 2^{n-1} - f_v^L - 1,$$

对每一个 ℓ', 在 L 中构造一条长为 ℓ'的路 P_L. 由引理 2.1, L 是$(n-3)$容错 Hamilton 的, $L-F^L$ 中有一条长为 $2^{n-1}-f_v^L$ 的圈

$$C_L = \langle u_0, u_1, \cdots, u_{2^{n-1}-f_v^L-1}, u_0 \rangle,$$

则 C_L 上一定存在两个点 u_i, u_j 它们在 R 中的对应点分别为 v_i, v_j, 使得

$$(j-i)(\mathrm{mod}(2^{n-1} - f_v^L)) = \ell',$$

且两点 v_i, v_j 以及两条边(u_i, v_i), (u_j, v_j)都是非故障的. 假设不存在这样的 u_i, u_j, 则 L 之外至少有 $\lceil (2^{n-1}-f_v^L)/2 \rceil$个故障. 当 $n \geqslant 2$ 时,

(下转第 673 页)